

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Модели молекулярного и турбулентного переноса.  
Полуэмпирические модели турбулентности»  
([http://cfд.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/RANS\\_models](http://cfд.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/RANS_models))

## Лекция 4

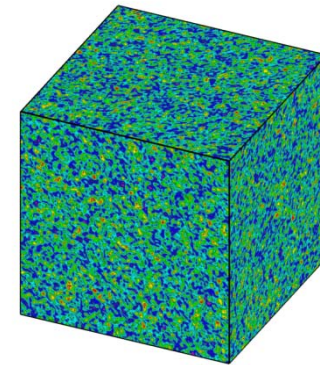
# Канонические течения

## используемые для построения моделей турбулентности

Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)  
2023

# Однородная изотропная турбулентность

- Наиболее простой вид турбулентного движения
  - Предложен Тейлором в 1935 году
- Позволяет изучить ряд свойств, присущих всем турбулентным течениям
  - Мелкомасштабная турбулентность в значительной степени однородна и изотропна
    - ✓ Причина - каскадный перенос энергии
- Однородная изотропная турбулентность
  - Однородна по пространству
  - Изотропна по направлению
- Некоторые свойства
  - Напряжение  $\overline{u_i'^2}$  одинаково для всех направлений  $x_i$
  - Корреляция компоненты скорости и скаляра равна 0
    - ✓  $\overline{u_i' p'} = 0$



# Экспериментальные исследования

Исследуется течение за решеткой

- Чаще всего используют эксперимент Comte-Bellot и Corrsin

- Обтекание решетки с размером ячейки  $L=2''$  потоком со скоростью  $U_0=10$  м/с

- Число Рейнольдса  $Re = \frac{LU_0}{\nu} = 3.4 \cdot 10^4$

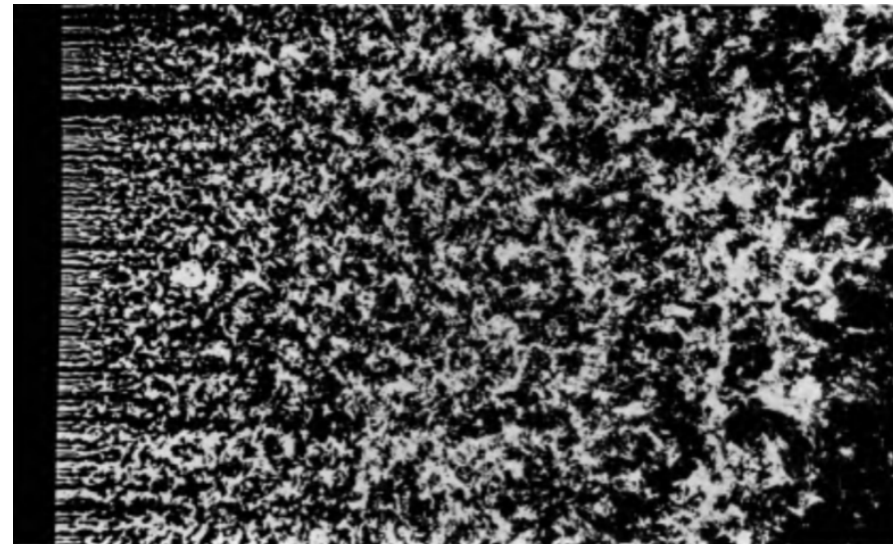
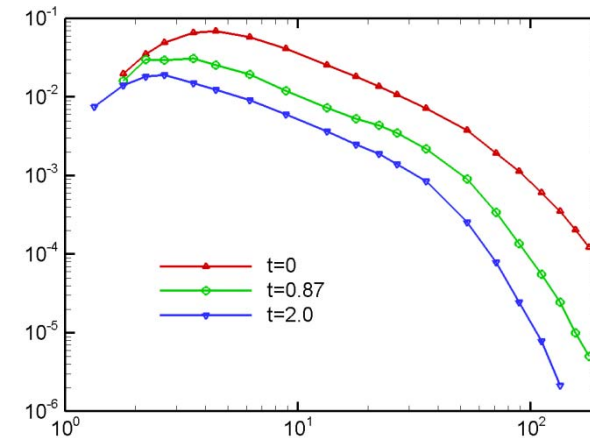
- Уровень турбулентности  $Tu = \frac{\sqrt{u'^2}}{U_0} \approx 2.2\%$

- Практически нет влияния вверх по потоку

- Можно установить соответствие между временем и продольной координатой  $x = U_0 \cdot t$

- Со временем (координатой по потоку) турбулентность затухает

- $K_t \sim t^{1.2}$



# Каскадный перенос энергии Колмогорова-Ричардсона

- При высоком числе Рейнольдса  $k_\varepsilon \gg k_e$ 
  - Энергия содержится в энергетическом интервале, а диссипирует в тепло в диссипативном интервале

✓ Существует механизм передачи энергии между интервалами

- Существует волновое число  $k_d$

✓  $\int_0^{k_d} 2\nu k^2 E(k,t) \cdot dk \ll \int_{k_d}^{\infty} 2\nu k^2 E(k,t) \cdot dk \approx \varepsilon$

✓  $\int_{k_d}^{\infty} E(k,t) \cdot dk \ll \int_0^{k_d} E(k,t) \cdot dk \approx K_t$

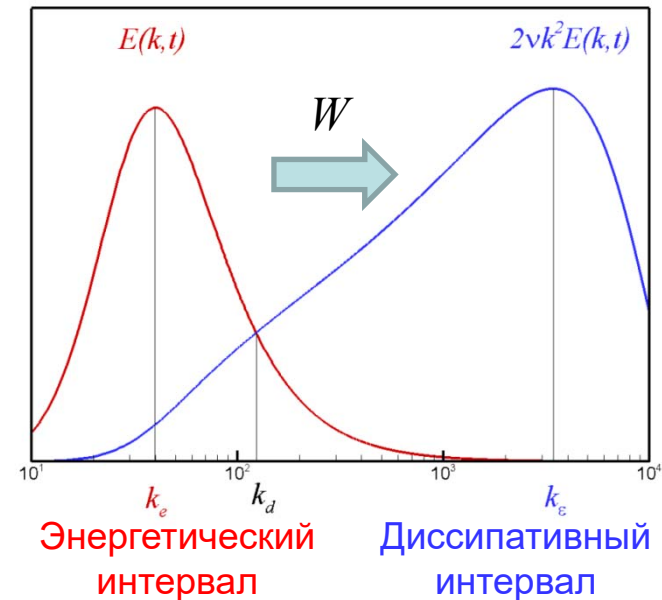
- Обозначим  $W = \int_0^{k_d} F(k,t) \cdot dk$

✓  $\int_0^{\infty} F(k,t) \cdot dk = 0 \Rightarrow \int_{k_d}^{\infty} F(k,t) \cdot dk = -W$

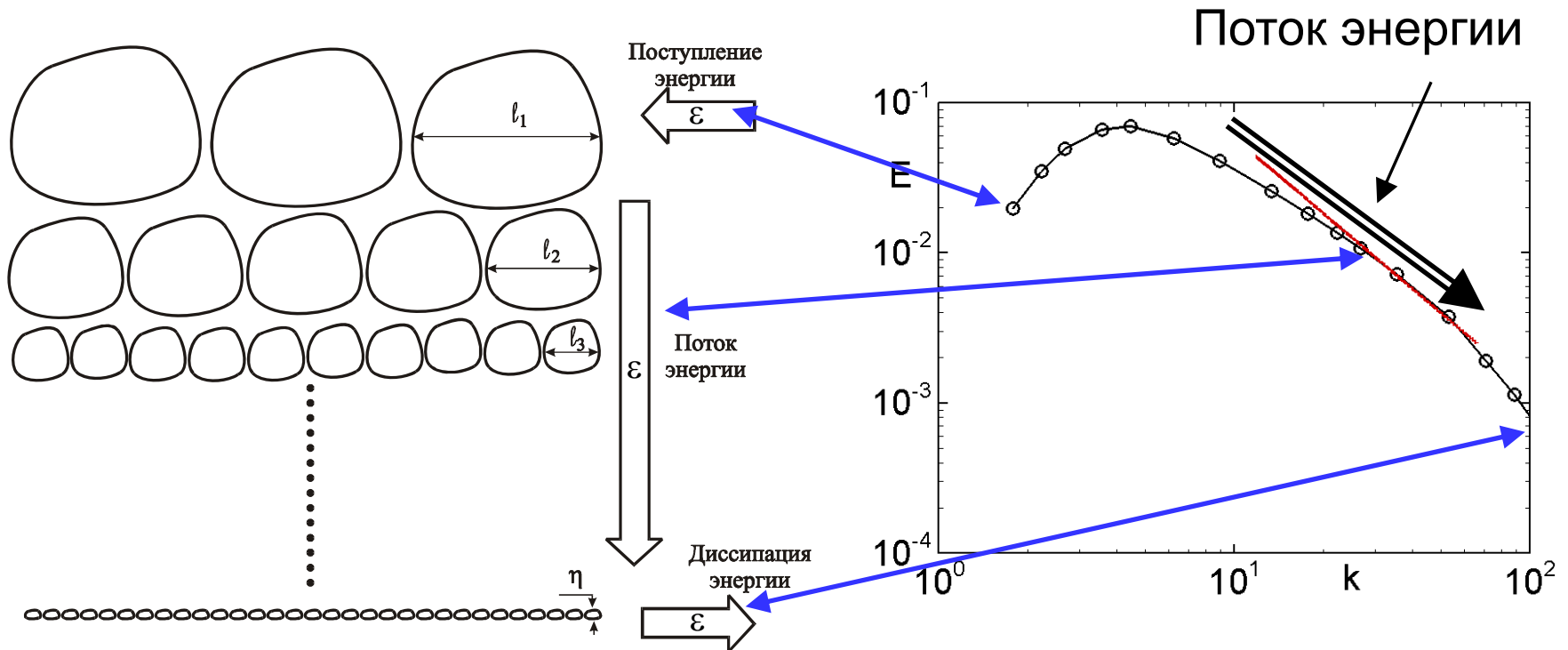
- Рассмотрим динамическое уравнение  $\frac{dE(k,t)}{dt} - F(k,t) + 2\nu k^2 E(k,t) = 0$

➤ Интеграл  $[0, k_d]$   $\Rightarrow \frac{dK_t(t)}{dt} = -W$

➤ Интеграл  $[k_d, \infty]$   $\Rightarrow W = \varepsilon$



# Как устроен каскадный перенос энергии



- Энергия поступает от осредненного потока к наиболее крупным вихрям
- Последовательно передается все более и более мелким вихрям (“каскадный перенос”)
  - «Дробление» и «вытягивание» вихрей
- Наиболее мелкие вихри диссипируют и передают энергию тепловому движению

# Формула Колмогорова

- Величина  $W = \int_0^{k_d} F(k, t) \cdot dk$  определяется только инерцией и не зависит от вязкости

