

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Модели молекулярного и турбулентного переноса.
Полуэмпирические модели турбулентности»
(http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/RANS_models)

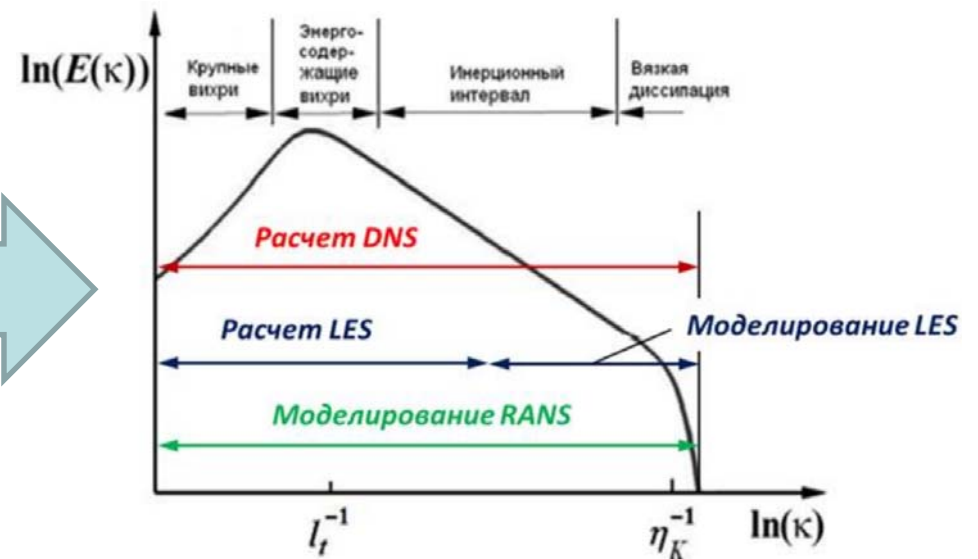
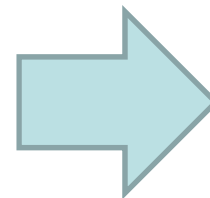
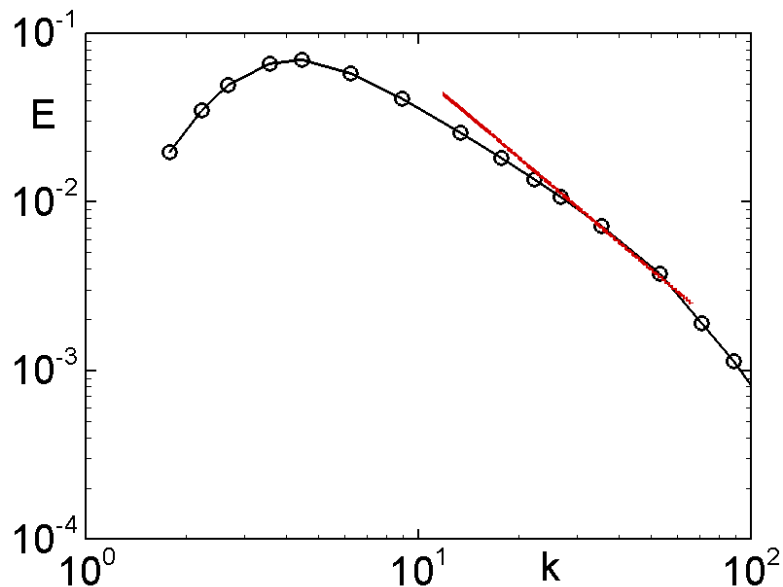
Лекция 2

