Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Модели молекулярного и турбулентного переноса.
Полуэмпирические модели турбулентности»
(http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/RANS_models)

Лекция 7

Модель Спаларта-Аллмареса (SA)

Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2023

Модель Спаларта-Аллмареса

- Содержит одно дифференциальное уравнение относительно «высокорейнольдсовой» турбулентной вязкости, связанной с турбулентной вязкостью алгебраическим соотношением
  - В качестве линейного масштаба турбулентности использует расстояние до стенки
- Разрабатывалась для задач внешней аэродинамики, но ее область применимости оказалась гораздо шире
  - Успех модели в значительной степени обусловлен практическим подходом при ее создании
- Содержит ряд поправок, расширяющих ее область применимости
  - Поправка на кривизну и вращение
  - Поправка на шероховатость
  - Нелинейная версия модели

Методика построения модели

- Модель должна подходить для широкого круга течений внешней аэродинамики
  - Модель должна быть дифференциальной
- Экономия вычислительных ресурсов имеет значение
  - Одно дифференциальное уравнение
- Для замыкания гипотезы Буссинеска необходима турбулентная вязкость
  - Уравнение переноса записывается относительно ν_t

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial t} + u_i \frac{\partial \nu_t}{\partial x_i} = P_{\nu_t} + D_{\nu_t} - \varepsilon_{\nu_t}$$

конвекция генерация диффузия диссипация

- Модель последовательно настраивается на различные канонические течения
  - Свободная турбулентность
  - Свободные сдвиговые течения
  - Пристенная турбулентность
- При необходимости можно добавить поправки, учитывающие влияние тех или иных факторов

Свободная турбулентность

- Отсутствуют твердые стенки
  - Будем считать, что диссипация турбулентной вязкости происходит только за счет влияния стенок
    - ✓ Остальную диссипацию учтем в генерационном члене
- В большинстве практических приложений число Рейнольдса высокое
  - Турбулентная диффузия существенно превышает молекулярную
    - ✓ Молекулярной диффузией можно пренебречь
- Уравнение переноса упрощается

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial t} + u_i \frac{\partial \nu_t}{\partial x_i} = P_{\nu_t} + D_{\nu_t}^{turb}$$

конвекция　　генерация　　турбулентная диффузия

Генерация

- Под генерацией понимаются все источники и стоки за исключением подавления турбулентности стенкой
- Можно показать, что генерация в свободных сдвиговых течениях пропорциональна $\partial U/\partial y$
  - ➢ Кроме этого она может зависеть только от турбулентной вязкости ν_t
    - ✓ Из соображений размерности $P_{\nu_t} \sim \nu_t \dfrac{\partial U}{\partial y}$
- Производная скорости должна быть заменена на тензорно инвариантную величину (S или Ω)
  - ➢ В задачах внешней аэродинамики в окрестности лобовой точки Ω предпочтительнее чем S (иначе завышается турбулентная вязкость)

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial t} + u_i \frac{\partial \nu_t}{\partial x_i} = C_{b1} \Omega \nu_t$$

- Калибровка константы
  - ➢ Вырождение однородной изотропной турбулентности ($\nu_t \sim t^{-0.2}$) не годится для калибровки константы т.к. S=0
    - ✓ Модель SA не предсказывает вырождения однородной турбулентности
  - ➢ Калибровка проводилась на задаче вырождения турбулентности в поле однородного сдвига
    - ✓ Эксперимент и DNS: C_{b1}= 0.1÷0.16
    - ✓ SA: C_{b1}= 0.13÷0.14

Турбулентная диффузия

- Обычно используют диффузионный оператор вида $D_A^{turb} = \nabla \bullet \left(\nu_t / \sigma \nabla A \right)$
  - ➢ Сохраняет интеграл A по пространству
    - ✓ Теорема Остроградского-Гаусса
- Турбулентная вязкость не является фундаментальной физической величиной
  - ➢ Для нее не обязаны выполняться законы сохранения
- В модели SA $D_{\nu_t} = \frac{1}{\sigma}\left(\left[\nabla \bullet \left(\nu_t \nabla \nu_t \right) \right] + C_{b2} \left[\left(\nabla \nu_t \right) \bullet \left(\nabla \nu_t \right) \right] \right)$
  - ➢ Сохраняется величина $\nu_t^{1+C_{b2}}$
- Калибровка констант - свободные сдвиговые течения
  - ➢ Поскольку модель ориентирована на задачи внешней аэродинамики, предпочтение было отдано слою смешения и дальнему следу
  - ➢ При расчете остальных течений существенная погрешность
    - ✓ Коэффициент расширения круглой струи завышен примерно в 2раза
- После калибровки модель приобретает вид

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial t} + u_i \frac{\partial \nu_t}{\partial x_i} = C_{b1} \Omega \nu_t + \boxed{\frac{1}{\sigma}\left(\left[\nabla \bullet \left(\nu_t \nabla \nu_t \right) \right] + C_{b2} \left[\left(\nabla \nu_t \right) \bullet \left(\nabla \nu_t \right) \right] \right)}$$

$$\sigma = {}^{2}\!/_{3}, C_{b1} = 0.1355, C_{b2} = 0.622$$

Логарифмический участок пограничного слоя

- Молекулярная диффузия мала по сравнению с турбулентной
- Появляется диссипативное слагаемое, которое отвечает за подавление турбулентности при приближении к стенке

$$\underbrace{\frac{\partial \nu_t}{\partial t} + u_i \frac{\partial \nu_t}{\partial x_i}}_{\text{конвекция}} = \underbrace{P_{\nu_t}}_{\text{генерация}} + \underbrace{D_{\nu_t}^{turb}}_{\text{турбулентная диффузия}} - \underbrace{\varepsilon_{\nu_t}}_{\text{диссипация}}$$

конвекция генерация турбулентная диффузия диссипация

  - Это слагаемое может зависеть только от расстояния до стенки d и турбулентной вязкости ν_t
    - Из соображений размерности $\varepsilon_{\nu_t} = C_{w1}(\nu_t/d)^2$

- На логарифмическом участке профиля скорости выполняются соотношения $S = v^*/(\kappa d), \quad \nu_t = v^* \kappa d$
  - Их подстановка в уравнение дает выражение для константы

$$C_{w1} = C_{b1}/\kappa^2 + (1 + C_{b2})/\sigma$$

    - Это настройка на заданный логарифмический профиль скорости

- С учетом диссипации модель приобретает вид

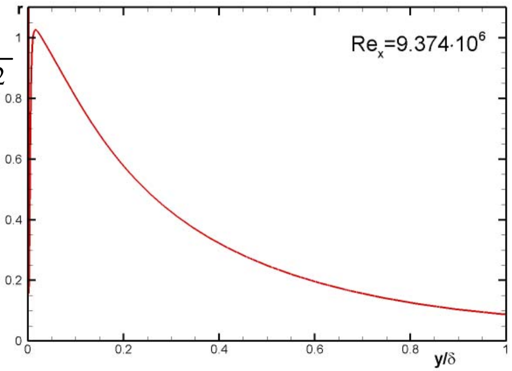
$$\frac{\partial \nu_t}{\partial t} + u_i \frac{\partial \nu_t}{\partial x_i} = C_{b1}\Omega \nu_t + \frac{1}{\sigma}\left([\nabla \bullet (\nu_t \nabla \nu_t)] + C_{b2}[(\nabla \nu_t)\bullet(\nabla \nu_t)]\right) \boxed{- C_{w1}(\nu_t/d)^2}$$