➤ Она должна определяться интегральными характеристиками турбулентности

✓ Кинетическая энергия турбулентности  $K_t = \int_0^{\infty} E(k) \cdot dk$

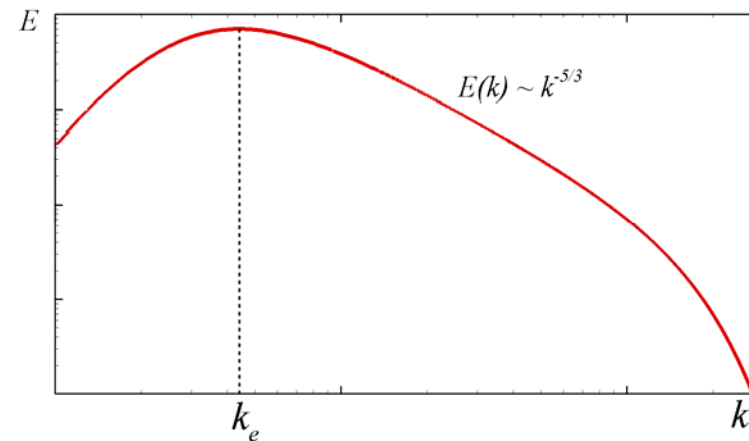
✓ Линейный масштаб  $L_t = 1/k_e$

➤ Из размерности  $W = C_d \frac{K_t^{3/2}}{L_t}$

➤ Из  $\varepsilon = W$  следует формула

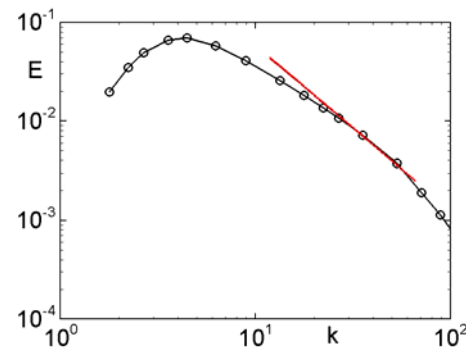
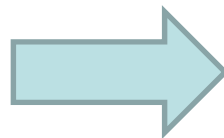
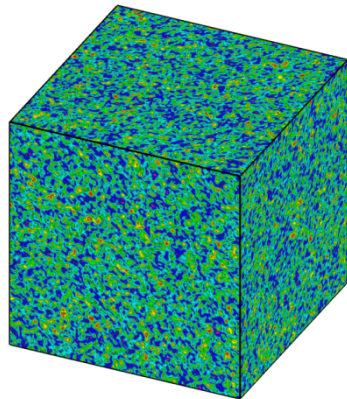
Колмогорова  $\varepsilon = C_d \frac{K_t^{3/2}}{L_t}$

✓ Используется в большинстве моделей турбулентности



# Применение ДИТ

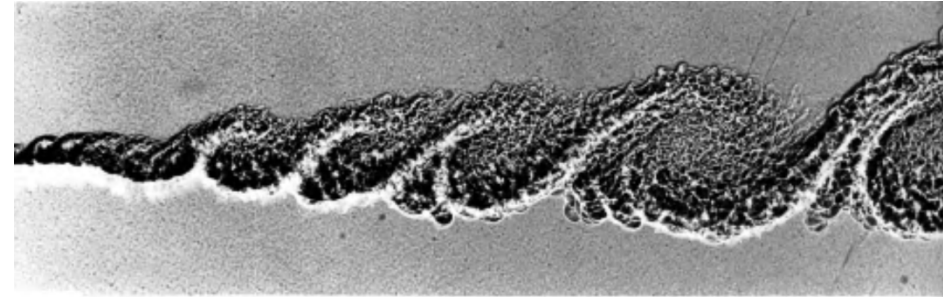
- RANS (см. упражнения по курсу)
  - Для калибровки полуэмпирических моделей турбулентности
    - В моделях с двумя уравнениями ( $k$ - $\varepsilon$  и  $k$ - $\omega$ ) константы подбираются так, чтобы обеспечить правильную скорость вырождения турбулентности  $K_t \sim t^{1.2}$
- LES
  - Для выбора численной схемы
  - Для подбора константы подсеточной модели
  - Схема и константа подбираются так, чтобы обеспечить правильный наклон энергетического спектра (закон  $-5/3$ )
    - Производится нестационарный расчет вырождения однородной изотропной турбулентности и анализируется эволюция энергетического спектра во времени



# Свободные сдвиговые течения

- Сдвиговые течения, в которых отсутствует влияние стенок на турбулентность

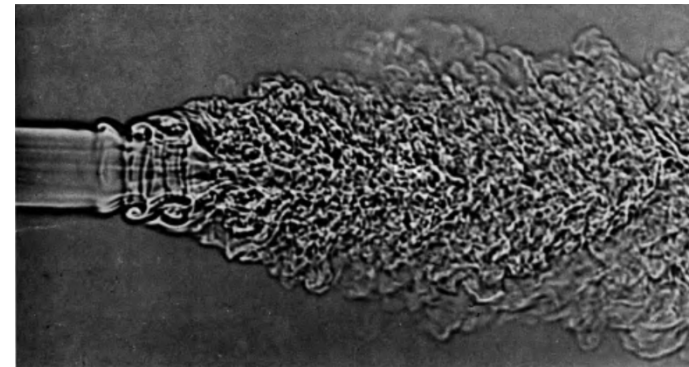
- Слой смешения



- Затопленная струя

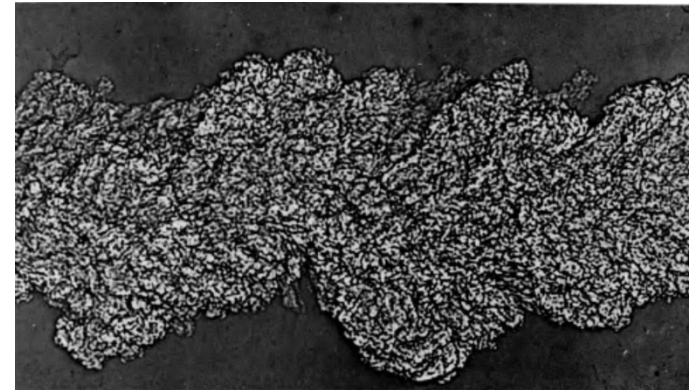
- ✓ Плоская

- ✓ Осесимметричная



- Дальний след за телом

- ✓ Обычно рассматривают плоский след

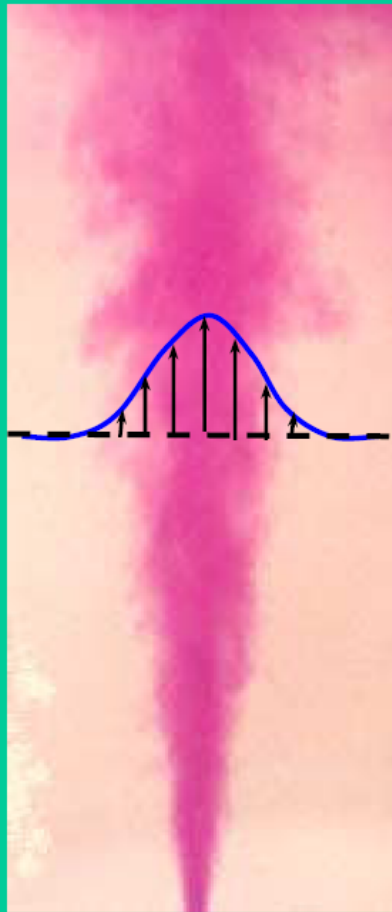


- Эти течения детально изучены в эксперименте

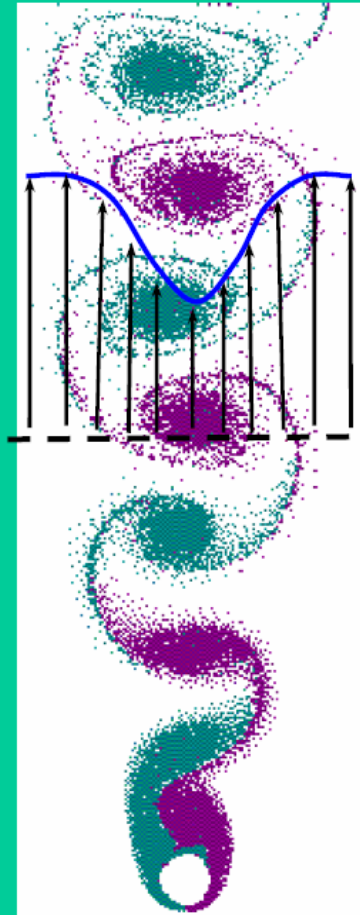


# Свободные сдвиговые течения

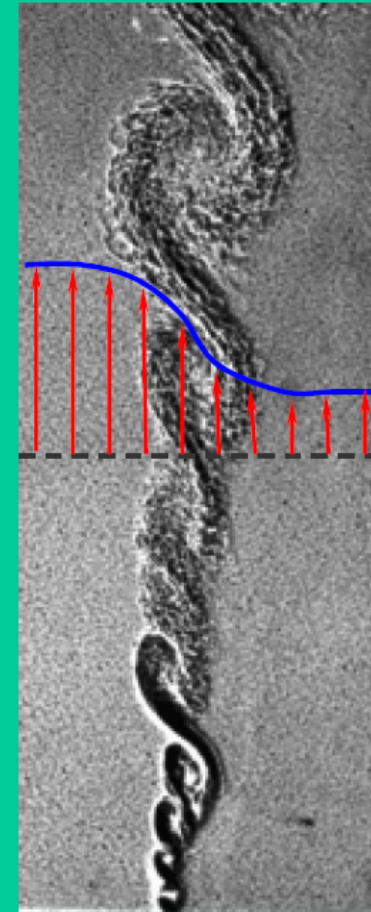
Можно пренебречь влиянием вверх по потоку



Затопленная  
струя



След  
за телом



Слой  
смешения

Типичные профили осредненного течения

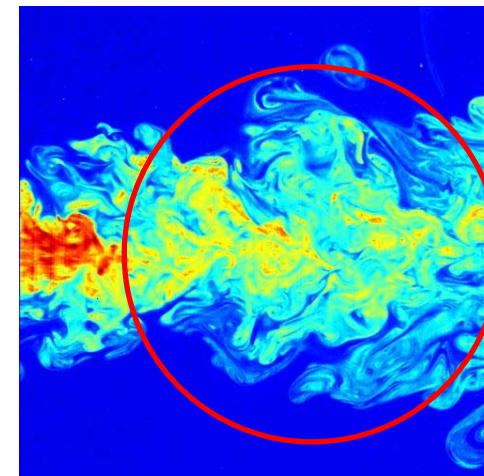
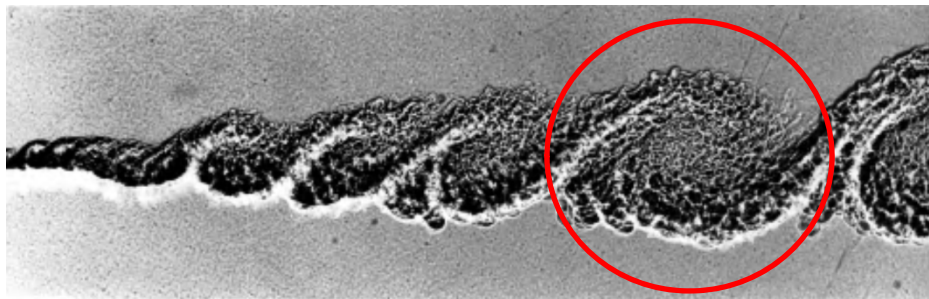
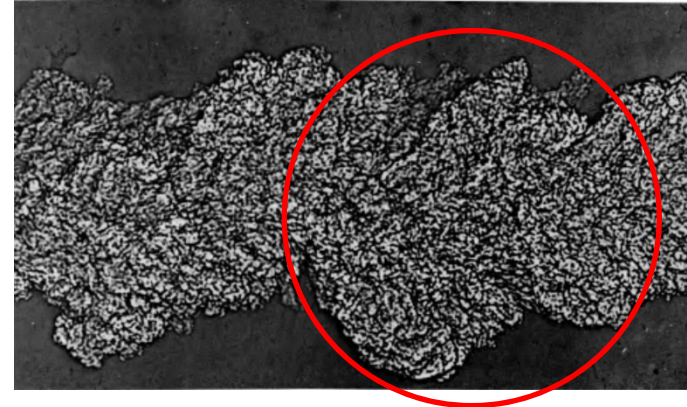
# Свободные сдвиговые течения

- В случае ламинарного течения свободные сдвиговые течения имеют автомодельное решение (см. *Лойцянский, МЖГ*).
- При сравнительно высоких числах Рейнольдса турбулентная диффузия существенно превышает молекулярную
  - Это упрощает теоретическое рассмотрение данных течений
  - С некоторыми моделями турбулентности существует автомодельное решение
    - ✓ Формула Прандтля
    - ✓  $k-\omega$  модель
  - Полученные автомодельные решения хорошо совпадают с экспериментальными данными
    - ✓ При высоком числе Рейнольдса

# Двойная структура течения

- Наиболее крупные структуры оказываются упорядоченными (когерентными)

- Сравнимы по размеру с масштабом течения
  - ✓ Вовлекают невозмущенные (ламинарные) пятна из внешнего потока
  - Перемежаемость



