Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Модели молекулярного и турбулентного переноса.
Полуэмпирические модели турбулентности»
(http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/RANS_models)

Лекция 5

Полуэмпирические модели турбулентности

Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2023

История развития моделей турбулентности

- До 1940 г. - введение основных понятий
  - Гипотеза Буссинеска (1877)
  - Осреднение по Рейнольдсу (1895)
  - Теория пути смешения Прандтля (1925)
  - Формула Кармана (1930)
  - Однородная изотропная турбулентность (Тейлор, 1935)

- 40е-50е гг. - создание математической базы и теоретических основ большинства моделей турбулентности.
  - Формула Колмогорова, первая модель k-ω (Колмогоров, 1942)
  - Первая модель Рейнольдсовых напряжений (Ротта, 1951)
  - Формула Клаузера (1956)
  - Демпфирующий множитель Ван-Дриста (1956)

История развития моделей турбулентности

- 60-е годы – наше время. Использование моделей турбулентности для замыкания уравнений Рейнольдса
  - 60-е. Бурное развитие моделирования турбулентности, появление моделей различных типов
  - 70-е. Появление k-ε моделей, связанные с ними большие надежды, появление огромного количества модификаций
  - 80-е. Кризис в развитии полуэмпирических моделей турбулентности
  - 90-е. Практичный подход к созданию моделей. Появление лучших современных моделей турбулентности
  - 2000-е. Смещение интереса в сторону вихреразрешающих (в первую очередь гибридных) методов

Кризис в развитии моделей турбулентности

- Предложены сотни полуэмпирических моделей турбулентности
  - ➢ Универсальная RANS модель так и не создана
    - ✓ Это означает наличие кризиса в полуэмпирической теории турбулентности
- Параметры многих турбулентных течений определяется относительно крупными (с размерами порядка макро-масштаба течения) устойчивыми когерентными вихревыми структурами, зависящими от конкретной геометрии течения и граничных условий
  - ➢ Эти структуры имеют мало общего с универсальными хаотичными вихрями, населяющими тонкие сдвиговые слои, для которых строятся и на которых калибруются полуэмпирические модели

Невозможно создать универсальную полуэмпирическую модель турбулентности

Классификация моделей турбулентности

- Модели, использующие гипотезу Буссинеска (линейные модели, EVM). Обычно классифицируются по количеству дифференциальных уравнений переноса
  - ➢ Алгебраические модели
  - ➢ Модели с одним уравнением
    - ✓ модель Спаларта-Аллмареса SA
    - ✓ модель Секундова ν_t-92
  - ➢ Модели с двумя уравнениями
    - ✓ Модели типа k-ε
    - ✓ Модели типа k-ω
      - – Модель Ментера SST
  - ➢ …..
    - ✓ Модель Дурбина
- Модели рейнольдсовых напряжений (нелинейные модели)
  - ➢ Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений (DRSM)
  - ➢ Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (ARSM)
  - ➢ Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM)
    - ✓ Нелинейные модели (NLM)

Гипотеза пути смешения Прандтля

Основана на аналогии молекулярного и турбулентного переноса

- В сдвиговом потоке молекулярное касательное напряжение $\tau_{xy} = \mu \frac{\partial U}{\partial y}$
  - ➢ Молекулярную вязкость можно выразить через термическую скорость v_m (примерно 4/3 скорости звука) и длину свободного пробега l_m
    $\mu = \frac{1}{2} \rho v_m \cdot l_m$
- Будем считать, что турбулентный перенос импульса осуществляется некими среднестатистическими турбулентными молями (или вихрями)
  - ➢ Характерная скорость v_{mix}
  - ➢ Характерный линейный размер l_{mix}
    - ✓ Турбулентный моль сохраняет свою индивидуальность
- По аналогии с молекулярной диффузией $\tau^t_{xy} = \mu_t \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2} \rho v_{mix} \cdot l_{mix} \frac{\partial U}{\partial y}$
  - ➢ Прандтль предположил, что $v_{mix} = C l_{mix} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$
  - ➢ Длина пути перемешивания не является детерминированной величиной
    - ✓ В него можно внести константы 0.5 и *C*
- Турбулентная вязкость определяется как $\mu_t = \rho \cdot l^2_{mix} \frac{\partial U}{\partial y}$
  - ➢ Формула Прандтля