Внешняя область пограничного слоя

- Диссипативное слагаемое настроено на логарифмическую область пограничного слоя
  - ➢ Слишком медленно убывает во внешней области пограничного слоя
  - ➢ Для подавления диссипации во внешней области введена функция f_w

$$\varepsilon_{\nu_t} = -C_{w1} f_w \left(\nu_t / d\right)^2$$

- Для определения этой функции необходим «индикатор»
  - ➢ Должен «различать» логарифмический участок профиля скорости и внешнюю область.
  - ➢ В модели SA используется величина $r = \left(\dfrac{l}{l_{mix}}\right)^2 = \dfrac{\nu_t}{S\kappa^2 d^2}$
    - ✓ Отношение турбулентной вязкости и вязкости, посчитанной по модели Прандтля



- Функция $f_w = g\left(\dfrac{1+C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6}\right)^{1/6}, g = r + C_{w2}\left(r^6 - r\right)$
  - ➢ Равна 1 на логарифмическом участке профиля скорости
  - ➢ Около 0.5 во внешней области пограничного слоя
  - ➢ Равна 0 в свободных сдвиговых течениях.
- Калибровка констант проводилась в пограничном слое на плоской пластине

$$C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2$$

Вязкий подслой и переходная область

- В вязком подслое и переходной области необходимо дополнительное демпфирование турбулентной вязкости
  - Аналог демпфирующего множителя Ван-Дриста
- В дифференциальных моделях существует два способа введения этих функций
  - Ввести их в уравнения
    - ✓ Уравнения становятся более нелинейными
    - ✓ Ухудшается сходимость и устойчивость
  - Оставить уравнение для «высокорейнольдсовой» турбулентной вязкости $\tilde{\nu}$
    - ✓ Этот подход используется в модели SA
    - ✓ По значению $\tilde{\nu}$ пересчитывается турбулентная вязкость

$$\nu_t = f_{v1}\tilde{\nu},\ f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3},\ \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$$

    - ✓ Оказалось, что в вязком подслое и переходной области необходимо увеличить генерацию

$$\tilde{S} = \Omega + f_{v2}\frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2},\ f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1+\chi f_{v1}}$$

- Уравнение при этом записывается следующим образом

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + u_i\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} = \boxed{C_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu}} + \frac{1}{\sigma}\left(\left[\nabla \bullet \left(\left(\boxed{\nu} + \tilde{\nu}\right)\nabla \tilde{\nu}\right)\right] + C_{b2}\left[\left(\nabla \tilde{\nu}\right)\bullet\left(\nabla \tilde{\nu}\right)\right]\right) - C_w \boxed{f_w}\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2$$

Ламинарно-турбулентный переход

При моделировании перехода необходимо решить две задачи

- Определить место перехода
  - ➢ Переход принципиально не может быть описан в рамках полуэмпирической модели турбулентности
    - ✓ Переход определяется неустойчивостью ламинарного течения
  - ➢ Точка перехода должна быть получена из дополнительных соображений
    - ✓ Предписанный переход (экспериментальные данные, корреляции)
    - ✓ Интегральные модели (метод e^n)
    - ✓ Модели перехода
- Описать переход в рамках выбранной модели турбулентности
  - ➢ Уравнения модели обычно имеют два решения
    - ✓ Ламинарное решение
      - – Нулевая или очень низкая турбулентная вязкость
    - ✓ Турбулентное решение
  - ➢ Для осуществления перехода необходимо перейти с первой ветки на вторую в заданной точке
    - ✓ При этом трудно претендовать на описание характеристик течения в зоне перехода

Trip-term

- В модели SA в окрестности точки перехода вводится дополнительное генерационное слагаемое «trip-term»

$$f_{t1} = C_{t1} g_t \exp\left(-C_{t2} \frac{\omega_t^2}{\Delta U^2}\left(d_w^2 + g_t^2 d_t^2\right)\right)$$

$$g_t = \min\left(0.1, \frac{\Delta U}{\omega_t} \Delta l_t\right), \ \omega_t = \Omega_{W,trip}, \ d_t^2 = \left|\vec{r} - \vec{r}_{trip}\right|, \ \Delta U = \left|\vec{u} - \vec{u}_{trip}\right|$$

  - ✓ Нижний индекс “trip” относится к величинам в точке перехода
  - ✓ $\Delta l_t = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$ – диагональ ячейки сетки на обтекаемой поверхности в точке перехода
  - ✓ ΔU – модуль разности скоростей в рассматриваемой точке и в точке перехода
  - ➢ Не описывает физического процесса, а является вычислительным трюком
- Важно предотвратить спонтанный переход
  - ➢ Его местоположение зависит не от свойств течения, а от численной реализации (схема, сетка и т.д.)
  - ➢ В модели SA введена дополнительная функция для подавления генерации при низкой турбулентной вязкости $f_{t2} = C_{t3} \cdot \exp\left(-C_{t4}\chi^2\right)$
- Константы модели подбирались таким образом, чтобы в пограничном слое на плоской пластине зависимость $C_f(x)$ совпадала с экспериментальной $C_{t1} = 1, C_{t2} = 2, C_{t3} = 1.2, C_{t4} = 0.5$

Окончательная формулировка модели

$$\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial t}+u_i\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_i}=C_{b1}(1-f_{t2})\tilde{S}\tilde{\nu}+\frac{1}{\sigma}\left([\nabla\bullet((\nu+\tilde{\nu})\nabla\tilde{\nu})]+C_{b2}[(\nabla\tilde{\nu})\bullet(\nabla\tilde{\nu})]\right)-\left(C_{w1}f_w-\frac{C_{b1}}{\kappa^2}f_{t2}\right)\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2+f_{t1}\Delta U^2$$

$$\nu_t=f_{v1}\tilde{\nu},\ f_{v1}=\frac{\chi^3}{\chi^3+C_{v1}^3},\ \chi=\frac{\tilde{\nu}}{\nu}$$

$$\tilde{S}=\Omega+f_{v2}\frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2d^2},\ f_{v2}=1-\frac{\chi}{1+\chi f_{v1}}$$

$$f_w=g\left(\frac{1+C_{w3}^6}{g^6+C_{w3}^6}\right)^{1/6},\ g=r+C_{w2}(r^6-r),\ r=\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2d^2}$$

$$f_{t1}=C_{t1}g_t\exp\left(-C_{t2}\frac{\omega_t^2}{\Delta U^2}\left(d^2+g_t^2d_t^2\right)\right),\ f_{t2}=C_{t3}\cdot\exp\left(-C_{t4}\chi^2\right),$$

$$g_t=\min\left(0.1,\Delta U/\omega_t\cdot\Delta l_t\right),\ \omega_t=\Omega_{W,trip},$$