Когерентные структуры в дальнем следе, струе и слое смешения

- На фоне когерентных структур развивается мелкомасштабная турбулентность

# Когерентные структуры

- Являются упорядоченными
- Несут существенную долю энергии турбулентности (до 80%)
- Различаются по структуре для различных типов свободных сдвиговых течений
  - Даже для течений одного типа могут зависеть от предыстории потока

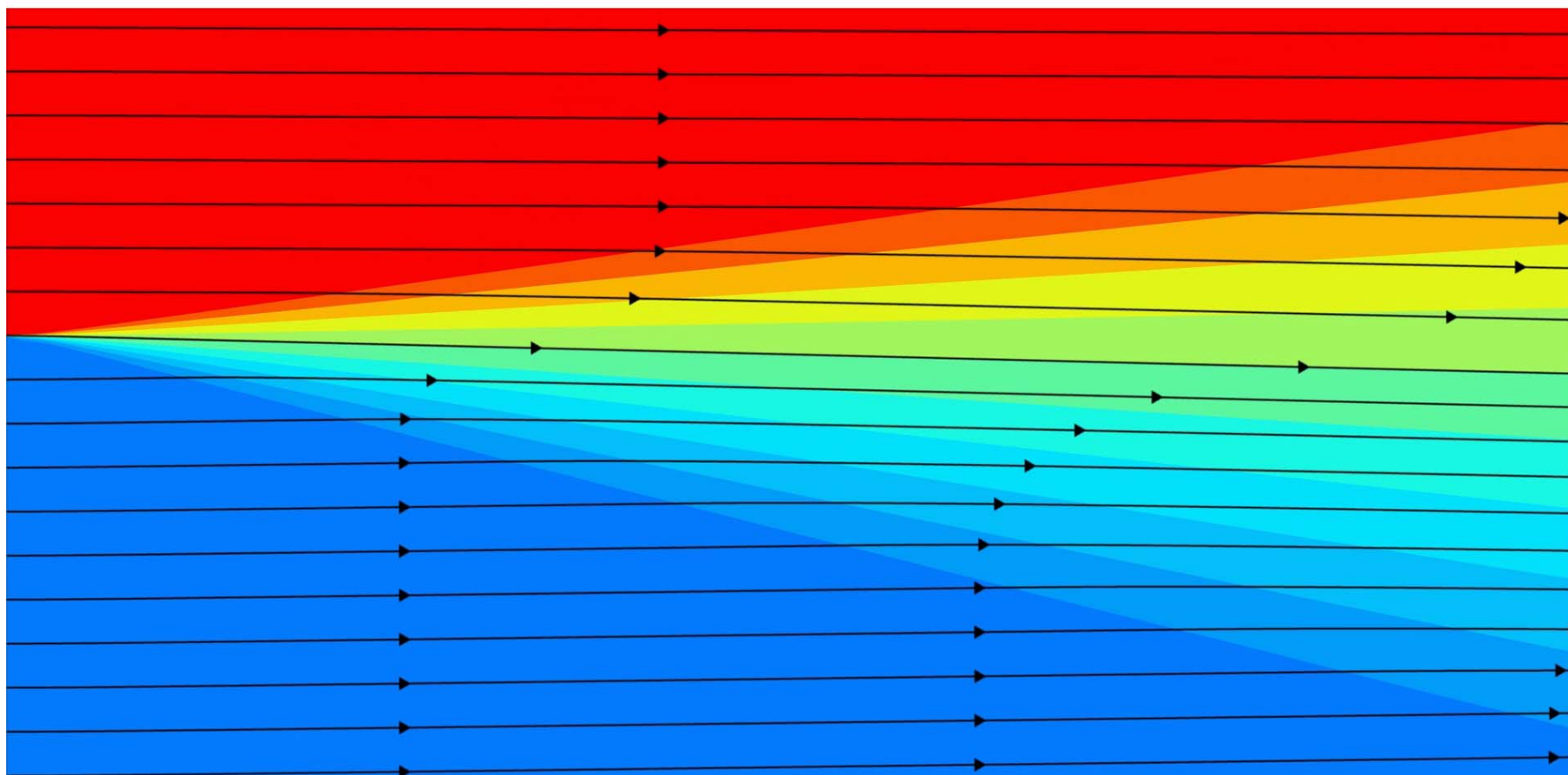


- При моделировании свободных сдвиговых течений методом RANS возникают трудности
  - При переходе от течения к течению необходима перестройка констант полуэмпирических моделей турбулентности
    - ✓ Большинство моделей не в состоянии хорошо предсказать свойства всех свободных сдвиговых течений
    - ✓ Для получения более универсальных моделей вводят специальные поправки (например: модель Секундова  $\nu_t$ -92)

# Слой смешения

- Получается при взаимодействии двух потоков, движущихся в одном направлении с разными скоростями

MIXING LAYER

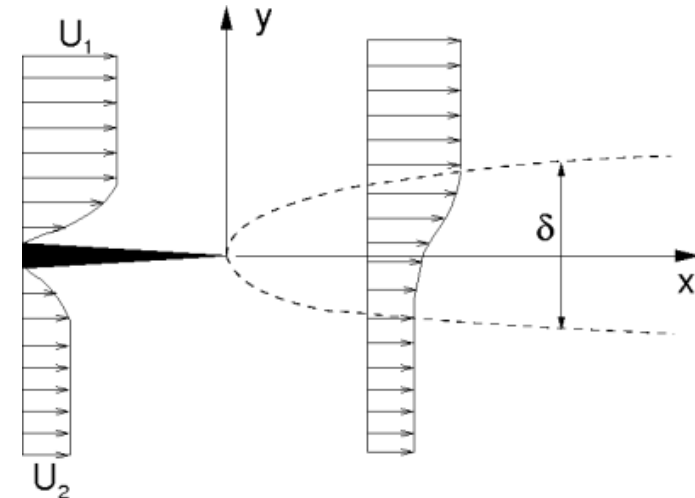


# Слой смешения

- В эксперименте начальный участок слоя смешения зависит от толщины и формы профиля скорости пограничных слоев

- Масштабы скорости

- $\Delta U = U_2 - U_1$
- $U_{0.5} = 0.5 \cdot (U_2 + U_1)$



- Линейный масштаб – толщина

- Процентная толщина слоя смешения

- ✓ Скорость на краях асимптотически стремится к скорости внешнего потока
- ✓ Расстояние между точками, в которых скорость отличается от скорости в соответствующем внешнем потоке на определенное количество процентов от разности скоростей внешних потоков – 1÷10%

- Интегральная толщина  $\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u - U_1)(U_2 - u)}{(U_2 - U_1)^2}$

- ✓ Толщина потери импульса
- ✓ Не зависит от произвольного выбора %

# Толщина слоя смешения

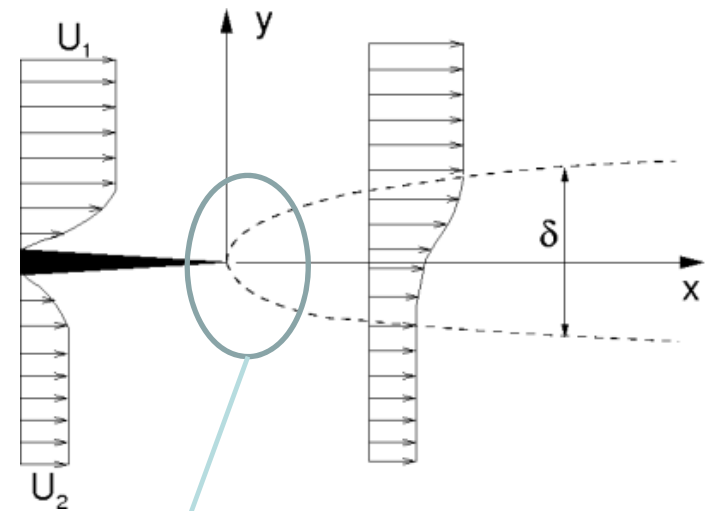
- Ламинарный слой смешения

- Параллельное течение

$$u = \frac{U_1 + U_2}{2} \left[ 1 + \frac{U_2 - U_1}{U_1 + U_2} \operatorname{th} \left( \frac{y}{2\Theta} \right) \right]$$

- Толщина растет  $\sim x^{1/2}$

- ✓ При бесконечно малой начальной толщине



- Развитый турбулентный слой смешения

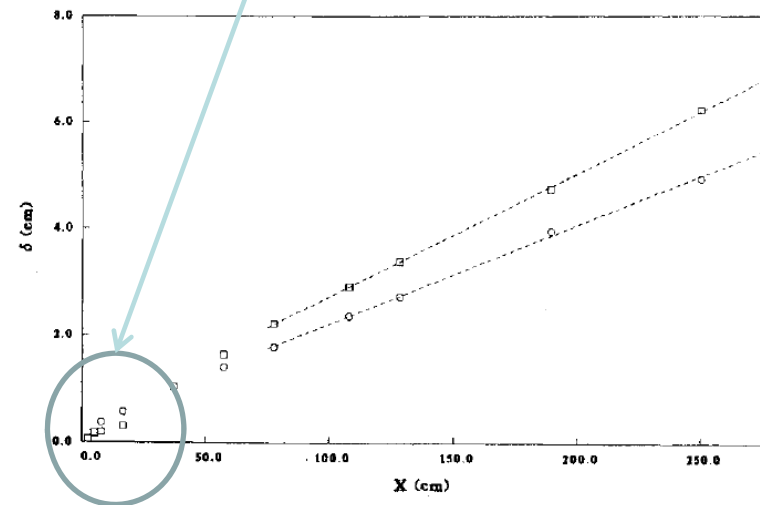
- Толщина растет линейно

- ✓ «Угол расширения» слоя смешения
- ✓ Коэффициент расширения (тангенс угла расширения)
  - Экспериментальное значение (для 10% ширины)  $C_\delta \approx 0.115$

- «Нулевая» линия тока отклоняется в сторону меньшей скорости

- В реальных экспериментах в начале имеется нелинейный участок

- Влияние пограничных слоев



# Автомодельность слоя смешения

- Эксперименты подтверждают автомодельность развитого турбулентного слоя смешения

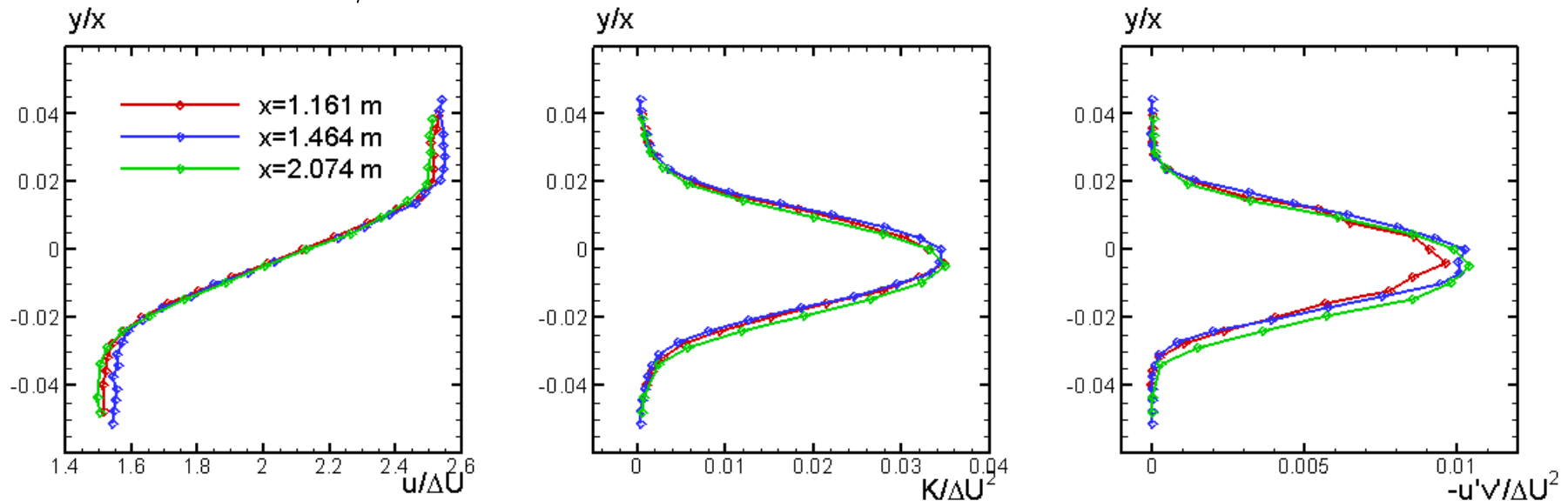
➤ Профиль скорости

✓ Может быть аппроксимирован

$$\frac{u - U_1}{U_2 - U_1} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{0.67}{ch(\xi)} \right) th(\xi) \right], \quad \xi = 0.25 \frac{y - y_{0.5}}{\Theta}, \quad u(y_{0.5}) = U_{0.5}$$

