

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен»

Курс лекций «Модели физико-химической ГГД и турбулентности.
Вихреразрешающие подходы»
(http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/SRS_methods)

Лекция 1

Метод моделирования крупных вихрей

Large Eddy Simulation (LES)

Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2019 г.

Содержание

1. Метод моделирования крупных вихрей (LES)
 - Процедура фильтрации
 - Практическая реализация LES
 - Влияние конечно-разностной схемы
2. Модель Смагоринского
 - Калибровка константы
 - Особенности применения для расчета пристенных течений
 - Более сложные версии модели
3. Свойства LES

Метод моделирования крупных вихрей Large Eddy Simulation (LES)

Крупные вихри получают энергию от осредненного потока



Структура крупных вихрей существенно зависит от рассматриваемого течения

Мелкие вихри получают энергию через каскадный перенос

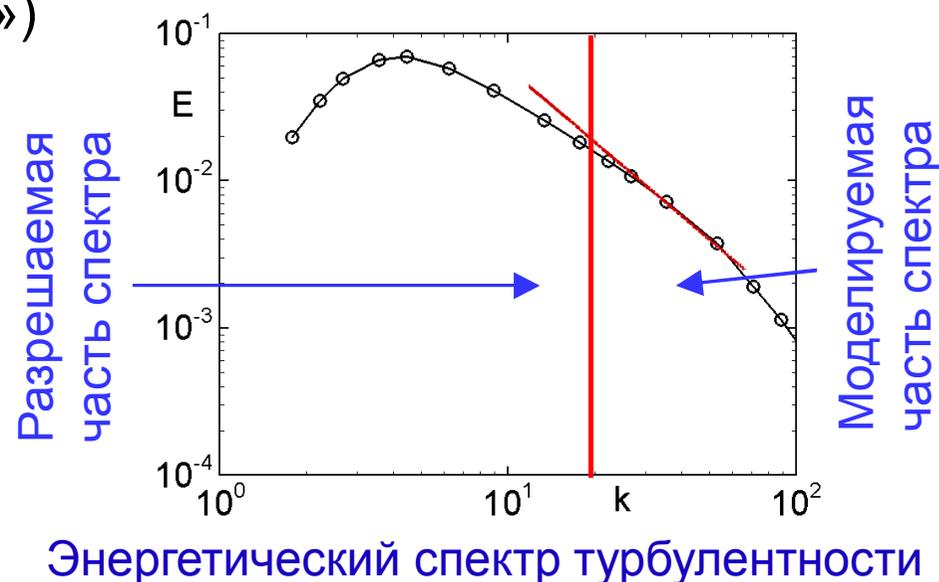


Их структура существенно более универсальна

Моделирование мелких вихрей гораздо более перспективно,
чем моделирование крупных

Метод моделирования крупных вихрей

- **Процедура фильтрации:** разделение вихрей на «крупные» (больше некоторого размера Δ) и «мелкие»
- **Отфильтрованные уравнения:** построение такой системы уравнений, в рамках которой крупные вихри будут разрешаться точно
- **Подсеточная модель:** Описание «мелких» вихрей и их взаимодействия с крупными моделируется. Для надежного универсального моделирования этих вихрей граница между «крупными» и «мелкими» вихрями должна лежать в автомодельной области спектра (обычно полагают, что в ней справедлив закон « $-5/3$ »)
 - При низких числах Рейнольдса спектр может не содержать автомодельной области
 - В частности, это всегда происходит в пристенной области пограничного слоя



Процедура фильтрации

- В рамках LES используется осреднение по пространству, описываемое процедурой фильтрации

$$\bar{f}(r, t) = \int_D G(r - r', \bar{\Delta}) f(r', t) dr'^3$$

- D - область решения,
- G - функция фильтра,
- $\bar{\Delta}$ - ширина фильтра.

- Выполнение функцией фильтра условия нормировки

$$\int_D G(r - r', \bar{\Delta}) dr'^3 = 1$$

гарантирует формальный переход от LES к DNS при $\bar{\Delta} \rightarrow 0$

$$\lim_{\bar{\Delta} \rightarrow 0} \bar{f}(r, t) = \lim_{\bar{\Delta} \rightarrow 0} \int_D G(r - r', \bar{\Delta}) f(r', t) dr'^3 = \int_D \delta(r - r') f(r', t) dr'^3 \equiv f(r, t)$$

Наиболее часто используемые фильтры

Фильтр Гаусса

$$G(x - x', \bar{\Delta}) = \sqrt{\frac{6}{\pi \bar{\Delta}^2}} \cdot \exp \left[-6 \left(\frac{|x - x'|}{\bar{\Delta}} \right)^2 \right]$$