Алгебраические модели турбулентности

- Не содержат дифференциальных уравнений переноса
- Базируются на модели Прандтля $\mu_t = \rho \cdot l_{mix}^2 \dfrac{\partial U}{\partial y}$
    - Необходимо определить масштаб турбулентности l_{mix}
- Попытка определить масштаб из соображений размерности оказалась неудачной
    - Формула Кармана $l_{mix} = -\kappa \dfrac{du/dy}{d^2u/dy^2} \Rightarrow \nu_T = -\kappa^2 \dfrac{(du/dy)^3}{(d^2u/dy^2)^2}$
- Необходимо использовать масштабы турбулентности, характерные для конкретной задачи
    - Свободные сдвиговые течения
        - ✓ Характерная локальная толщина поперек потока $\delta(x)$
        - ✓ $l_{mix} = \alpha\delta(x)$
    - Значение константы зависит от рассматриваемого течения

Течение	α
Дальний след	0.180
Слой смешения	0.071
Плоская струя	0.098
Круглая струя	0.080

Алгебраические модели для пристеных течений
(на примере модели Себеси-Смита)

- Опираются на двухслойную структуру пограничного слоя
  - Для внутренней и внешней областей используются разные формулы $\nu_T = \begin{cases} \nu_{Ti}, y \le y_m \\ \nu_{To}, y > y_m \end{cases}$
  - Граница областей y_m определяется равенством вязкостей $\nu_{Ti}(y_m) = \nu_{To}(y_m)$
- Во внутренней области используется формула Прандтля

  $$\nu_{Ti} = (\kappa y)^2 D\left|\partial u/\partial y\right|, \kappa = 0.41$$

  - Линейный масштаб $l_{mix}=\kappa y$
    - ✓ Обеспечивает выполнение логарифмического закона $u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + B$
  - Для учета вязкого подслоя используется демпфирующий множитель Ван-Дриста $D = \left(1 - \exp\left(-y^+/A\right)\right)^2, \quad A = 26$
- Во внешней области используется формула Клаузера (постоянная вязкость) $\nu_{To} = k\delta^* U_e \gamma, \quad k = 0.0168$
  - Коэффициент перемежаемости Клебанова $\gamma = \left(1 + 5.5\left(y/\delta_{0.95}\right)^6\right)^{-1}$
- Для учета влияния сжимаемости, градиента давления, массообмена через стенку, шероховатости и кривизны поверхности, малых чисел Рейнольдса и т.п. необходимо введение дополнительных поправок

Модель Болдуина-Ломакса

- Модель Себеси-Смита использует величины, трудно определимые даже в двумерном случае
  - $U_e, \delta^*, \delta_{0.95}, v^*$
- Этот недостаток был исправлен в модели Болдуина-Ломакса

$$\nu_T = \begin{cases} \nu_{Ti}, y \le y_m \\ \nu_{To}, y > y_m \end{cases}, \ \nu_{Ti}(y_m) = \nu_{To}(y_m)$$

$$\nu_{Ti} = (\kappa d_w)^2 D|\omega|, D = \left(1 - \exp\left(-d_w^+/A\right)\right)^2$$

$$\nu_{To} = kC_{CP}F_{WAKE}\gamma, \gamma = \left(1 + 5.5\left(C_{KLEB}d_w/Y_{MAX}\right)^6\right)^{-1}$$

  - Характерными линейным и скоростным масштабами внешней области являются величины F_{MAX}, Y_{MAX}
    - ✓ Определяются максимальным поперек слоя значением функции $F(y) = d_w|\omega|\left(1 - \exp\left(-d_w^+/A\right)\right)$
- Параметр $F_{WAKE} = Min\left(Y_{MAX}F_{MAX}, C_{WK}Y_{MAX}U_{DIF}^2/F_{MAX}\right)$ переключает версии модели
  - Пограничный слой
    - ✓ Модификация формулы Клаузера

$$F_{WAKE} = Y_{MAX}F_{MAX}$$

  - Свободное течение
    - ✓ Аналог формулы Прандтля

$$F_{WAKE} = C_{WK}Y_{MAX}U_{DIF}^2/F_{MAX}$$

$$\mu_t = \chi\rho\left[U_{\max}(x) - U_{\min}(x)\right]\delta(x) = \chi\rho U_{DIF}\delta(x)$$

- Константы модели $\kappa = 0.4, k = 0.0168, A = 26, C_{CP} = 26, C_{KLEB} = 0.3, C_{WK} = 0.25$
- В этой модели подразумевается направление течения
  - Применение в случае сложных течений затруднено

Дифференциальные модели турбулентности

- Алгебраические модели турбулентности
  - Основаны на закономерностях, характерных для тех или иных «канонических» течений (пограничный слой, струя, слой смешения)
  - Используют нелокальные характеристики, такие как толщина ПС, трение на стенке и т.п.
    - ✓ Очень неуниверсальны
  - Трудно имплементируемы в современные коды

⇩

Практически не используются в настоящее время

- Дифференциальные модели
  - Легко применимы к течениям в областях сложной геометрии
  - Нет необходимости использовать нелокальные переменные, характерные для пограничных слоев или других течений
  - Имеют «эффекты памяти» за счет решения уравнений переноса.