➤ Турбулентные характеристики

✓  $-\overline{u'v'}/K \approx 0.3$



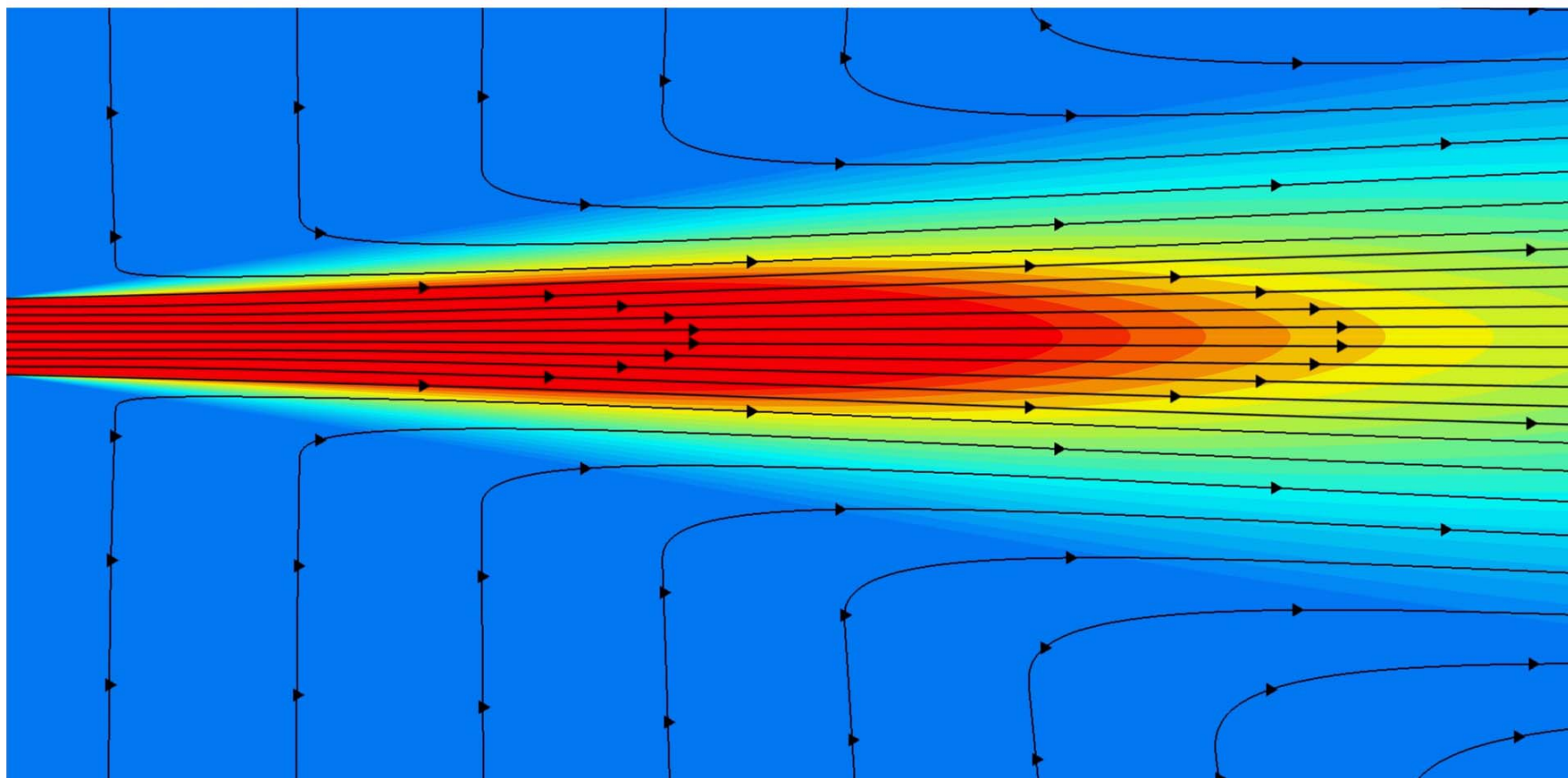
Экспериментальные профили скорости и турбулентных характеристик 16



# Затопленная струя

Струя, вытекающая в ту же самую среду

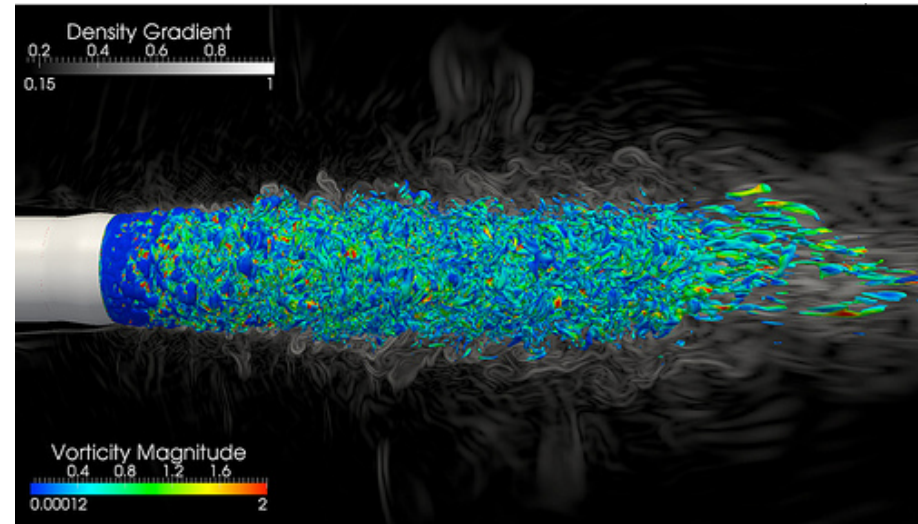
PLANE JET



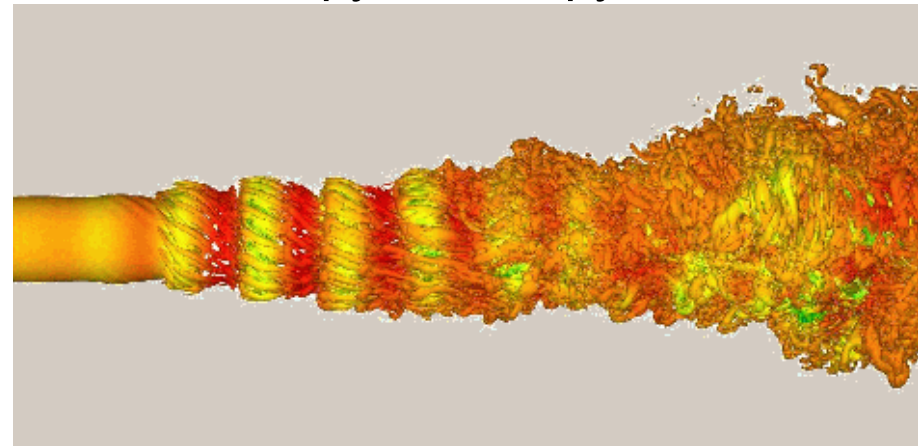
# Примеры затопленных струй



Плоская струя (из узкой щели)



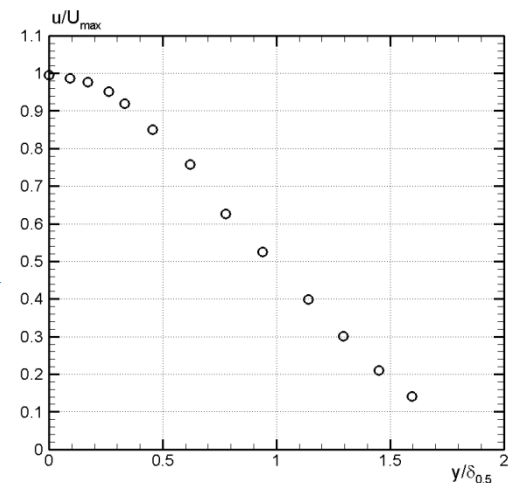
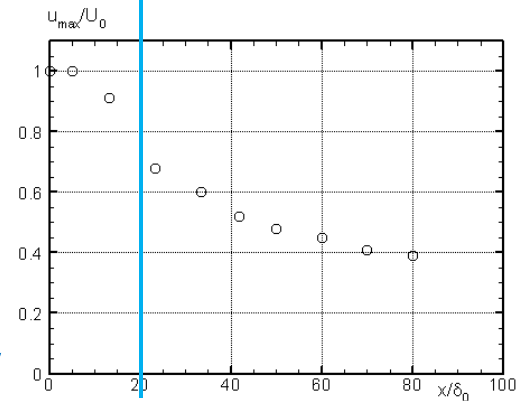
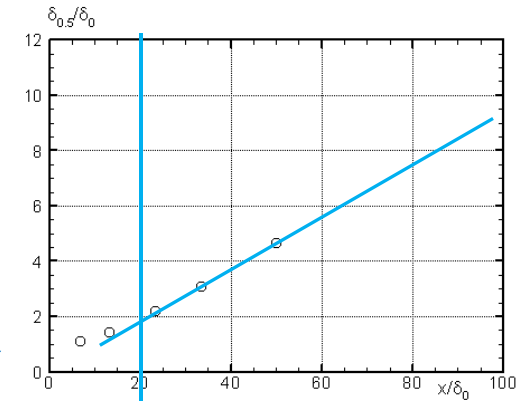
Круглая струя



Круглая закрученная струя

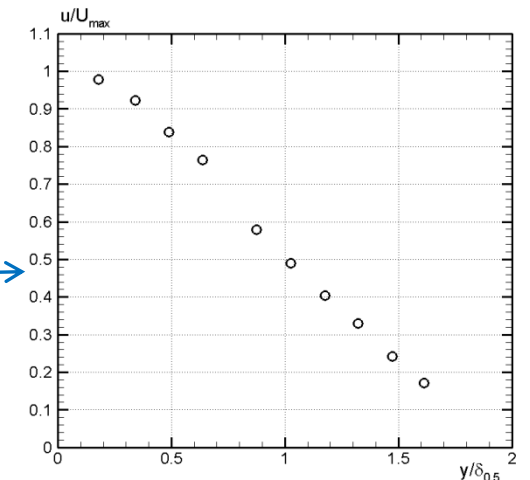
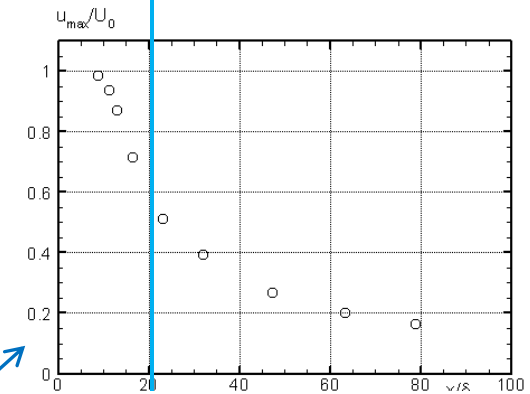
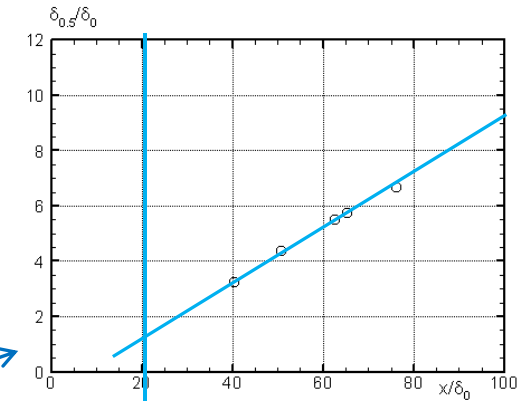
# Плоская струя