$$\Delta l_t=\sqrt{\Delta x^2+\Delta z^2}$$

$$d_t^2=(z-z_{trip})^2+(y-y_{trip})^2+(x-x_{trip})^2,\ \Delta U=|u-U_{trip}|.$$

$$\sigma=2/3,\ \kappa=0.41,\ C_{b1}=0.1355,\ C_{b2}=0.622,$$

$$C_{w1}=\frac{C_{b1}}{\kappa^2}+\frac{(1+C_{b2})}{\sigma},\ C_{w2}=0.3,\ C_{w3}=2,\ C_{v1}=7.1,$$

$$C_{t1}=1,\ C_{t2}=2,\ C_{t3}=1.2,\ C_{t4}=0.5.$$

Граничные условия

- На твердой стенке $\nu_T = \tilde{\nu} = 0$
- Внешний поток
  - Уровень турбулентности $Tu = \dfrac{\sqrt{k}}{U_e}$
    - ✓ Позволяет определить кинетическую энергию k
  - Обычно внешний поток бессдвиговый
    - ✓ Турбулентную вязкость определить невозможно

$$\cancel{\frac{\nu_T}{\nu} = Tu}$$

- Принято выделять две типичные ситуации
  - Ламинарный внешний поток
    - ✓ Задачи внешней аэродинамики
    - ✓ Задают заведомо низкий уровень турбулентной вязкости $\nu_T = 10^{-3}\nu$
  - Турбулентный внешний поток
    - ✓ Внутренние задачи
    - ✓ Задают высокий уровень турбулентной вязкости $\nu_T = [0.1 \div 10] \cdot \nu$
      - – Он должен быть достаточен для турбулизации пограничных слоев
    - ✓ Уровень зависит от используемого кода, сетки, числа Рейнольдса и т.п.

Поправка на кривизну линий тока и вращение

- Кривизна линий тока и вращение потока оказывают существенное влияние на характеристики турбулентности
  - Могут приводить как к ее существенной интенсификации, так и к подавлению турбулентности
  - Использующие гипотезу Буссинеска модели не описывают влияние кривизны линий тока и вращения
- Модель Спаларта-Аллмареса с поправкой на кривизну и вращение (SARC)
  - Критерии кривизны и вращения
    - ✓ $r^* = \left|\dfrac{S}{\Omega}\right|,$
    - ✓ $\tilde{r} = \dfrac{2\Omega_{ik} S_{jk} \left(DS/Dt\right)_{ij}}{D^4}, \quad D^2 = \dfrac{\left(S^2 + \Omega^2\right)}{2}$
  - Эмпирическая функция

$$f_{r1} = \frac{2r^*\left(1 + C_{r1}\right)}{1 + r^*}\left(1 - C_{r3} arctg\left(C_{r2}\tilde{r}\right)\right) - C_{r1} \qquad C_{r1} = 1, C_{r2} = 12, C_{r3} = 1.$$

  - Генерационный член SA модели надо умножить на f_{r1}

Установившееся течение во вращающемся канале

- Плоский канал вращается вокруг оси z
  - ➢ Кориолисова сила влияет на интенсивность турбулентности
    - ✓ На одной стене турбулентность усиливается, на другой уменьшается
- Исходная модель практически не “чувствует” влияния вращения
  - ➢ Приводит к большим ошибкам при расчете течений с кривизной линий тока
- Модель SARC хорошо описывает эффекты вращения

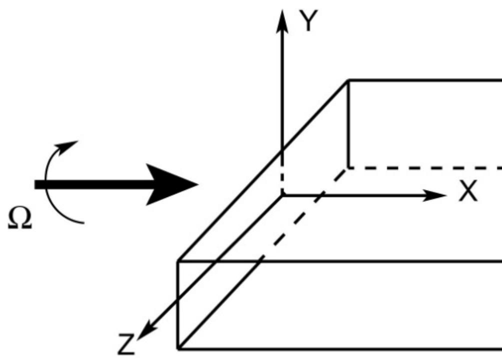
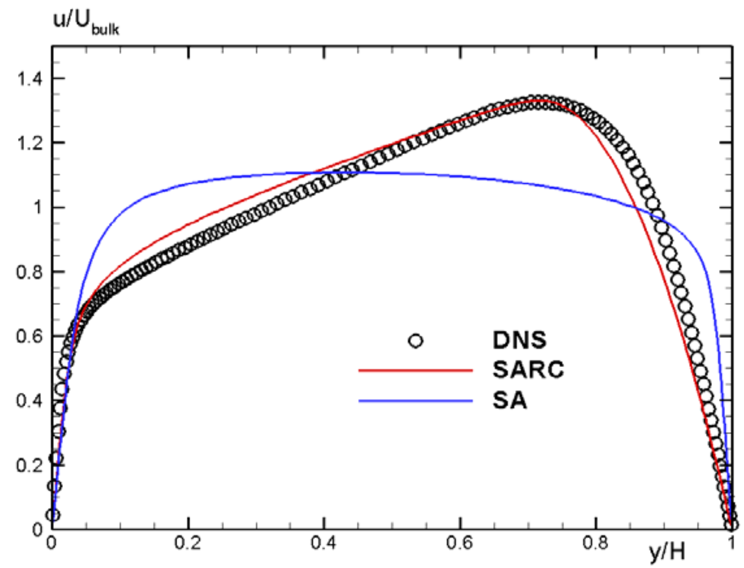