Обзор методов расчета турбулентных течений

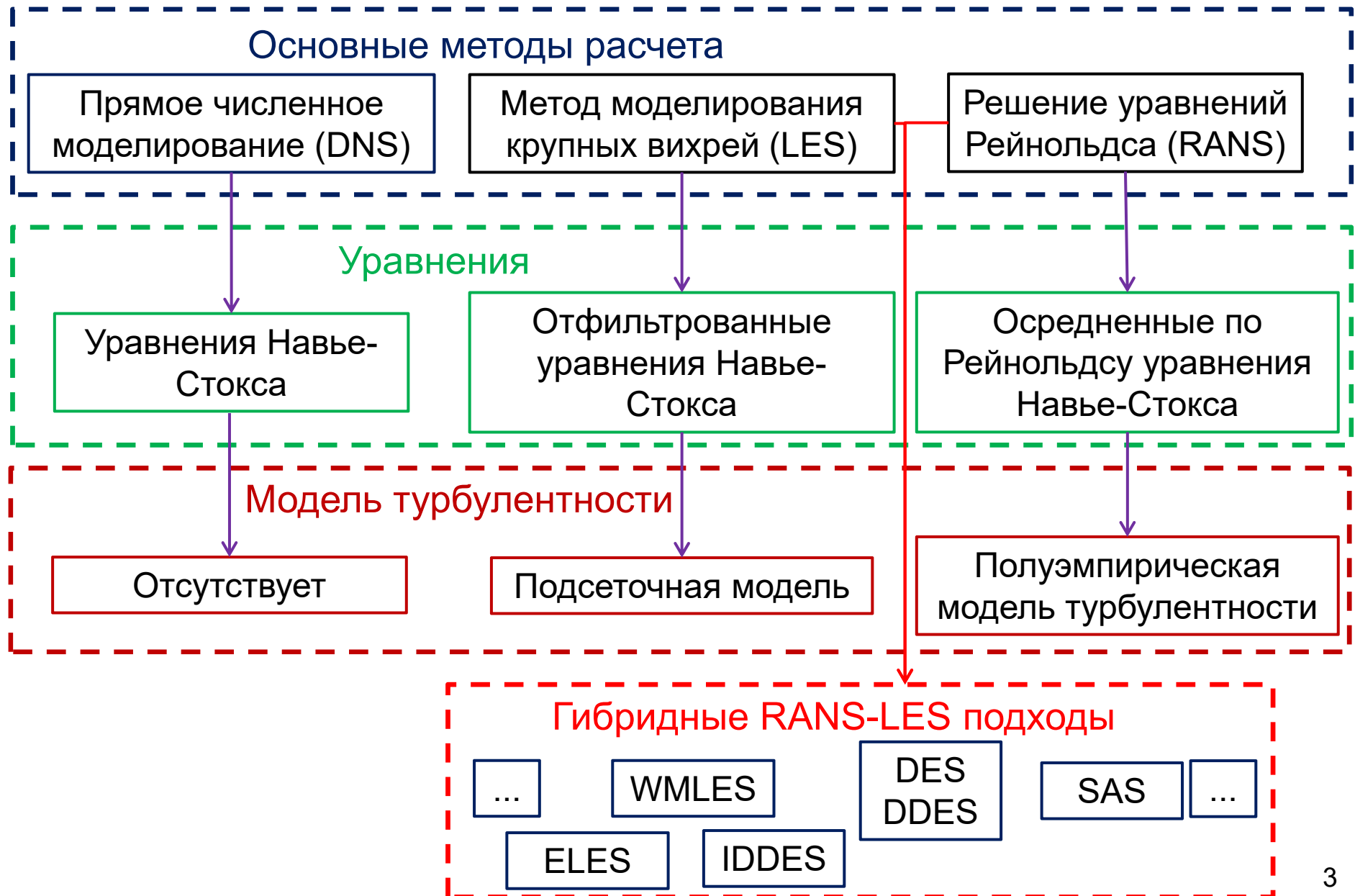
Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2023

Классификация методов расчета турбулентных течений

Один из возможных способов классификации методов расчета турбулентных течений базируется на соотношении “точно” разрешаемой и моделируемой частей энергетического спектра турбулентности



Методы расчета турбулентных течений



Прямое численное моделирование (DNS)