⇩

Дифференциальные модели турбулентности существенно более универсальны и технологичны, чем алгебраические

Модели с одним дифференциальным уравнением

Дифференциальное уравнение может быть записано относительно различных переменных

- Первые модели были основаны на уравнении для кинетической энергии турбулентности
  - ➢ Требует дополнительных алгебраических соотношений для замыкания
    - ✓ Диссипация (формула Колмогорова) $\varepsilon = C_d \frac{K_t^{3/2}}{L_t}$
    - ✓ Турбулентная вязкость $\nu_t = C_\mu \frac{K_t^2}{\varepsilon}$
    - ✓ Линейный масштаб турбулентности
  - ➢ Эти модели не более универсальны чем алгебраические модели
- Аналогичные проблемы характерны для моделей, основанных на других переменных
  - ➢ Турбулентное число Рейнольдса (модель Болдуина-Барса)
- Наиболее успешными являются модели, решающие уравнение относительно турбулентной вязкости
  - ➢ Модель Спаларта-Аллмареса
  - ➢ Модель Секундова ν_t-92

Модель Спаларта-Аллмареса

- Содержит одно дифференциальное уравнение относительно «высокорейнольдсовой» турбулентной вязкости, связанной с турбулентной вязкостью алгебраическим соотношением
  - В качестве линейного масштаба турбулентности использует расстояние до стенки
- Разрабатывалась для задач внешней аэродинамики, но оказалось, что ее область применимости гораздо шире
- Содержит ряд поправок, расширяющих ее область применимости
  - Поправка на кривизну и вращение
  - Поправка на шероховатость
  - Нелинейная версия модели

Модель Спаларта-Аллмареса является одной из наиболее широко используемых моделей турбулентности

Модель Секундова ν_t-92

- Содержит одно дифференциальное уравнение относительно турбулентной вязкости, но по принципу построения сильно отличается от модели Спаларта-Аллмареса
    - В качестве линейного масштаба турбулентности использует расстояние до стенки
- Превосходит другие модели при расчете струйных течений
- Содержит ряд поправок, расширяющих ее область применимости
    - Поправка осесимметричность
    - Поправка на сжимаемость
    - Поправка на шероховатость
- Проигрывает модели Спаларта-Алмареса с вычислительной точки зрения
    - Большой разностный шаблон
    - Более нелинейное уравнение

Модель Секундова используется гораздо реже модели Спаларта-Аллмареса

Модели с двумя дифференциальными уравнениями

- Для описания турбулентности необходимы два масштаба
  - Энергия турбулентности
  - Диссипация турбулентности

⇩

- Модели с одним дифференциальным уравнением требуют привлечения дополнительного масштаба
  - Например, расстояние до стенки
- Два уравнения дают два независимых масштаба турбулентности
  - Нет необходимости привлекать дополнительные соображения
    - ✓ Модель менее ориентирована на определенные типы течений
- Наиболее часто используются два типа моделей
  - k-ε
  - k-ω
- Модели более чем с двумя уравнениями используются очень редко
  - Нет необходимости в привлечении третьего масштаба

Модели типа k-ε

Различаются по способу описания влияния пристенных эффектов

- Высокорейнольдсовые модели
  - «Стандартная» модель
  - RNG модель
  - Для учета влияния стенок используются пристенные функции
    - ✓ Основаны на законе стенки
  - Достоинство: возможно использование более грубых сеток
  - Недостаток: предписанный закон стенки
- Низкорейнольдсовые модели
  - Launder-Sharma
  - Chien
  - Для учета влияния стенок в модель вводятся специальные демпфирующие функции
    - ✓ Аналог демпифирующей функции Ван-Дриста
  - Недостаток: получается жесткая система уравнений
- Модели типа k-ε
  - Достоинство: расчет свободных течений
  - Недостаток: неправильное предсказание точки отрыва

⇓

Модели типа k-ε постепенно вытесняются более совершенными моделями

Модели типа k-ω

- Вместо ε используется для удельная диссипация ω ($\varepsilon=C_\mu k\omega$)
- Комбинацию уравнений для k и ω предложил Колмогоров (1942)
- Модели типа k-ω активно продвигались с 70х годов усилиями Wilcox'а
  - Оказалось, что эти модели способны к расчету пристенной турбулентности без введения специальных функций
    - ✓ Это выгодно отличает их от k-ε моделей
  - Однако их характеризует чрезвычайно высокая чувствительность к граничным условиям во внешнем потоке. В зависимости от значения ω во внешнем потоке результат существенно меняется
    - ✓ Толщина плоских свободных сдвиговых течений в ~1.5 раза
    - ✓ Толщина осесимметричных свободных сдвиговых течений в ~5 раз
- Для преодоления чувствительности к граничным условиям в уравнении для ω должен присутствовать cross-diffusion term

$$\rho\frac{D\omega}{Dt}=\nabla\bullet\left((\mu+\sigma_\omega\mu_T)\nabla\omega\right)+\alpha\frac{\omega}{k}P_k-\rho\beta\omega^2+\sigma_d\frac{\rho}{\omega}(\nabla k)\bullet(\nabla\omega)$$

В настоящее время существуют десятки k-ω моделей, но наиболее успешной среди них является модель Ментера SST

Модель Ментера SST.