Схема течения



Профиль скорости во вращающемся канале

Течение в канале с поворотом на 180°

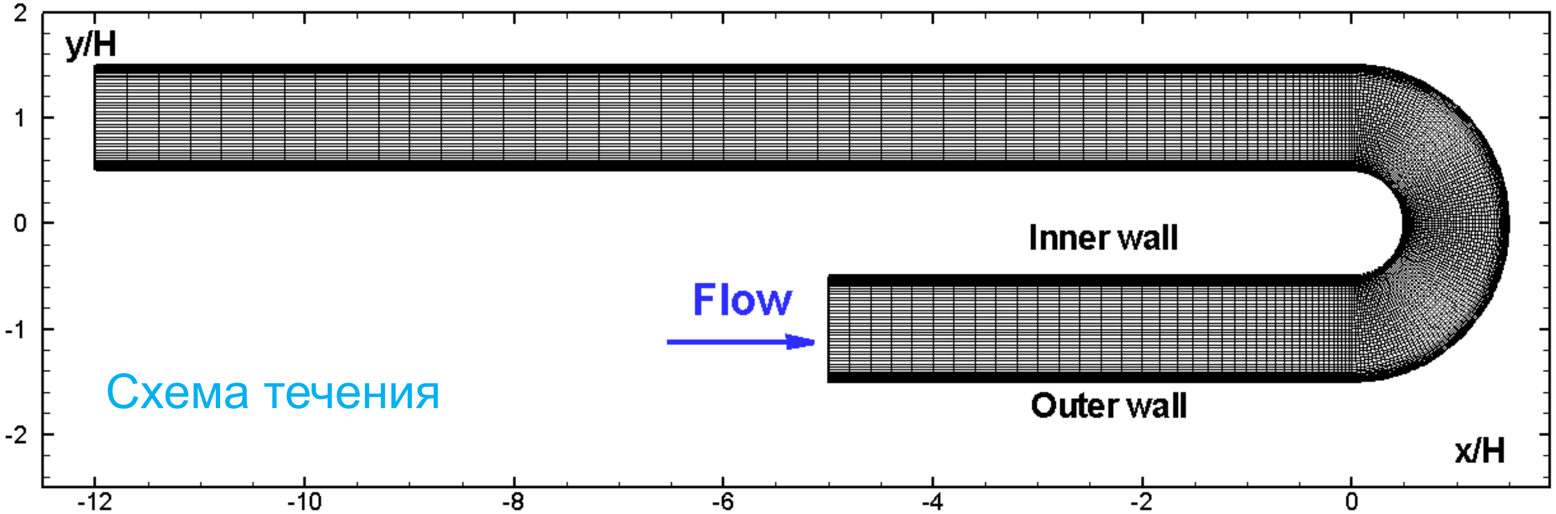
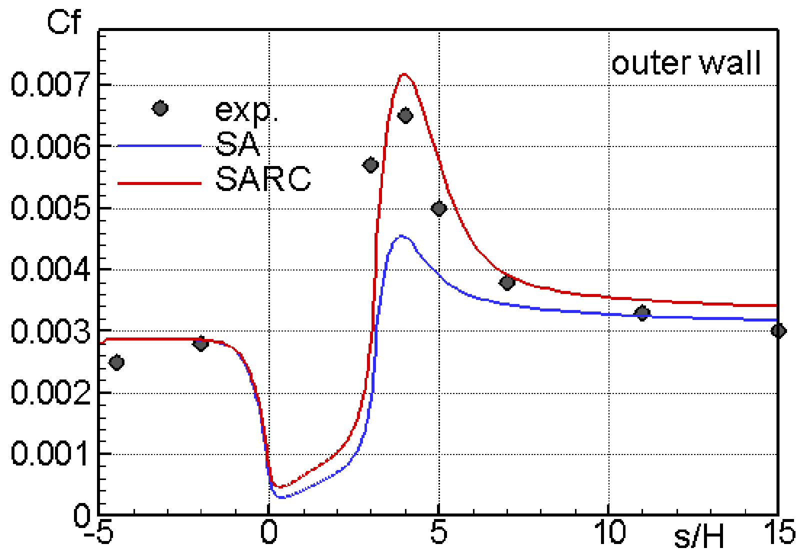


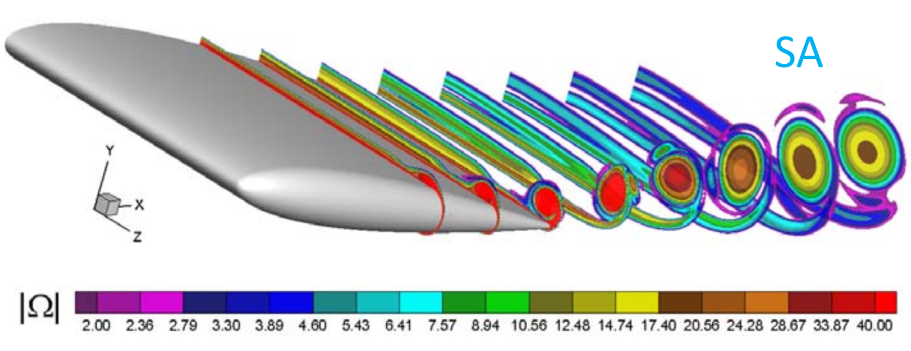
Схема течения

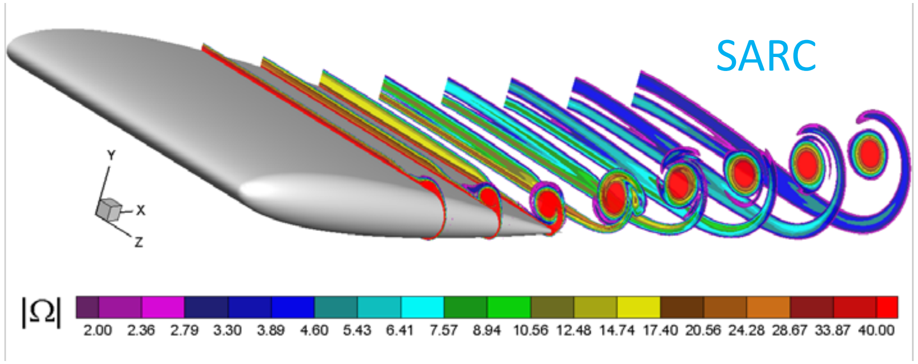


Трение на внешней стенке канала

- Модель SARC описывает трение на внешней стенке канала существенно лучше оригинальной модели

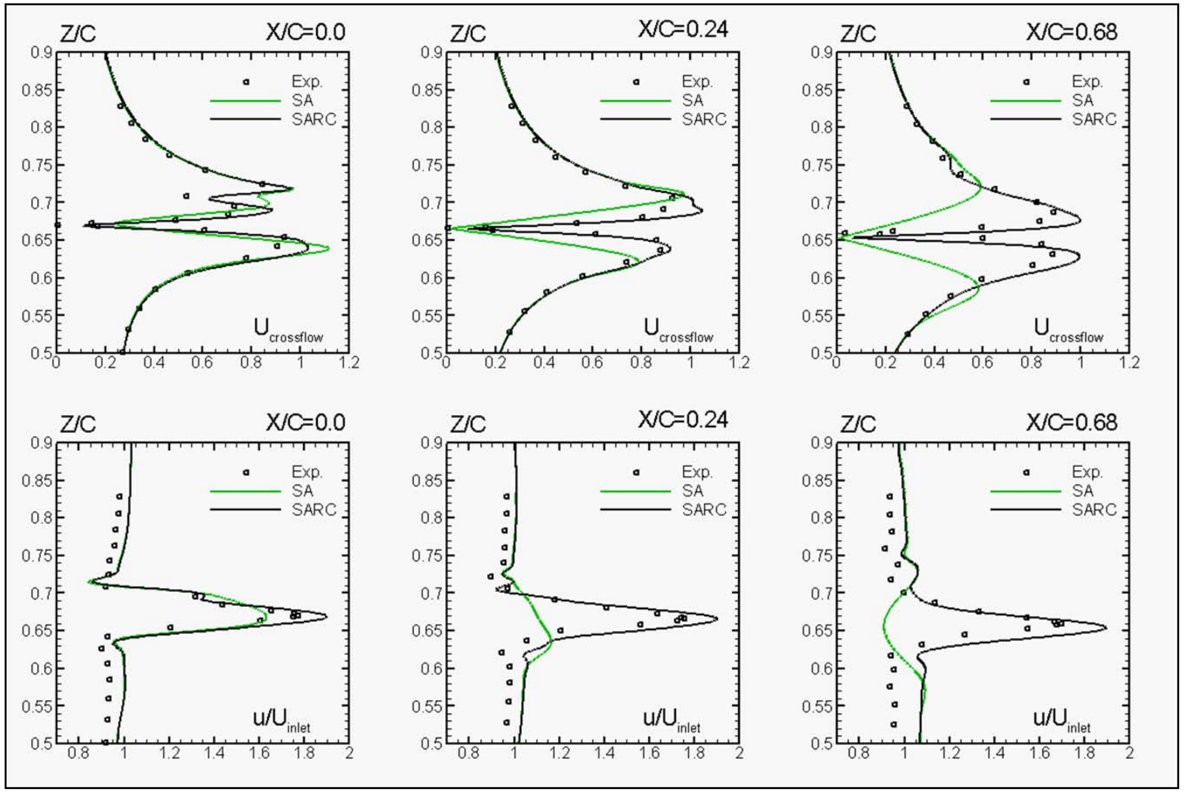
Обтекание крыла конечного размаха NACA0012 со скругленной боковой кромкой