Решение уравнений Навье-Стокса на сетке с шагами (включая шаг по времени) достаточно малыми для точного разрешения всех турбулентных вихрей



Шаг сетки должен быть порядка колмогоровского масштаба

$$\eta_k = \left(\nu^3 / \varepsilon \right)^{1/4}$$



Вычислительные затраты пропорциональны количеству узлов в каждом направлении и количеству шагов по времени

Затраты $\sim \eta_k^{-4} \sim \nu^{-3} \sim Re^3$



Сегодня DNS применим только при весьма ограниченных числах Рейнольдса

Предел возможностей DNS в настоящий момент

- Возможности DNS ограничены не только затратами
 - Лишь некоторые CFD коды поддерживают массивно-параллельную работу
 - Узкими местами также является препроцессинг и постпроцессинг
 - ✓ Построение сеток и обработка результатов
- Для задач простой геометрии зачастую для DNS используют спектральные коды
 - Это невозможно для более сложных задач
- На настоящий момент предел примерно составляет
 - Для течений в трубе и плоском канале $Re_{\tau} \sim 5000-10000$ ($Re_{\tau} = u_{\tau} (H/2)/\nu$ или $Re_{\tau} = u_{\tau} R/\nu$)
 - ✓ Это примерно на порядок меньше того, что можно достичь в эксперименте
 - ✓ Размер сеток достигает 80 миллиардов !!!
 - Для крыловых профилей $Re \sim 10^6$
 - ✓ Размер расчетных сеток больше миллиарда

Наш опыт: трансзвуковое обтекание выпуклости на цилиндрической поверхности

- Постановка задачи соответствует эксперименту Vachalo-Johnson
- Характерной особенностью течения является отрыв пограничного слоя под влиянием скачка уплотнения
- Расчеты были выполнены с использованием зонного RANS-DNS-IDDES
 - Для этого расчета использовалась сетка размером 8.3 миллиарда узлов
 - Для расчета требуются все ресурсы кластера СПбПУ в течении нескольких месяцев

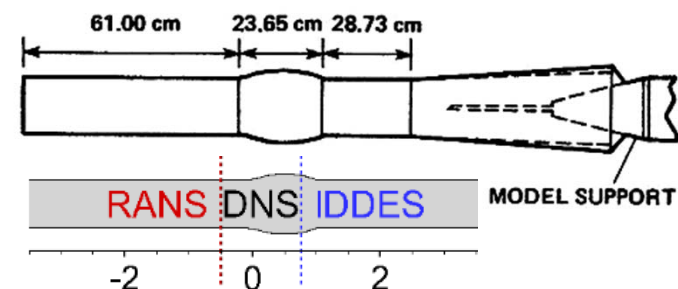
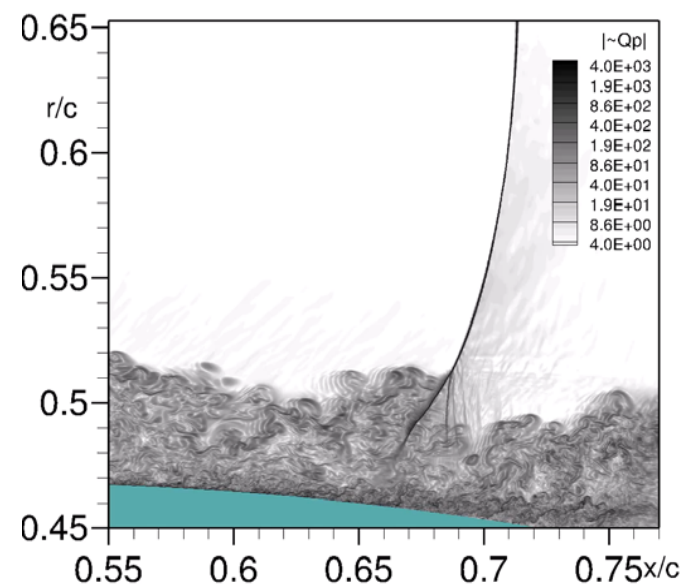