- Сохраняется импульс струи  $I = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot dy$
- Наиболее простой является задача о струе, вытекающей из точечного источника
  - Эта струя является автомодельной
  - Ширина струи  $\sim x$ 
    - ✓ «Угол расширения» струи (между осью  $x$  и точкой, в которой скорость равна половине скорости на оси струи -  $r_{0.5}$ )
    - ✓ Коэффициент расширения (тангенсу «угла расширения»)
 
$$C_\delta \approx 0.1 \div 0.11$$
  - Максимальная скорость убывает  $u_m \sim x^{-0.5}$



# Круглая струя

- Сохраняется импульс струи  $I = 2\pi\rho \int_0^{\infty} ru^2 \cdot dr$
- Наиболее простой является задача о струе, вытекающей из точечного источника
  - Эта струя является автомодельной
  - Ширина струи  $\sim x$ 
    - ✓ «Угол расширения» струи (между осью  $x$  и точкой, в которой скорость равна половине скорости на оси струи -  $r_{0.5}$ )
    - ✓ Коэффициент расширения (тангенсу «угла расширения»)
 
$$C_{\delta} \approx 0.086 \div 0.09$$
  - Максимальная скорость убывает  $u_m \sim x^{-1}$



- Профиль скорости

$$\frac{u}{u_m} = \left( 1 - \left( \frac{r}{2r_{0.5}} \right)^{1.5} \right)^2$$

# Эжекция

- Для струй характерно эжекционное потенциальное течение
  - Струя «втягивает» в себя жидкость или газ из окружающего пространства
    - ✓ Расход в струе возрастает



# Струя из сопла конечного размера

Можно выделять три участка

## 1. Начальный участок

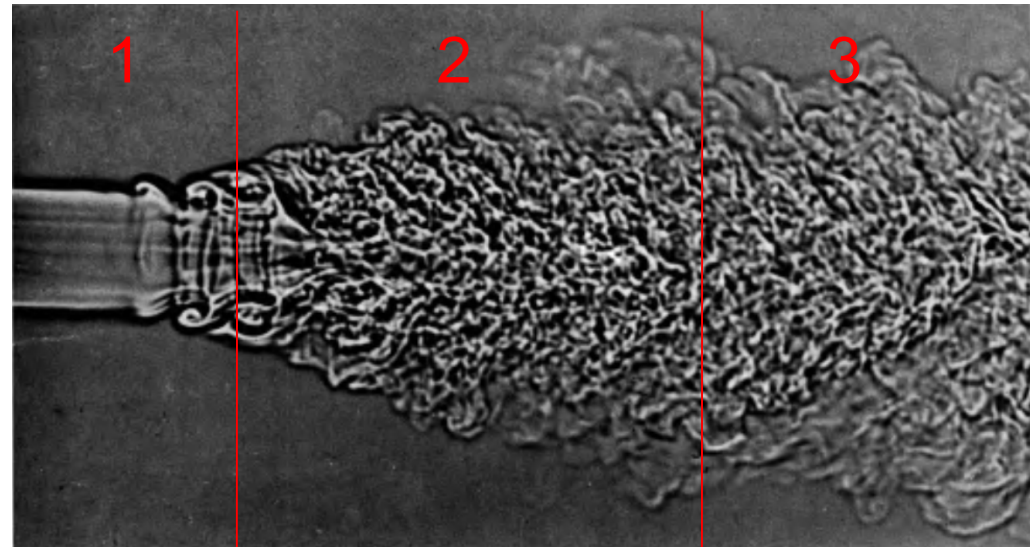
- Слои смешения развиваются независимо
- К концу начального участка слои смешения могут иметь разную структуру турбулентности
  - ✓ Зависит от числа Рейнольдса, диаметра сопла, особенностей течения в сопле, внешнего воздействия и т.д.
- В центре струи сохраняется ядро потока

## 2. Переходный участок

- Смыкание слоев смешения
- Разрушение когерентных структур слоев смешения
- Существенная турбулизация потока

## 3. Основной участок струи

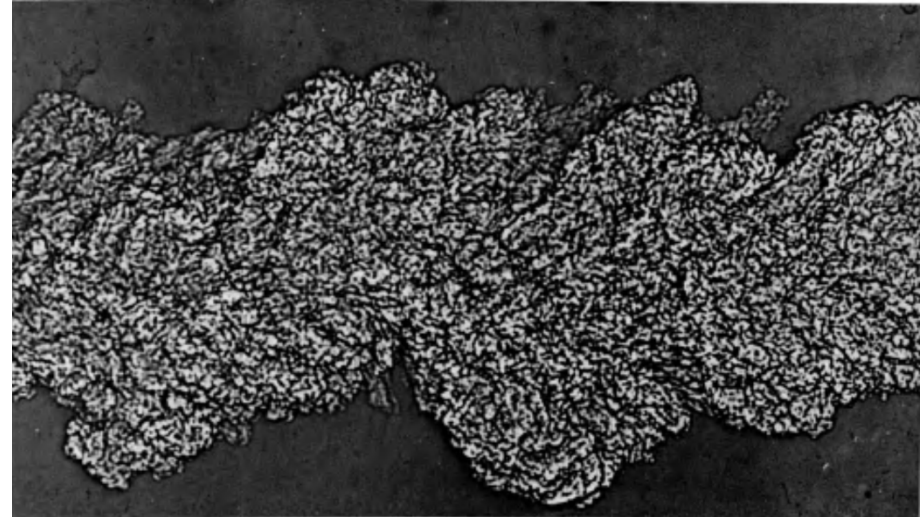
- С некоторого момента среднее течение - автомодельное
- Описывается теми же закономерностями, что и для струи из точечного источника



# Дальний след за телом

- Сильно зависит от начальных условий

- Структура когерентных вихрей определяется формой обтекаемого тела
- Является автомодельным на больших расстояниях от тела
  - ✓ 150-500 размеров тела
- На таких расстояниях след почти «теряется»
  - ✓ Осесимметричный дальний след не рассматривают
    - Дефект скорости падает быстрее, чем в плоском следе
- В автомодельном решении ширина следа пропорциональна корню расстояния до тела



- С практической точки зрения более интересен ближний след

- При большой длине тела в третьем направлении когерентные вихри образуют шахматную структуру
  - ✓ Системы вихрей типа roller, braid, rib

# Применение свободных сдвиговых течений

- Калибровка полуэмпирических моделей турбулентности
  - Когерентные структуры различных течений различаются
    - ✓ Невозможно хорошо описать все течения с одним набором констант

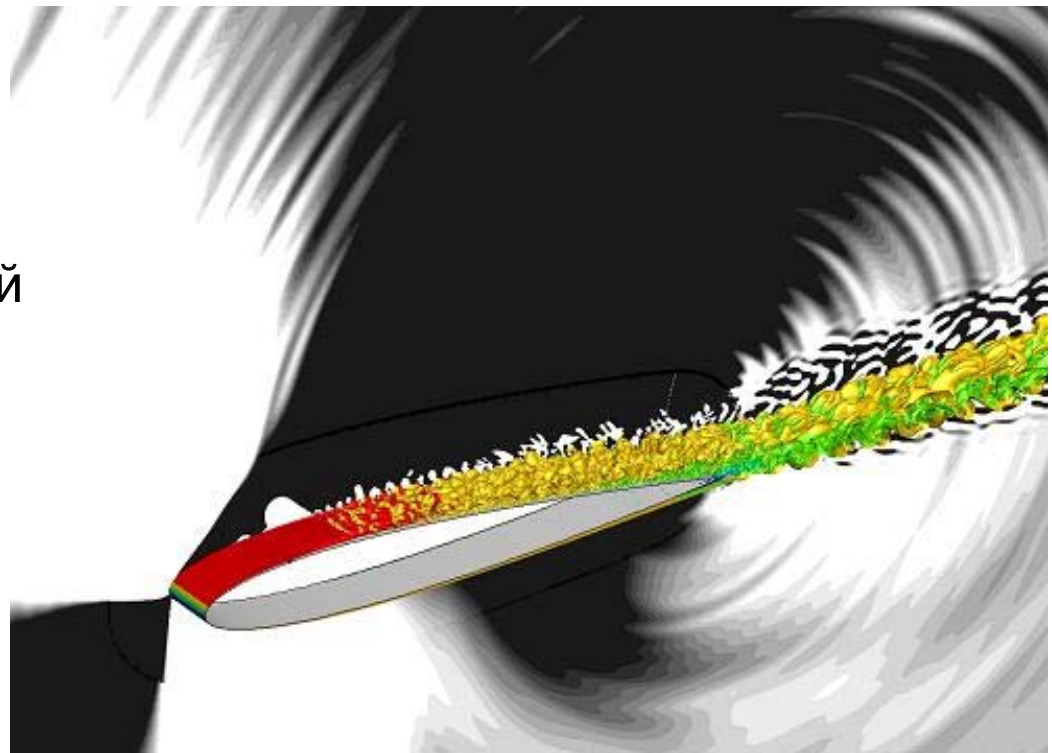


- Приходится «ориентировать» модель на определенный тип течений
  - Остальные течения предсказываются хуже
- Модель Спаларта-Аллмареса (SA)
  - Ориентирована на внешнюю аэродинамику
    - ✓ Слой смешения и дальний след
- Модель Секундова  $v_t$ -92
  - Ориентирована на расчет струйных течений
    - ✓ Плоская и осесимметричная струя
      - Поправка на осесимметричность



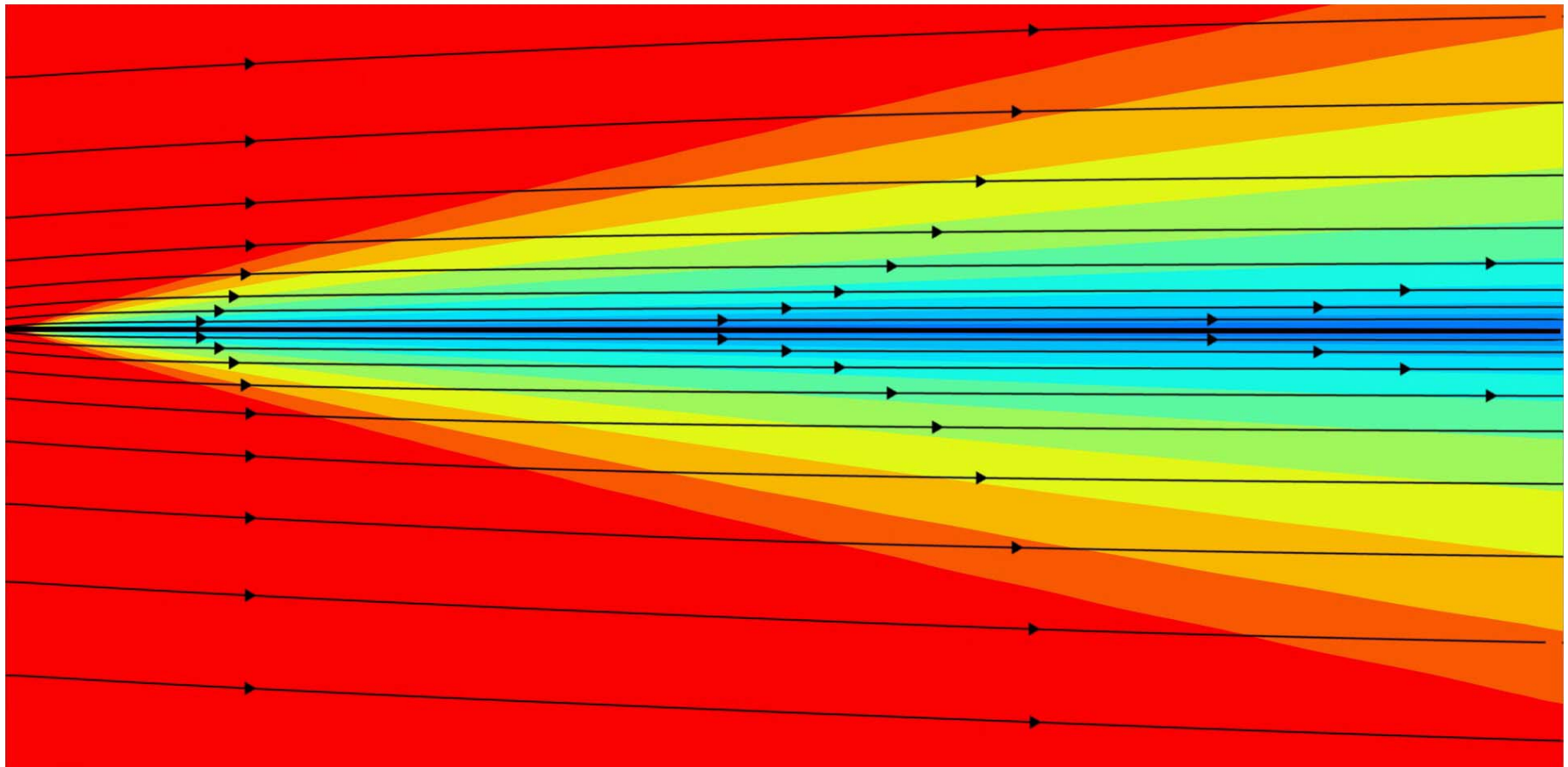
# Пограничный слой

- При обтекании поверхностей газодинамические параметры меняются от значений на стенке до значений во внешнем потоке
  - Это происходит в тонкой области, называемой пограничным слоем
- Пограничных слой
  - Вынужденная конвекция
  - Свободная конвекция
- В большинстве практических приложений пограничный слой является турбулентным
  - Внешняя аэродинамика
    - ✓ Крыло
    - ✓ Фюзеляж
  - Турбомашиностроение
    - ✓ Турбинные лопатки