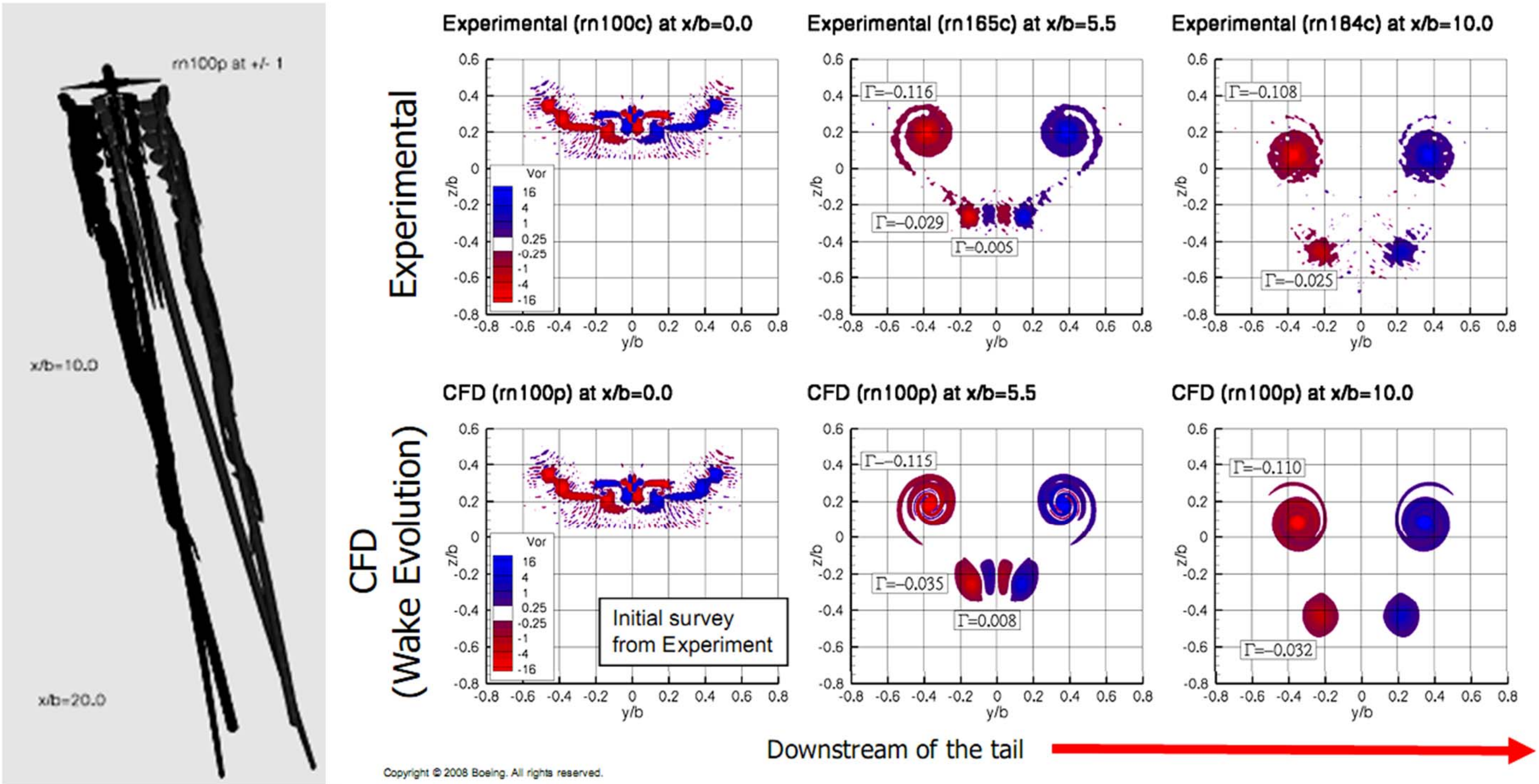
- Поправка подавляет турбулентную вязкость в вихре
  - ➢ Вихрь медленнее диссипирует

Поправка приводит к кардинальному улучшению решения



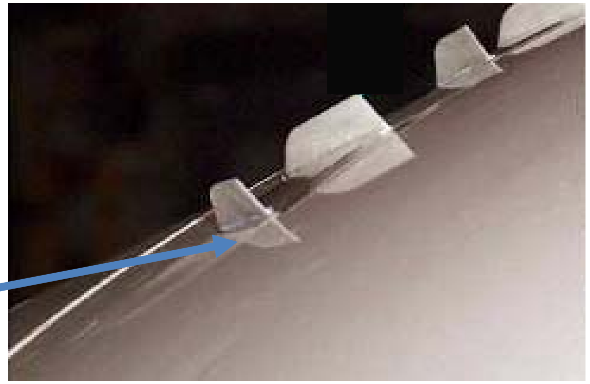
Вихревой след за самолетом с механизированным крылом

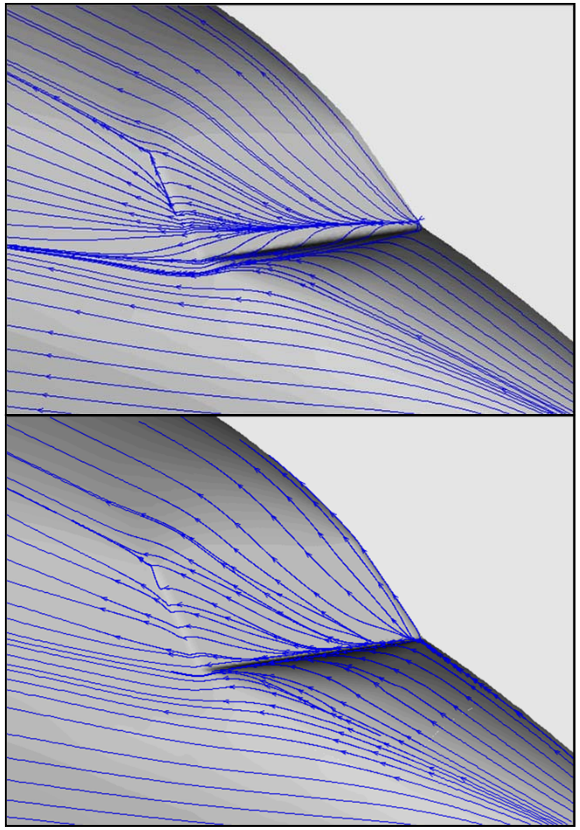
- Хорошее согласование расчета и эксперимента