Схема экспериментальной установки и расчета двухстадийным зонным DNS-IDDES



Визуализация течения

Метод моделирования крупных вихрей Large Eddy Simulation (LES)

Крупные вихри получают энергию от осредненного потока



Структура крупных вихрей существенно зависит от рассматриваемого течения

Мелкие вихри получают энергию через каскадный перенос



Их структура существенно более универсальна

Моделирование мелких вихрей гораздо более перспективно,
чем моделирование крупных

Процедура фильтрации

- Процедура фильтрации позволяет отделить «крупные» вихри от «мелких»

$$\bar{f}(r, t) = \int_V G(r, r') f(r', t) dr'^3, \quad f = \bar{f} + f',$$

- Применение процедуры фильтрации к уравнениям Навье-Стокса приводит к получению так называемых отфильтрованных уравнений
- Отфильтрованные уравнения замыкаются при помощи «подсеточной» модели турбулентности

Моделируются вихри,
размер которых меньше
размера фильтра Δ



Размер фильтра Δ в
явном виде входит в
модель

Практическая реализация LES

Зачастую на практике не пользуются явными фильтрами, а роль фильтра играет размер ячейки сетки (например $\Delta = \sqrt[3]{V}$)



- Подсеточная модель содержит в явном виде размер ячейки сетки
- Вихри, которые меньше размера ячейки сетки естественным образом отфильтровываются
- Для точного разрешения вихрей, ненамного превосходящих размер ячейки, необходимо использование современных низкодиссипативных схем

Подсеточная модель Смагоринского

- Наиболее часто используется при проведении LES

- Основана на гипотезе Буссинеска $-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$

$$\overline{\Delta} = (\Delta_x \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z)^{1/3} = Vol^{1/3}$$
$$v_t = (C_{SMAG} \overline{\Delta})^2 |\overline{S}|$$
$$|\overline{S}| = \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

При расчете пристенных течений используют демпфирующую функцию и ограничивают линейный масштаб формулой Прандтля

$$v_t = f_{VD} \cdot (\Delta_{LES})^2 |\overline{S}| \quad f_{VD} = 1.0 - \exp(-(y^+ / A^+)^3), \quad A^+ = 25$$

$$\Delta_{LES} = \min(\kappa \cdot d_w, C_{SMAG} \Delta)$$

Калибровка константы

- в однородной изотропной турбулентности $C_{SMAG}=0.2$
- для пристенных течений используют $C_{SMAG}=0.1$

Свойства LES

- При использовании достаточно мелких сеток и хороших схем обеспечивает очень высокую точность
- Требует решения трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса на подробных сетках

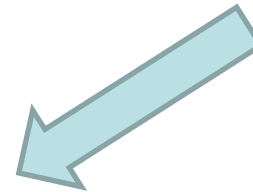


Использование LES сопряжено со значительными затратами

При приближении к стенке
характерный размер вихрей
уменьшается



Возрастают
требования к сетке



Вычислительные затраты особенно
существенны в окрестности стенки

Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS)

- Использование процедуры осреднения по Рейнольдсу

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} a(\tau) \cdot d\tau$$

- Применение осреднения по Рейнольдсу к уравнениям Навье-Стокса приводит к получению уравнений Рейнольдса, которые не замкнуты
- Замыкание уравнений Рейнольдса (определение турбулентных напряжений $\tau_{ij}^T = -\rho \overline{u'_i u'_j}$) производится с помощью полуэмпирических моделей турбулентности

В RANS все турбулентные вихри моделируются

Уравнения Навье-Стокса

- Уравнения Навье-Стокса справедливы при выполнении двух условий:
 - Среда должна быть сплошной
 - ✓ (число Кнудсена $Kn = l_f/L \ll 1$)
 - Выполняется обобщенный реологический закон Ньютона
 - ✓ $P_{ij} = 2\mu S_{ij} - p\delta_{ij}$
- В случае несжимаемой жидкости