- Модели типа k-ε
  - ➢ Хорошо предсказывают свойства свободных сдвиговых течений
  - ➢ При расчете пристенных течений
    - ✓ Требуют специальных усилий
      - – Пристенные функции
      - – Низкорейнольдсовые поправки
    - ✓ Проблемы с положительным градиентом давления
- Модели типа k-ω
  - ➢ Обеспечивают правильное описание пристенной турбулентности
  - ➢ Чувствительны к граничным условиям во внешнем потоке

- Модель SST - гибридная модель
  - ➢ В пристенной области используется k-ω модель
  - ➢ Во внешнем потоке используется k-ε модель
  - ➢ Используется формула Брэдшоу в середине пограничного слоя

$$\overline{u'v'} = 0.31 \cdot k$$

В целом по качеству превосходит все другие модели турбулентности, но по вычислительной простоте и затратам уступает моделям с одним уравнением

Модели рейнольдсовых напряжений

- Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений (DRSM)
  - Для каждой из 6 независимых компонент тензора рейнольдсовых напряжений решается дифференциальное уравнение
  - Для замыкания этой системы необходимо добавить еще одно уравнение
    - ✓ для ε или ω

- Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (ARSM)
  - Алгебраические связи между рейнольдсовыми напряжениями и осредненными параметрами потока

  - Необходимо получить масштабы турбулентности
    - ✓ База модели: два дифференциальных уравнения (k-ε или k-ω)

- Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM)
  - Алгебраические связи разрешаются относительно рейнольдсовых напряжений.
    - ✓ Для связи между тензором рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций используются нелинейные соотношения
    - ✓ Эти модели часто называют нелинейными моделями (NLM)

Модели рейнольдсовых напряжений

- Потенциально превосходят модели турбулентной вязкости по способности расчета различных течений
- Полученное решение может быть неприемлемым с физической точки зрения. Это происходит, когда оно не удовлетворяет принципу реализуемости $\overline{u_i'^2} \ge 0, \overline{u_i'^2} \cdot \overline{u_j'^2} \ge \left(\overline{u_i'u_j'}\right)^2, \det\left\{\overline{u_i'u_j'}\right\} \ge 0$
- Проблемы вычислительного характера
  - ➢ Существенные вычислительные затраты и проблемы со сходимостью
  - ➢ Дифференциальные модели
    - ✓ Решение системы из 7 уравнений переноса
  - ➢ Алгебраические модели
    - ✓ Решение системы трансцендентных алгебраических уравнений
    - ✓ Невозможность гарантировать существование и единственность решения

Несмотря на потенциальные преимущества, модели Рейнольдсовых напряжений используются гораздо реже, чем модели турбулентной вязкости

Поправки к моделям турбулентности

- Все модели турбулентности являются полуэмпирическими
  - Они пригодны для расчета тех течений, на которые их настроили
- Если необходимо учитывать другие эффекты, в модели необходимо вводить соответствующие поправки
  - Эффекты кривизны линий тока и вращения потока
  - Эффекты сжимаемости
  - Нелинейные эффекты
  - Поправка на осесиметричность
  - Учет шероховатости стенок
- Каждая поправка состоит из критерия и поправочной функции
- Использование поправок имеет свои минусы
  - Поправки могут увеличивать выислительные затраты и ухудшать сходимость
  - Вне пределов области своего применения поправки могут приводить к негативным эффектам
    - ✓ Например: поправка на сжимаемость к моделям с двумя уравнениями

⇩

Применение поправок оправдано только в случае необходимости

Резюме

- Недостатки подхода, основанного на решении уравнений Рейнольдса, привели к созданию огромного количества моделей турбулентности
- Все существующие модели неуниверсальны
- Поскольку решение уравнений Рейнольдса – основной инструмент решения инженерных задач, идет постоянная работа по развитию моделей турбулентности
- Тестирование моделей – важная задача. Она помогает ответить на вопрос «какая модель оптимальна для решения конкретной задачи»
- Наиболее успешными современными моделями являются модели Спаларта-Аллмареса SA и Ментера SST