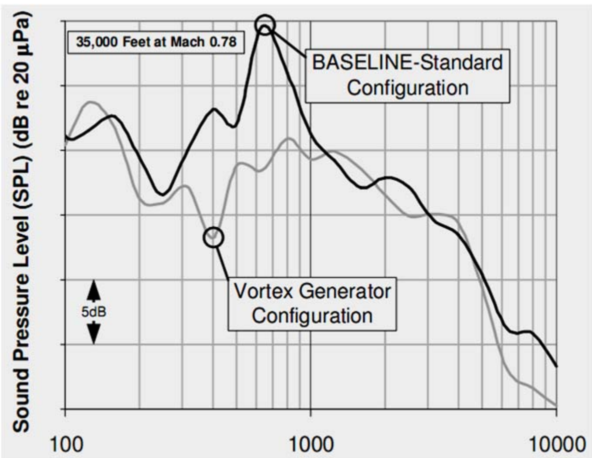
Расчетная оптимизация вихрегенераторов для снижения шума в кабине Boeing-737

- Отрыв в углу между фюзеляжем и окном является источником шума в кабине пилотов
- С использованием модели SARC были выбраны форма и расположение вихрегенераторов, которые предотвращают отрыв потока





Поверхностные линии тока



- Летные испытания показали существенное снижение шума
  - Вихрегенераторы устанавливаются на все новые Boeing 737

Шероховатость стенок

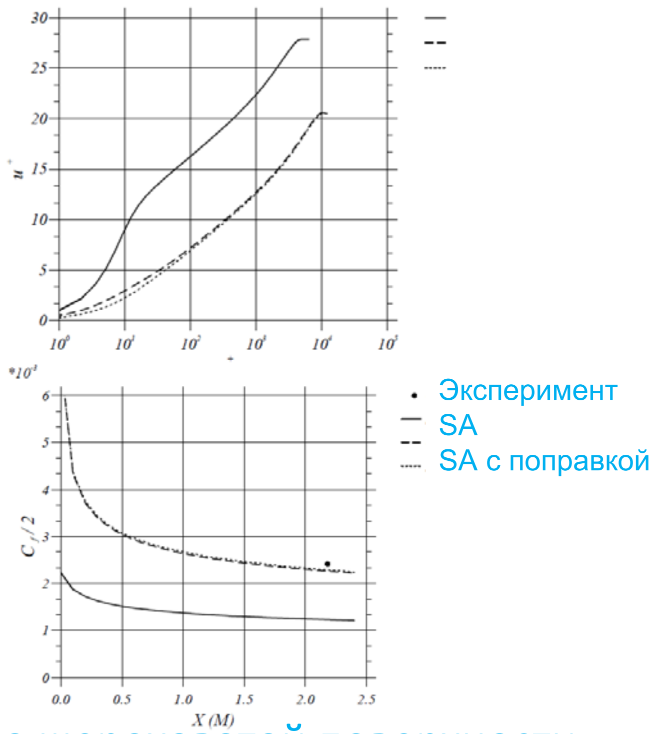
- Большинство реально обтекаемых поверхностей не являются идеально гладкими
  - ➢ Даже очень небольшие неровности поверхности могут сильно повлиять на сопротивление обтекаемых тел
- Многообразие форм неровностей
  - ➢ «Эквивалентная» песочная шероховатость с высотой бугорков k_s
  - ➢ Наиболее объективный безразмерный параметр $k_s^+ = \dfrac{k_s v^*}{\nu}$
- Шероховатость изменяет закон стенки

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y^+\right) + B$$

  - ➢ С ростом высоты элементов шероховатости величина B уменьшается
- Необходима явная коррекция
  - ➢ В пристенных функциях
  - ➢ В моделях турбулентности
    - ✓ Модель SA

$$\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial n} = \frac{\tilde{\nu}}{d}, \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} + C_{r1}\frac{k_s}{d}, f_{v2} = 1 - \frac{\dfrac{\tilde{\nu}}{\nu}}{1 + \dfrac{\tilde{\nu}}{\nu} f_{v1}}, C_{r1} = 0.5$$

$$d = d_{\min} + 0.03k_s$$



Пограничный слой на шероховатой поверхности

Нелинейная версия модели Спаларта-Аллмареса

- Модель Спаларта-Аллмареса содержит одно уравнение
  - Невозможно определить турбулентный масштаб времени
    - ✓ В моделях с двумя уравнениями это $\tau = \frac{k}{\varepsilon} = \frac{1}{C_\mu \omega}$
  - В качестве временного масштаба используется

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(S^2 + \Omega^2\right)/2}}$$

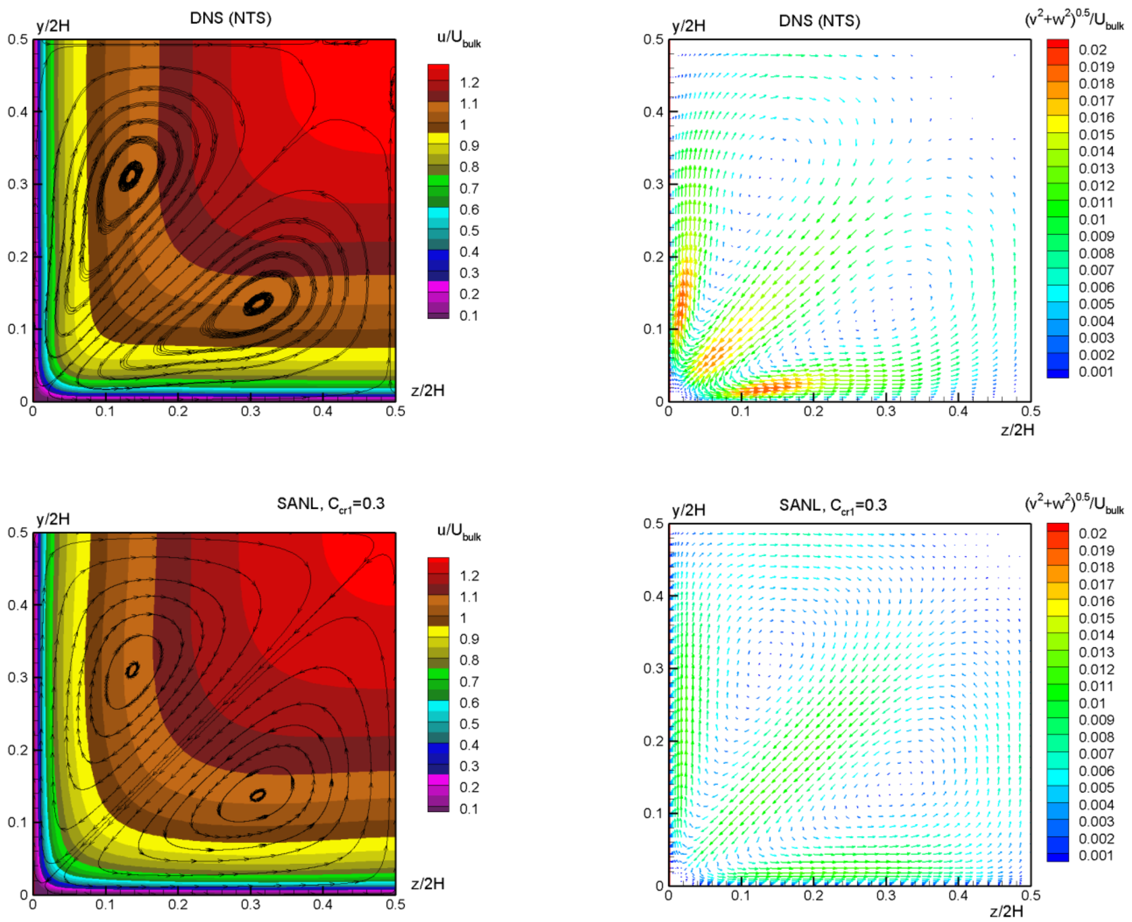
- В модели используется только одно нелинейное слагаемое

$$\overline{u_i' u_j'} = -2\nu_t S_{ij} - C_{cr1}\frac{4\nu_t}{\sqrt{\left(S^2 + \Omega^2\right)/2}}\left(S_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik}S_{kj}\right), \quad C_{cr1} = 0.3$$