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad \text{где} \quad t_{ij} = 2\mu S_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

- Конвективные слагаемые можно записать в консервативной форме

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}$$

- Вязкие слагаемые можно упростить

$$\frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Условия Рейнольдса

- Уравнения Рейнольдса получаются из уравнений Навье-Стокса при помощи осреднения
 - Осреднение может проводиться различными способами
 - ✓ по ансамблю
 - ✓ по времени
 - ✓ по пространству
- Независимо от типа осреднения для получения уравнений Рейнольдса необходимо, чтобы осреднение удовлетворяло условиям Рейнольдса

$$\begin{array}{l} \overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g} \\ \overline{af} = a\overline{f} \\ \overline{a} = a \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s} \\ \overline{fg} = \overline{f} \overline{g} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \overline{\overline{f}} = \overline{f} \\ \overline{f'} = 0 \\ \overline{\overline{fg}} = \overline{\overline{f} \overline{g}} \\ \overline{fh'} = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \overline{fg} = \overline{f} \overline{g} + \overline{f'g'}$$

Осреднение по Рейнольдсу (по времени)

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} a(\tau) \cdot d\tau$$

- Для удовлетворения условиям Рейнольдса период осреднения должен быть много больше максимального периода турбулентных пульсаций – времени автокорреляции
 - При рассмотрении стационарных (в среднем) течений время осреднения может быть сколь угодно большим ($T = \infty$)
 - В нестационарном случае период осреднения должен быть много меньше характерных времен изменения нестационарных величин
 - ✓ Не всегда возможно подобрать период T такой, чтобы выполнялись условия Рейнольдса



- Применение нестационарных уравнений Рейнольдса (URANS) не всегда обосновано
 - ✓ Тем не менее, этот подход широко распространен

Уравнения Рейнольдса

Вывод уравнений см. в упражнениях по курсу

- Уравнения Рейнольдса получаются в результате осреднения по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \end{cases}$$

- Отличаются от уравнений Навье-Стокса только слагаемым $\frac{\partial}{\partial x_j} \rho \overline{u'_i u'_j}$

- Эти уравнения не замкнуты.
 - Для их замыкания необходимо определить тензор турбулентных (Рейнольдсовых) напряжений

$$\tau_{ij}^T = -\rho \overline{u'_i u'_j}$$

- ✓ Симметричный
 - 6 независимых компонент

- След $\{\tau_{ij}^T\} = \{-\rho \overline{u'_i u'_j}\} = -\rho \overline{u'_i u'_i} = -2K_i$

- Рейнольдсовы напряжения по форме – вязкие, по природе конвективные

Осреднение по Фавру

- В сжимаемом случае осреднение по Рейнольдсу приводит к появлению корреляций плотности вида $\overline{\rho'u'}$
 - Во многих случаях этими членами уравнений просто пренебрегают
 - ✓ Гипотеза Морковина: при не слишком высоких числах Маха при моделировании турбулентности можно не учитывать влияние пульсаций плотности
- Более оправданным подходом является использование взвешенного осреднения (осреднения по Фавру)

$$\tilde{a}(t) = \frac{\overline{\rho a}}{\bar{\rho}}$$

- Не приносит дополнительного физического смысла, а просто удобное математическое упрощение
- Свойства осреднения по Фавру

$$a = \tilde{a} + a''$$

$$\overline{\rho a''} = 0$$

$$\overline{\rho a} = \overline{\rho \tilde{a}} = \overline{\rho \bar{a}} + \overline{\rho' a'} \quad \Rightarrow \quad a - a'' = \tilde{a} = \bar{a} + \frac{\overline{\rho' a'}}{\bar{\rho}} \quad \Rightarrow \quad \bar{a}'' = -\frac{\overline{\rho' a'}}{\bar{\rho}} \neq 0$$