# Пограничный слой

FLAT PLATE



**Что определяет характеристики  
пограничного слоя?**

## Внешний поток

- Внешний поток в значительной степени определяет характеристики пограничного слоя
- Внешний поток может быть неоднороден
  - Скорость во внешнем потоке меняется гораздо медленнее, чем в пограничном слое
- Скорость на внешней границе пограничного слоя  $U_e$ 
  - В сложных потоках трудно определима
- Продольный градиент давления
  - Обычно давление поперек пограничного слоя не меняется
    - ✓ Следует из уравнений пограничного слоя
  - Внешний поток является потенциальным
    - ✓ Справедливо уравнение Бернулли  $\frac{dp}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx}$
  - На практике для характеристики градиента давления используются различные безразмерные характеристики
    - ✓ Параметр равновесия Клаузера  $\beta = \frac{\delta^*}{\tau_w} \left| \frac{dp}{dx} \right|$

# Толщина пограничного слоя

- Асимптотический характер стремления всех характеристик в значениям во внешнем потоке
  - Процентная толщина пограничного слоя
    - ✓ Расстояние от стенки до точки, в которой скорость составляет заданное количество процентов скорости внешнего потока (от 0.1 до 5)
    - ✓  $\delta_{0.95}$ ,  $\delta_{0.99}$ ,  $\delta_{0.995}$
    - ✓ Трудно определима как в расчете так и в эксперименте
  - Интегральные толщины
    - ✓ Толщина вытеснения 
$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$
    - ✓ Толщина потери импульса 
$$\theta = \delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$
    - ✓ Безразмерный формпараметр 
$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$
- Толщину ПС трудно определить при расчете течений сложной геометрии
  - Внешний поток неоднороден
  - Линии сетки не идут поперек пограничного слоя
- В турбулентном пограничном слое на плоской пластине растет почти линейно

# Трение на стенке

- Напряжение трения на стенке  $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_w$ 
  - Поток импульса от жидкости (газа) к поверхности
  - Интеграл по поверхности – сопротивление трения  $\vec{F} = \int_S \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \Big|_w dS$
- Коэффициент трения  $C_F = \frac{\tau_w}{0.5 \rho U_{SC}^2}$ 
  - Масштаб скорости может определяться по разному
    - ✓ Скорость на внешней границе ПС в данном сечении  $U_{SC} = U_e$
    - ✓ Масштаб скорости внешнего потока  $U_{SC} = U_0$
- Динамическая скорость  $u_\tau \equiv v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ 
  - Характерный скоростной масштаб для пристенной области ПС
  - Динамический линейный масштаб  $l^* = \frac{\nu}{v^*}$ 
    - ✓ Соответствует минимальному размеру вихрей в пограничном слое
    - ✓ Примерно равен Колмогоровскому диссипативному масштабу  $\eta_k$

# Число Рейнольдса

- Пограничный слой развивается вниз по потоку
  - Число Рейнольдса течения в целом
  - Число Рейнольдса в конкретном сечении
    - ✓ Может быть построено по разным масштабам
      - Расстояние от начала пластины  $x$
      - Толщина пограничного слоя
    - ✓ Обычно используются  $Re_x = \frac{xU_e}{\nu}$  и  $Re_\theta = \frac{\theta U_e}{\nu}$
- Для турбулентного пограничного слоя без градиента давления существуют хорошие корреляции между числом Рейнольдса и коэффициентом трения
  - Karman-Schoenherr

$$Re_x = 2 \cdot Re_\theta \left( \frac{\log_{10}(2 \cdot Re_\theta)}{0.242} \right)^2$$
$$C_f = \frac{0.242(2 \cdot Re_\theta / Re_x)}{0.242 + 0.868 \sqrt{(2 \cdot Re_\theta / Re_x)}}$$

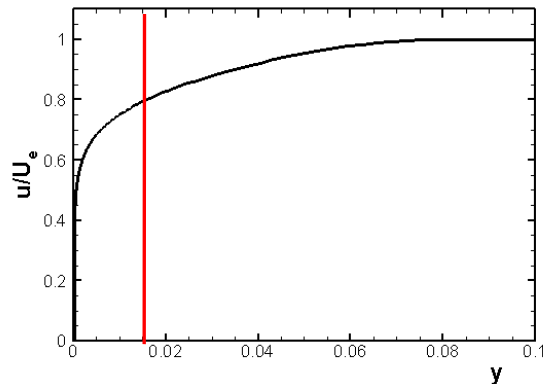
# Структура пограничного слоя

- Профиль скорости в турбулентном пограничном слое подчиняется определенным закономерностям, которые принято называть структурой пограничного слоя
  - Модели турбулентности специально настраиваются, чтобы ее воспроизводить
- Эти закономерности характерны для естественным образом развивающихся (статистически установившихся) пристенных течений
  - Они неверны для бесдвигового пограничного слоя или натекающей на стенку турбулентной струи
- Эти закономерности не абсолютны
  - Даже в простейших пристенных течениях (пограничный слой на плоской пластине и установившееся течение в канале) они выполняются приближенно
  - Дополнительные факторы (градиент давления, шероховатость, массообмен на стенке) в той или иной степени меняют эти закономерности

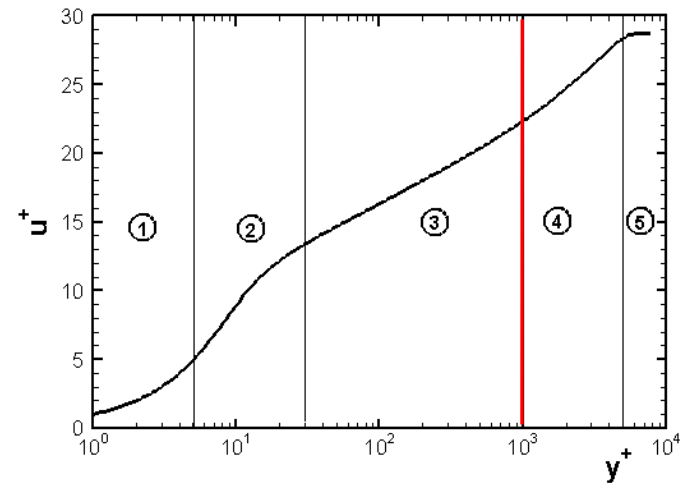


# Структура пограничного слоя

- Разные области пограничного слоя являются автомодельными в разных координатах
- С начала 20 века рассматривали двухслойные (трехслойные и т.д.) профили скорости в пограничном слое.
  - Прандтль, Карман, Тейлор
- К концу 1950-х годов окончательно сформировались представления о структуре профиля скорости
  - Пограничный слой принято делить на две области
    - ✓ Внутреннюю
    - ✓ Внешнюю



Профиль скорости  
турбулентного пограничного  
слоя в физических координатах



Профиль скорости турбулентного  
пограничного слоя  
в логарифмических координатах

# Внутренняя область пограничного слоя

- Составляет около 20% толщины пограничного слоя
  - Без градиента давления
- Содержит около 80% энергии турбулентных пульсаций
- Существенную роль играют диссипативные (вязкие) силы

➤ Масштаб скорости - динамическая скорость  $v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$

➤ Линейным масштабом является динамическая длина  $l^* = \frac{\nu}{v^*}$

➤ Переменные закона стенки  $y^+ = \frac{yv^*}{\nu}, u^+ = \frac{u}{v^*}$

## • Подобласти

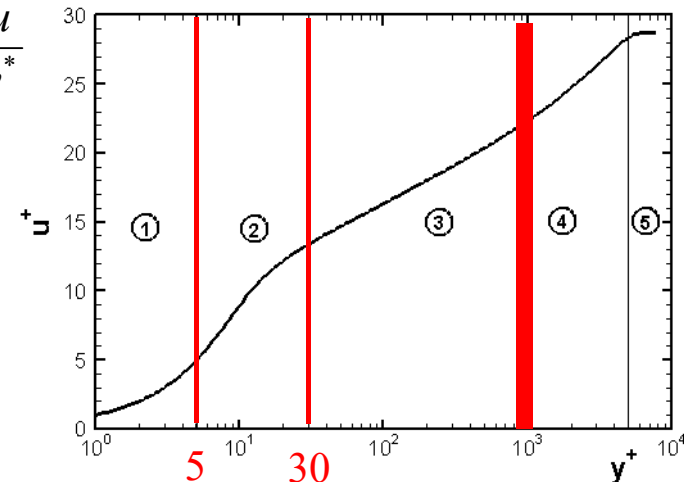
1. Вязкий подслой  $\nu \frac{\partial u}{\partial y} \gg -\overline{u'v'}$

$$u^+ = y^+$$

2. Переходная область  $\nu \frac{\partial u}{\partial y} \approx -\overline{u'v'}$

3. Логарифмическая область  $\nu \frac{\partial u}{\partial y} \ll -\overline{u'v'}$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+), \quad \kappa = 0.41, \quad B = 5.2, \quad E = 9.0$$

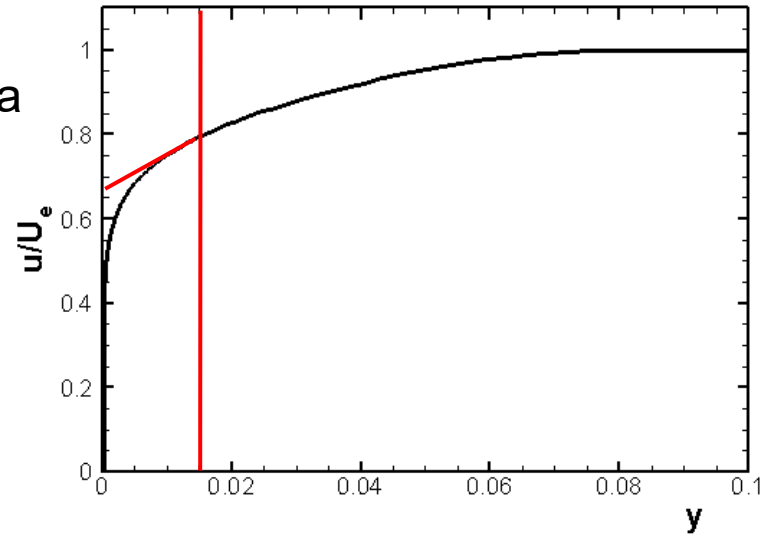
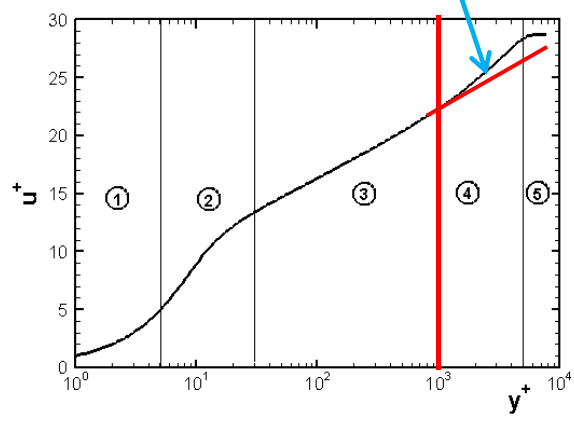