- Эта поправка может быть использована с любой моделью турбулентности

Установившееся течение в трубе квадратного сечения

- Нелинейная модель правильно предсказывает структуру течения
  - Интенсивность вторичных токов в углу несколько занижена

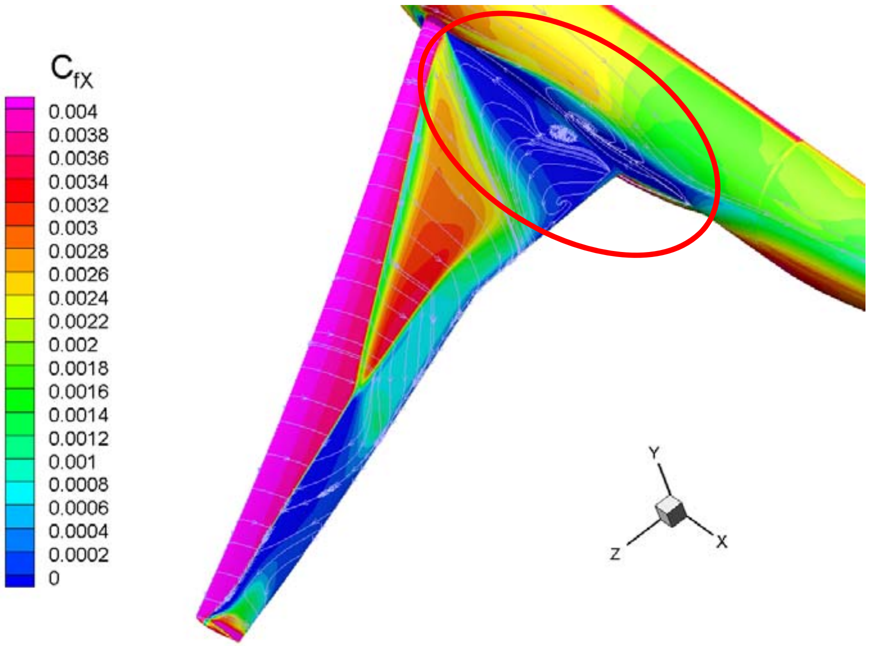


Вторичные токи в канале квадратного сечения

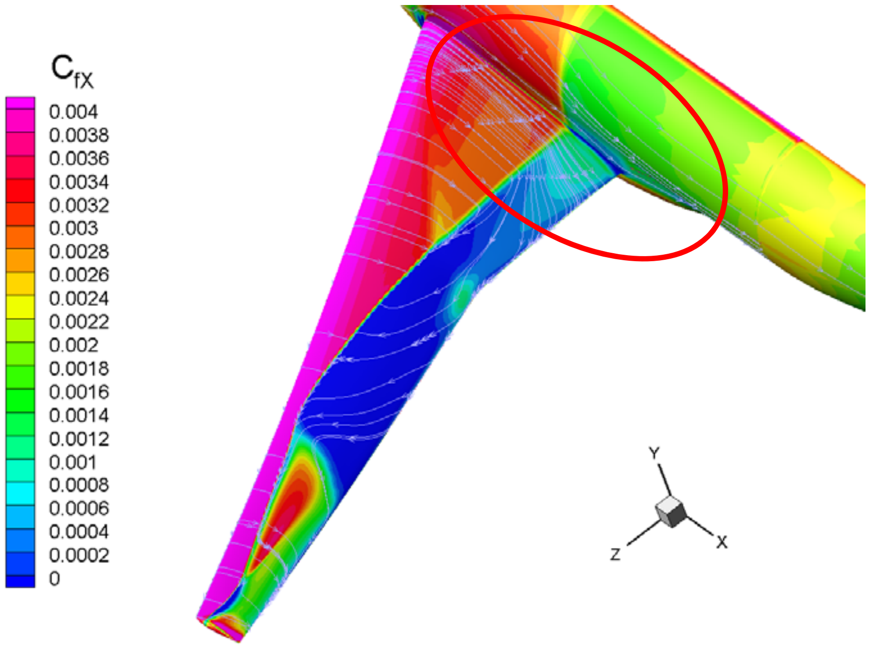
Трансзвуковое обтекание модели самолета CRM (I)

- Параметры течения
  - Re_{inch}≈2·10^4, M_∞=0.85, α=4.1°
- При использовании нелинейной модели не возникает массивный угловой отрыв
  - Даже столь простая нелинейная модель позволяет правильно описать течение внутри угла