Уравнения Рейнольдса для сжимаемого газа

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\tau}_{ji} + \overline{\tau_{t,ji}}] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \bar{\rho} k \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \tilde{u}_j \left(\tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \bar{\rho} \tilde{u}_j k \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{q}_j + \overline{q_{t,j}} + \overline{\tau_{ji} u_i''} - \frac{\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} [\tilde{u}_i (\bar{\tau}_{ji} + \overline{\tau_{t,ji}})] \\ \bar{\rho} = Pm / (RT) \end{array} \right.$$

- Тензор турбулентных напряжений $\tau_{t,ij} = -\overline{\rho u_i'' u_j''}$
- Турбулентный тепловой поток $q_{t,i} = -\overline{\rho u_i'' h''}$
- Отличия исходных и полученных уравнений более существенны, чем в несжимаемом случае

➤ В уравнение энергии входят конвекция и диффузия кинетической энергии турбулентности

$$k = \frac{1}{\rho} \frac{-\tau_{t,ii}}{2} = \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2\rho}$$

✓ Этими слагаемыми обычно пренебрегают

Модели турбулентности

- Попытка замкнуть уравнения для рейнольдсовых напряжений на основе формализма Рейнольдса приводит к появлению еще большего числа неизвестных
 - Необходимо привлекать дополнительные соображения
 - ✓ Эмпирические закономерности
- Формулы для замыкания уравнений Рейнольдса (для определения $\tau_{ij}^T = -\rho \overline{u'_i u'_j}$) называются **полуэмпирические модели турбулентности**
 - Устанавливают связь между тензором Рейнольдсовых напряжений τ_{ij}^T и параметрами осредненного потока.
- В настоящее время разработаны сотни моделей турбулентности, но ни одна из них не является универсальной, т.е. подходящей для любых течений

Проблемы полуэмпирических моделей турбулентности

- Полуэмпирические модели турбулентности выражают тензор рейнольдсовых напряжений через параметры осредненного потока
 - Наличие такой зависимости неочевидно
- В большинстве моделей эта связь является локальной
 - Удобно для использования в расчетах
 - Вызывает еще больше вопросов

Пример:

- Рассмотрим модельную задачу, в которой $u' = \sin(\omega t), v' = \sin(\omega t + \varphi_0)$
 - Рассмотрим корреляцию $\overline{u'v'} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u'v' \cdot dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.5 \cdot \cos(\varphi_0)$
- Видно, что искомая корреляция зависит только от сдвига фазы и не связана со средними величинами
 - Причина такого поведения в значительной степени состоит в неслучайности рассмотренных пульсаций
 - ✓ В этом случае статистические подходы плохо применимы

Несовершенство моделей турбулентности

- В отличие от уравнений движения модели турбулентности не являются универсальными физическими законами
- Большинство моделей турбулентности базируются на закономерностях, характерных для простых «канонических» течений
 - ✓ Закон стенки
 - ✓ Формула Колмогорова
 - ✓ ...
 - Как только эти закономерности перестают выполняться – точность расчета падает
- Константы в моделях турбулентности «настраиваются» на определенный набор течений
 - Часто приходится при настройке идти на компромисс



- Не существует универсальных моделей турбулентности, каждая модель имеет свою «область применимости»

Проблема выбора моделей турбулентности

- При расчете конкретных течений необходимо не только выбрать наиболее подходящую модель турбулентности, но и оценить степень достоверности полученных с ее помощью результатов.
- Проводятся многочисленные работы по тестированию моделей турбулентности
 - Стэнфордские конференции
 - Международные проекты
 - Workshop
 - Академические исследования



- Лучшие современные модели турбулентности хорошо изучены
 - Известна их способность предсказывать свойства тех или иных течений
 - Для многих течений известны наиболее надежные модели

Гипотеза Буссинеска

- Буссинеск (1877) предложил ввести дополнительную (турбулентную) вязкость
- Большинство моделей турбулентности используют обобщенную гипотезу Буссинеска