Профиль скорости в переменных закона стенки

# Внешняя область пограничного слоя

- Впервые была описана Клаузером
- Переменные закона следа  $\frac{y}{\delta} \quad \frac{U_e - u}{v^*}$ 
  - Профили скорости во внешней области являются подобными
    - ✓ Закон падения дефекта скорости (закон следа)
- Профиль во внешней области подобен профилю Блазиуса
  - При скорости на стенке  $\approx 0.65 U_e$
- Формула Коулза
  - Объединяет закон стенки и закон следа

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B + \frac{2\Pi}{\kappa} \left[ \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \right]^2, \quad \Pi = 0.4 \div 0.5$$



Профиль скорости турбулентного пограничного слоя в физических координатах

# Вихревые структуры внешней области

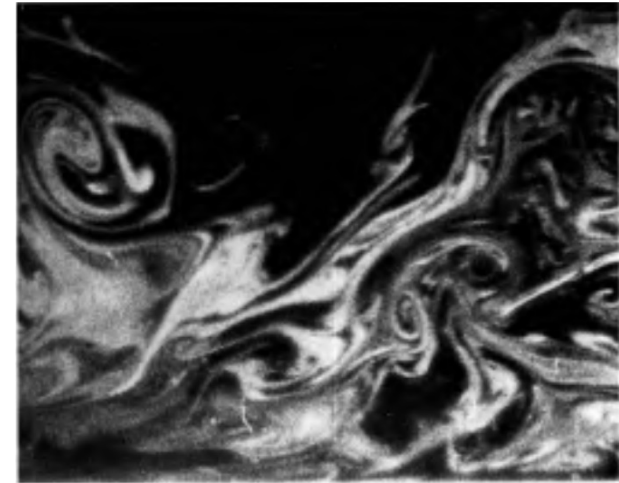
Область дефекта скорости

- Турбулентные структуры порядка толщины пограничного слоя
- Внесенное возмущение сохраняется на протяжении десятков толщин
  - Эффект «долгой» памяти

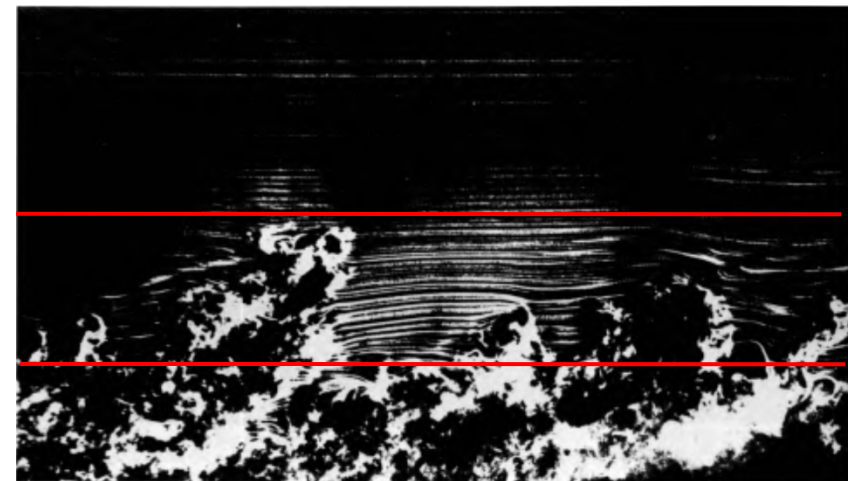
Область перемежаемости

- На фоне почти однородного бессдвигового течения двигаются крупные когерентные структуры
  - Между ними участки ламинарного течения
  - ✓ Перемежаемость
- Клебанов (1956) предложил эмпирическую корреляционную зависимость для коэффициента перемежаемости

$$\gamma = \left(1 + 5.5(y/\delta_{0.95})^6\right)^{-1}$$



Типичные вихри в пограничном слое



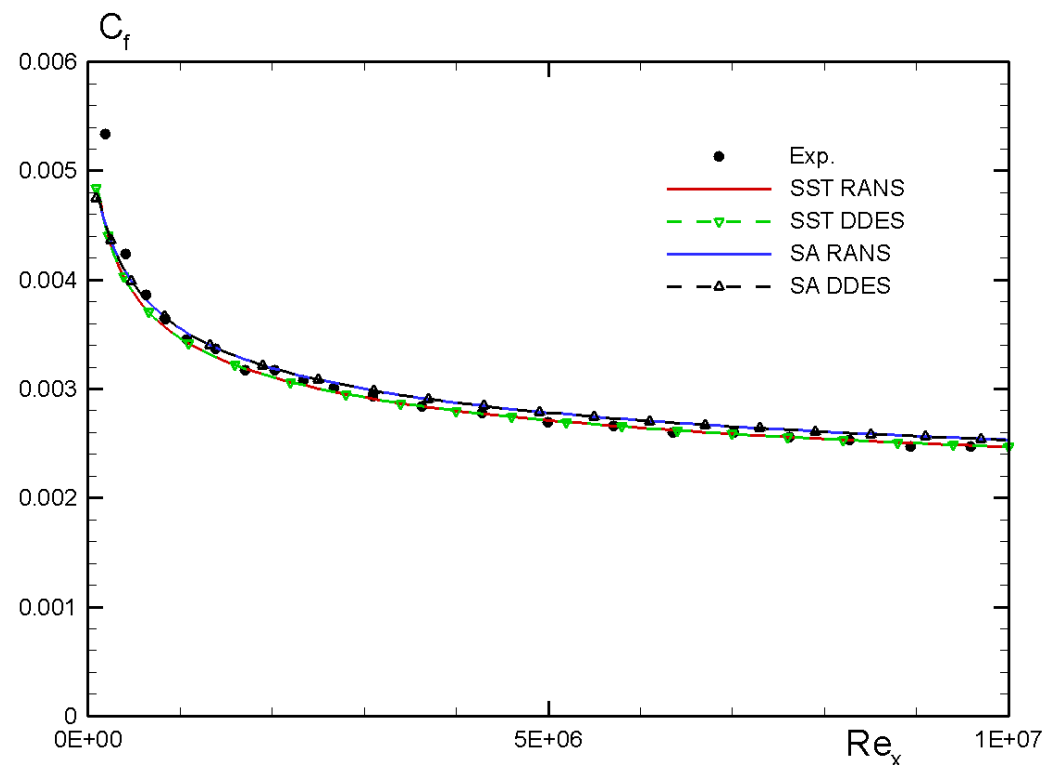
Когерентные структуры

# Калибровка моделей турбулентности

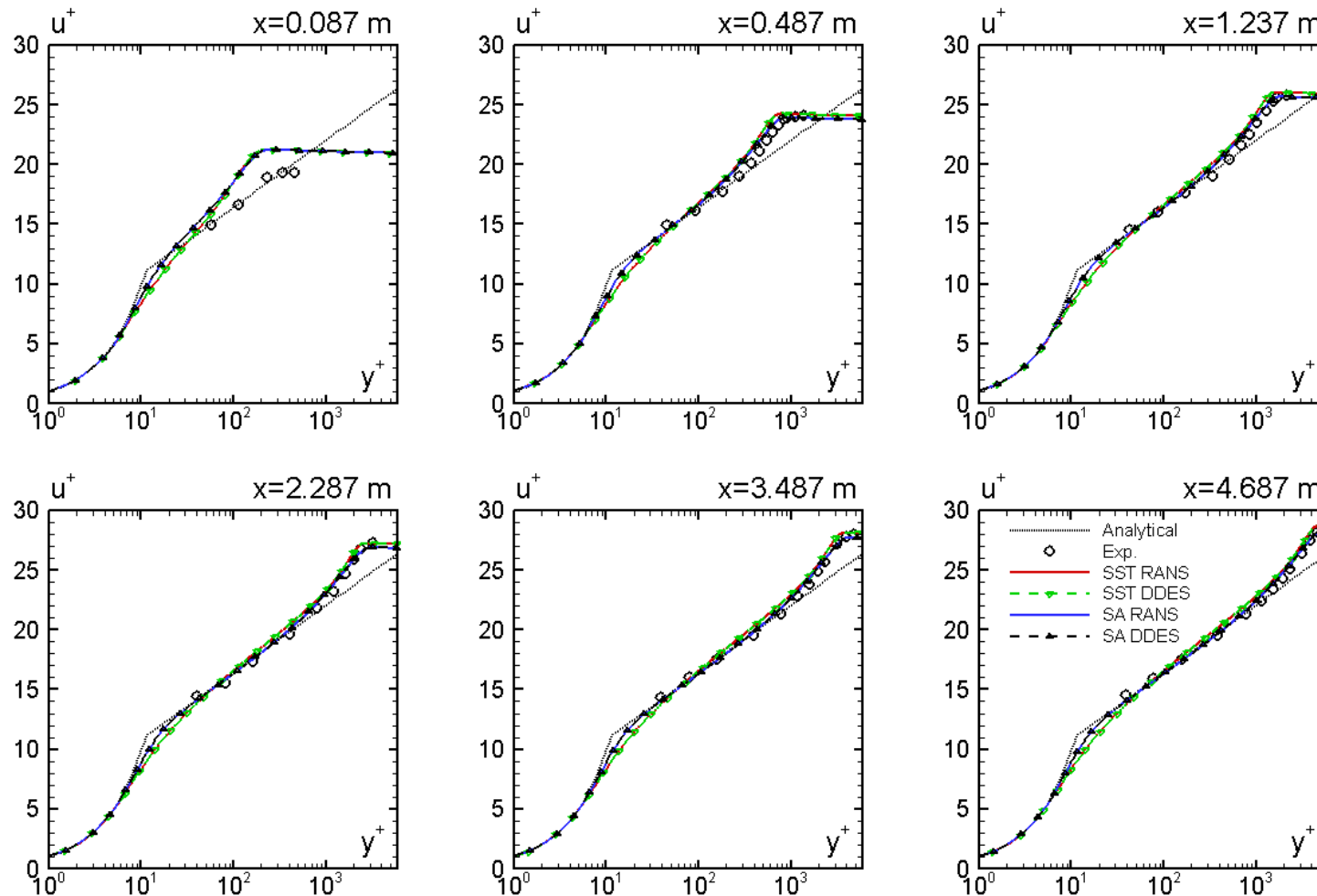
- Турбулентный пограничный слой традиционно используется для калибровки моделей турбулентности
  - Wiegardt, Tillmann (1951)
    - ✓ Данные доступны в Стэнфордской базе данных
  - DNS
    - ✓ Много данных до  $Re_{\theta}=4300$
- Условия эксперимента
  - Рабочий газ – воздух
    - ✓ Кинематическая вязкость  $\nu = 1.51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$
  - Длина пластины  $L = 5 \text{ м}$
  - Скорость набегающего потока  $U_0 = 33 \text{ м/с}$ 
    - ✓ Число Рейнольдса  $Re_L = L \cdot U_0 / \nu = 10^7$
  - Степень турбулентности набегающего потока  $Tu < 0.25\%$
- Наиболее интересные характеристики
  - Коэффициент трения
  - Профили скорости в переменных закона стенки
  - Профили напряжений Рейнольдса

# Полуэмпирические модели турбулентности

- При малых числах  $Re$  модели занижают трение
  - Не полностью развитое турбулентное течение
- При  $Re_\theta=10^4$  коэффициент трения  $C_f=2.62 \cdot 10^{-3}$ 
  - Модель SA:  $C_f=2.61 \cdot 10^{-3}$
  - Модель SST:  $C_f=2.54 \cdot 10^{-3}$