Линейная модель SA



Нелинейная модель SA

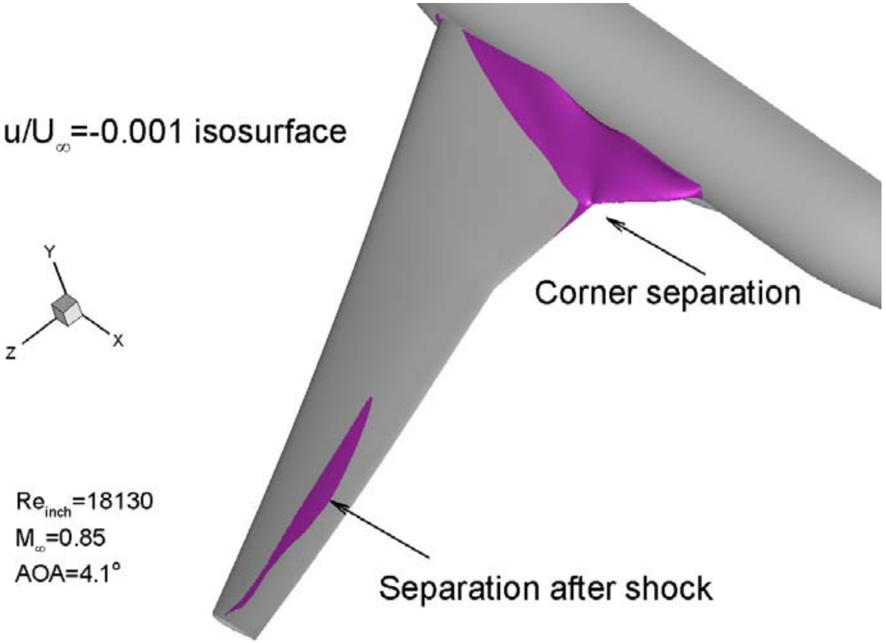


Продольный коэффициент трения и поверхностные линии тока

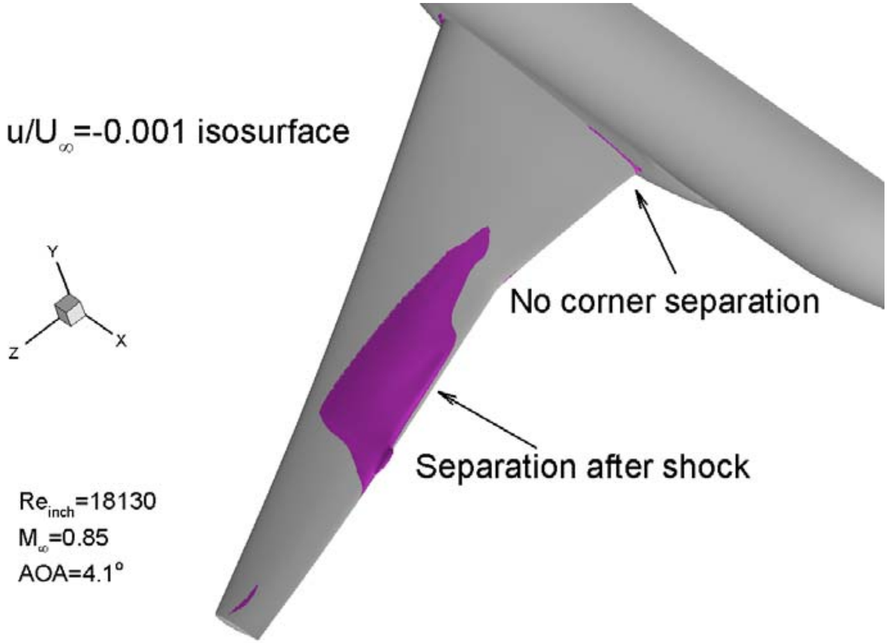
Трансзвуковое обтекание модели самолета CRM (II)

- Наличие углового отрыва меняет структуру течения на всей протяженности крыла

Линейная модель SA



Нелинейная модель SA

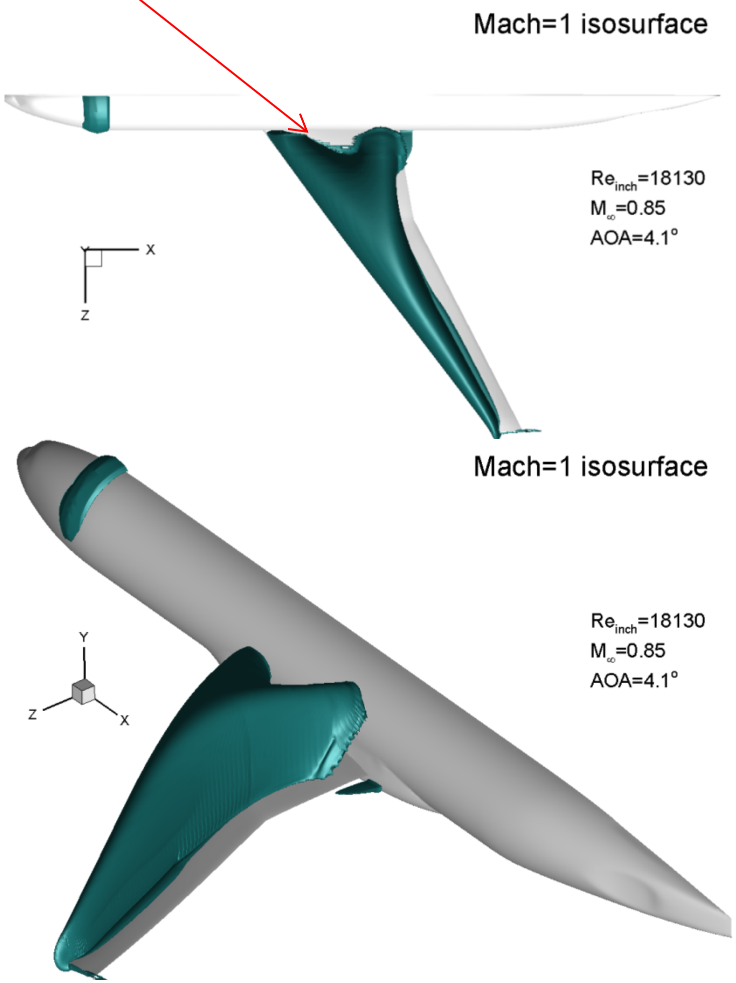


Отрывные зоны на поверхности крыла

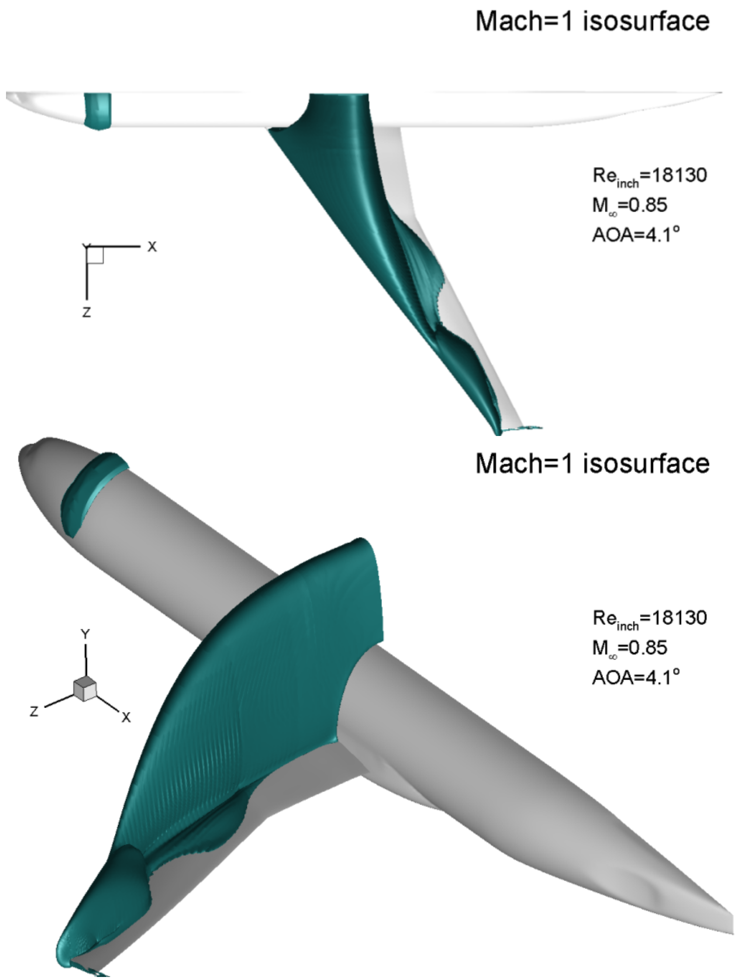
Трансзвуковое обтекание модели самолета CRM (III)

- Причина столь высокой чувствительности в скачке, вызванном угловым отрывом

Линейная модель SA



Нелинейная модель SA



Отрывные зоны на поверхности крыла

Резюме

- Модель Спаларта-Аллмареса – одна из лучших полуэмпирических моделей турбулентности
- Содержит одно дифференциальное уравнение относительно «высокорейнольдсовой» турбулентной вязкости
- Настроена на решение задач внешней аэродинамики
- Содержит ряд поправок, расширяющих ее область применимости
    - ➢ Поправка на кривизну и вращение
    - ➢ Поправка на шероховатость
    - ➢ Нелинейная версия модели