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

- Линейная связь между тензором Рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций
 - Аналог реологического закона Ньютона для молекулярной вязкости
- Достоинства
 - Использование гипотезы Буссинеска позволяет сократить количество определяемых в процессе моделирования переменных с 6 до 1.
 - Недостатки
 - В некоторых случаях гипотеза Буссинеска несправедлива и ее использование приводит к получению качественно неверного результата

В таких случаях необходимо использование моделей рейнольдсовых напряжений или нелинейных моделей

Турбулентная вязкость

- Величина ν_T в гипотезе Буссинеска $-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}$ называется турбулентной вязкостью
 - Не фундаментальная физическая величина, а лишь коэффициент пропорциональности

- Уравнения Рейнольдса с использованием гипотезы Буссинеска

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho(\nu + \nu_T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

- В них входит модифицированное давление $\tilde{p} = p + \frac{2}{3}\rho k$
 - В несжимаемой жидкости может влиять только около границ
 - В сжимаемом газе все сложнее...
- Турбулентное число Рейнольдса $Re_t = \frac{\nu_T}{\nu}$
 - Характеризует соотношение турбулентного и молекулярного переноса
 - ✓ Часто используется в моделях турбулентности

Достоинства RANS

Позволят использовать упрощенные уравнения

- двумерные
- стационарные



RANS гораздо более экономичен,
чем LES и, тем более, DNS



Является наиболее широко
применяемым методом при
практических расчетах
турбулентных течений

Недостатки RANS

Не существует «универсальной модели турбулентности»,
каждая модель имеет свою «область применимости»



Даже при тщательном выборе модели невозможно
гарантировать высокую точность расчета

Накоплен огромный опыт применения моделей турбулентности



Лучшие модели турбулентности обеспечивают достаточно высокую
точность расчета некоторых классов течений, в частности,
пограничных слоев

Гибридные методы

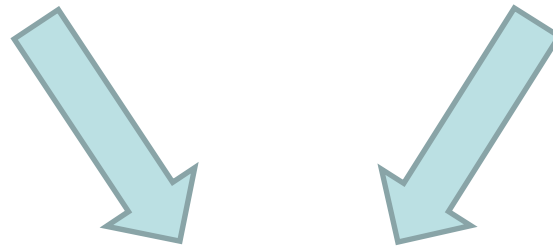
Создание метода объединяющего преимущества RANS и LES

RANS

Высокая точность расчета
пристенных течений при
скромных требованиях к сетке

LES

Высокая точность расчета
отрывных течений



Гибридные методы

Компромисс:

Позволяют получать достаточно точные результаты для сложных (в первую очередь отрывных) течений при приемлемых затратах

**Вычислительные ресурсы и перспективы
практического применения различных методов
моделирования турбулентных течений
(P. Spalart, 2000)**

Метод	Необходимое число узлов сетки	Необходимое число шагов по времени	Готовность
2D Steady RANS	10^5	$10^{3.5}$	1980
3D Steady RANS	10^7	10^3	1985
3D Unsteady RANS	10^7	$10^{3.5}$	1995
DES (гибридный метод)	10^8	10^4	2000
LES	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
DNS	10^{16}	$10^{7.7}$	2080

Резюме

- Существует множество методов расчета турбулентных течений. Обычно чем точнее метод, тем больше вычислительных ресурсов требуется для его использования
- В прямом численном моделировании (DNS) разрешаются все турбулентные масштабы, поэтому применять его возможно только при низких числах Рейнольдса
- Метод моделирования крупных вихрей (LES) тоже достаточно точен, но затраты пока неприемлемы для решения прикладных задач
- В настоящее время активно развиваются гибридные методы – поиск компромисса между точностью и экономичностью
- На практике чаще всего используется метод решения уравнений Рейнольдса
- Уравнения Рейнольдса замыкаются при помощи полуэмпирических моделей турбулентности
- Обычно используется гипотеза Буссинеска – линейная связь между напряжениями Рейнольдса и тензором скоростей деформаций