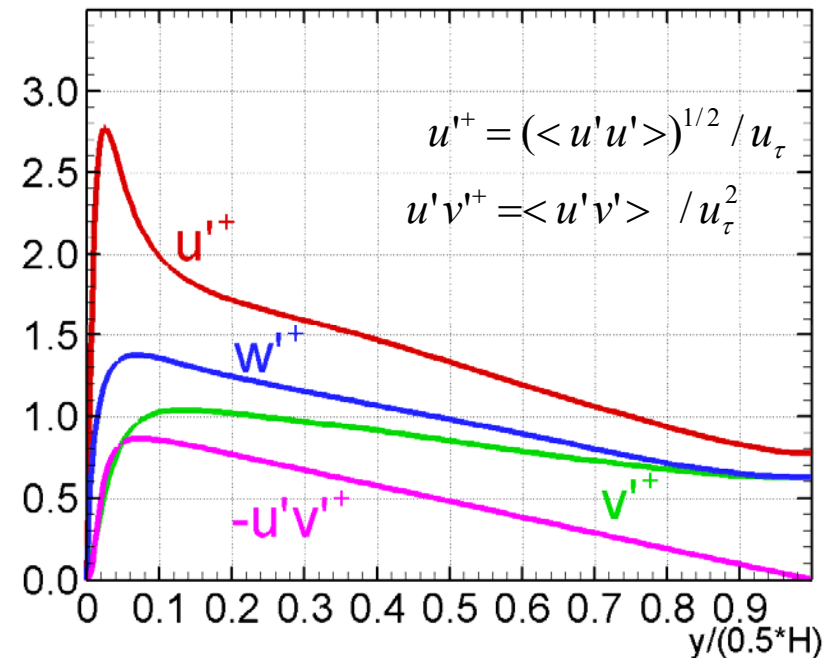
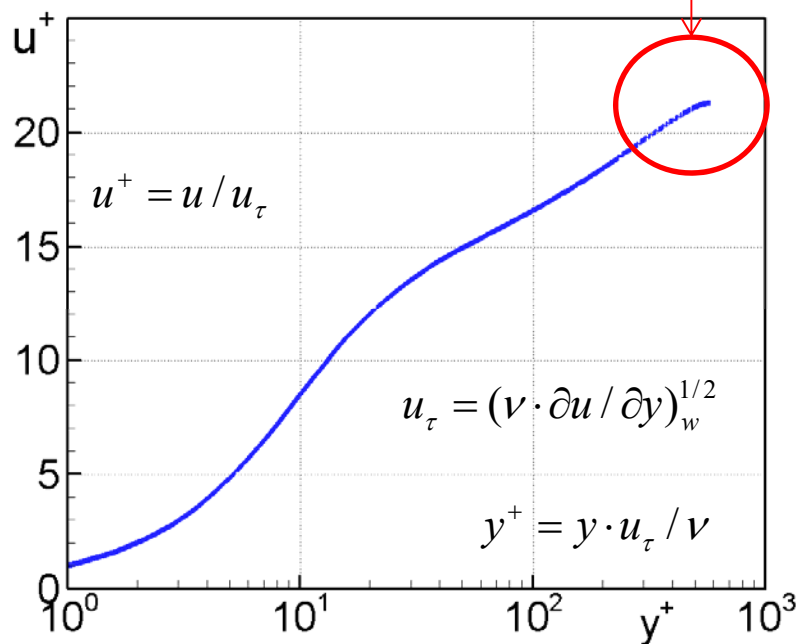
# Полуэмпирические модели турбулентности



Профили скорости в различных сечениях пограничного слоя

# Установившееся течение в плоском канале и круглой трубе

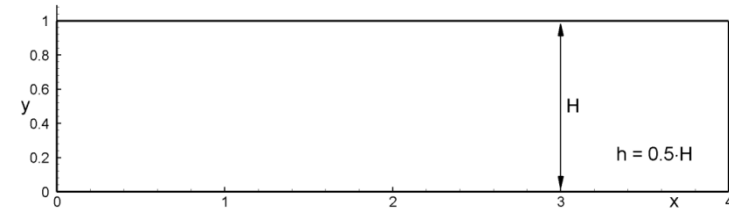
- Структура течения аналогична пограничному слою
  - Толщина слоя ограничена поперечным размером канала (трубы)
- Профиль скорости удовлетворяет закону стенки
  - Отсутствует внешняя область пограничного слоя



Типичные профили скорости и турбулентных напряжений  
в переменных закона стенки



# Основные закономерности



- Характерные масштабы
  - Линейный масштаб
    - ✓ Плоский канал – высота  $H$  или полувысота  $h=H/2$
    - ✓ Круглая труба – радиус  $R$  или диаметр  $D$
- Уравнения осредненного движения
  - В случае установившегося течения остается только зависимость продольной компоненты скорости от поперечной координаты
    - ✓ Профиль полных касательных напряжений – линейный
    - ✓ В ламинарном случае аналитическое решение
      - Парабола Пуазейля
  - Плоский канал

$$\frac{d\tau_{\Sigma}}{dy} = \frac{d}{dy} \left( \nu \frac{du}{dy} - \overline{u'v'} \right) = \frac{d}{dy} \left( (\nu + \nu_T) \frac{du}{dy} \right) = \frac{dp}{dx} = const \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_{\Sigma}}{\tau_w} = 1 - \frac{y}{h}$$

- Круглая труба

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{\Sigma})}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial r} - \overline{u'_z u'_r} \right] \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r(\nu + \nu_t) \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{dp}{dz} = const \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_{\Sigma}}{\tau_w} = \frac{r}{R}$$

# Основные закономерности

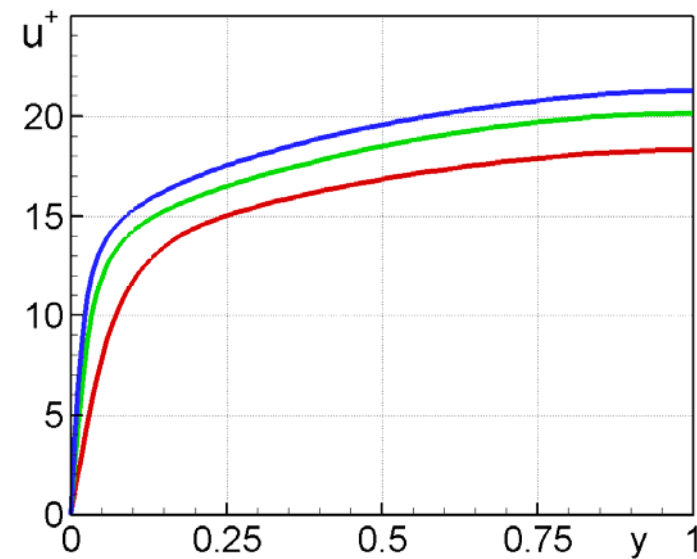
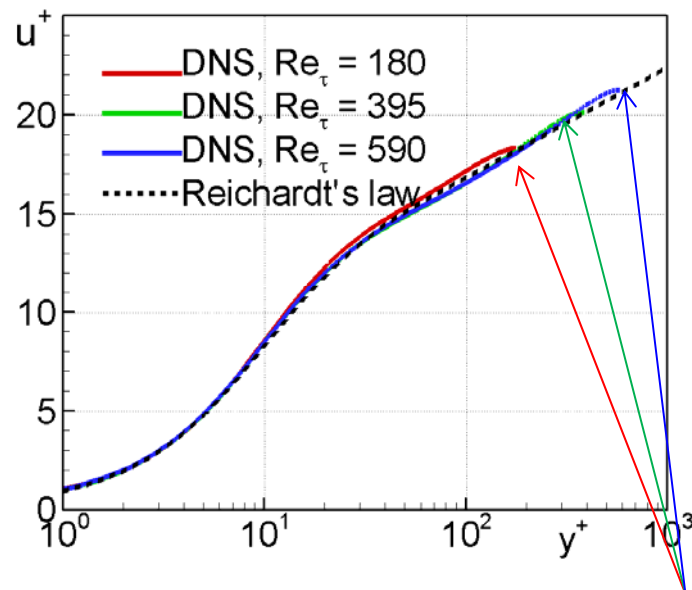
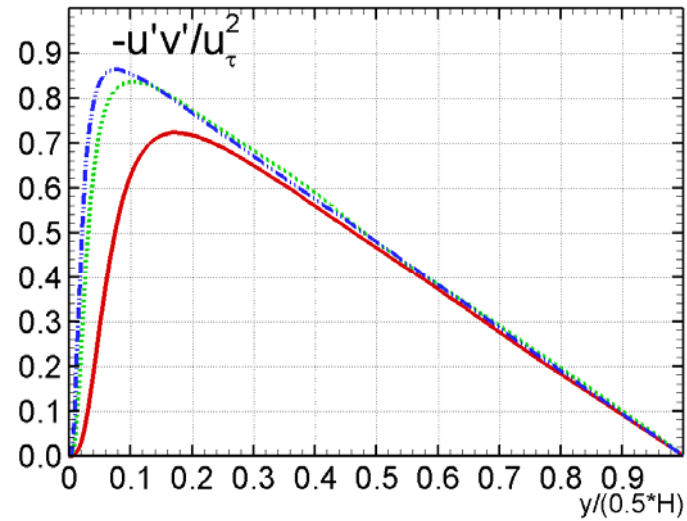
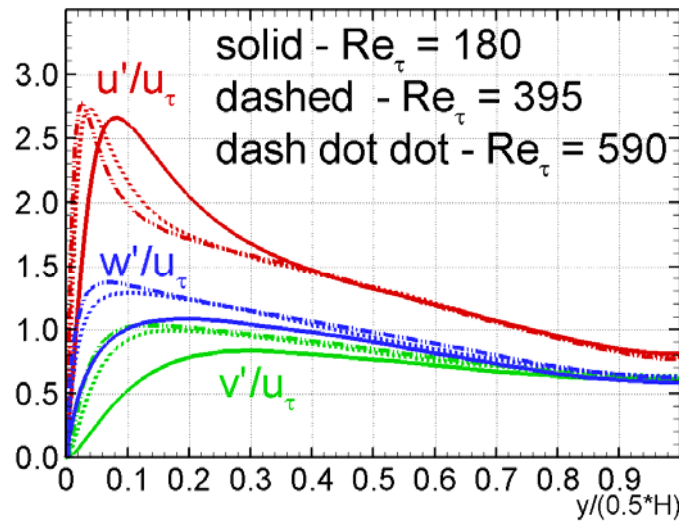
- Можно использовать различные скоростные масштабы
  - Максимальная по сечению скорость  $U_{max}$
  - Среднерасходная скорость  $U_{bulk}$
  - Динамическая скорость  $u_\tau$
- На практике используют разные числа Рейнольдса
  - $Re_\tau = u_\tau \cdot R / \nu$       или  $Re_\tau = u_\tau \cdot h / \nu$
  - $Re_D = U_{bulk} \cdot D / \nu$     или  $Re_H = U_{bulk} \cdot H / \nu$
  - Между ними существуют эмпирические корреляции
    - ✓ Плоский канал  $Re_H \approx 14.64 \cdot (Re_\tau)^{8/7}$
    - ✓ Круглая труба  $Re_D \approx Re_\tau \cdot (4.74 \cdot \log(Re_\tau) + 5.18)$
- В установившемся течении влияние градиента давления

компенсируется трением о стенки  $\int_V |\nabla p| = \int_S \tau_w$

- Плоский канал  $2\tau_w = H \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{u_\tau^2}{h} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$
- Круглая труба  $2\pi R \tau_w = \pi R^2 \frac{dp}{dz} \Rightarrow \frac{2u_\tau^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}$

Градиент давления определяет число Рейнольдса  $Re_\tau$

# Пример DNS (умеренные числа $Re$ )



Значение  $y^+$  в центре канала равно числу Рейнольдса  $Re_\tau$

# Резюме

- Канонические свободные и пристенные течения – важная составляющая более сложных течений
- Когерентные структуры в разных свободных сдвиговых течениях сильно отличаются
  - Поэтому очень трудно создать модель турбулентности, одинаково хорошо подходящую для всех течений
- Турбулентный пограничный слой имеет сложную структуру. Внутренняя область (вязкий подслой, переходная область, логарифмическая область) автомодельна в переменных закона стенки, а внешняя (область дефекта скорости, область перемежаемости) – в переменных закона следа
  - Почти все модели турбулентности «настроены» на решение пограничного слоя
- Установившееся течение в канале или круглой трубе – наиболее простой тест для моделей турбулентности, поскольку не зависит от начальных или граничных условий