Коробчатый
(box) фильтр

$$G(x - x', \bar{\Delta}) = \begin{cases} 1/\bar{\Delta}, & |x - x'| \leq \bar{\Delta}/2 \\ 0, & |x - x'| > \bar{\Delta}/2 \end{cases}$$

Фильтр Фурье

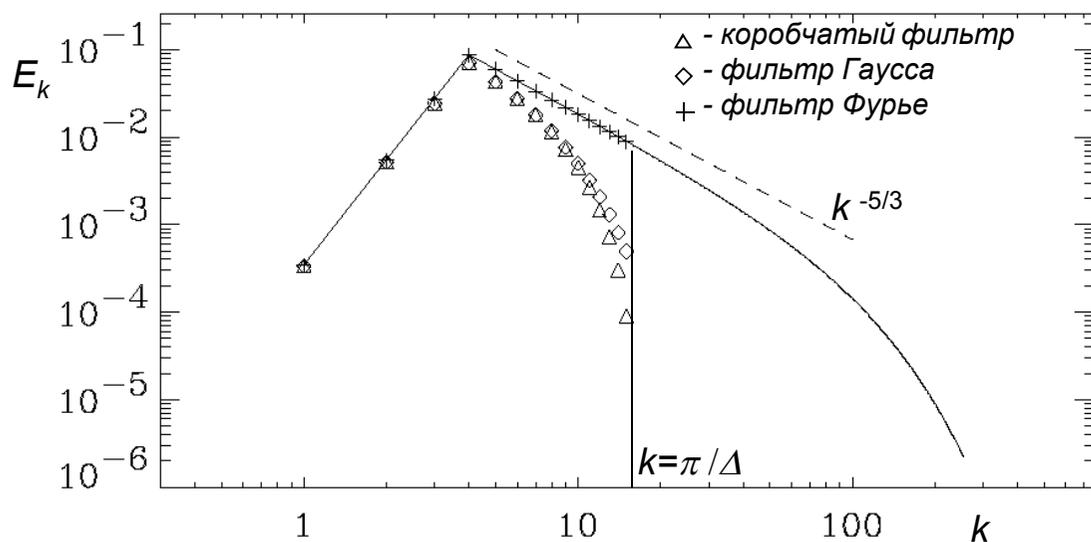
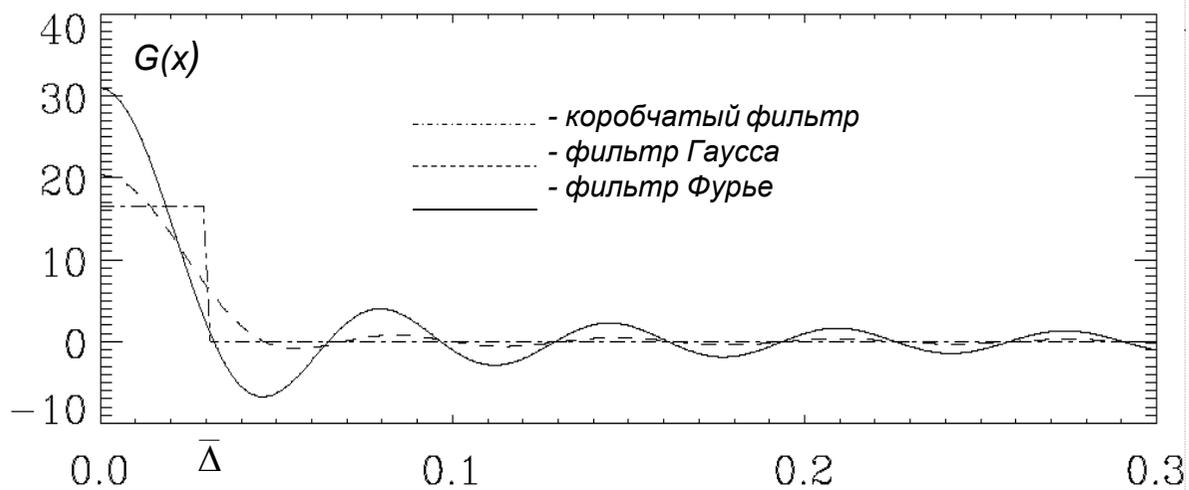
$$\tilde{G}(k) = \begin{cases} 1, & k \leq \pi/\bar{\Delta} \\ 0, & k > \pi/\bar{\Delta} \end{cases}$$

Здесь $\tilde{G}(k) = \int_D G(r - r', \bar{\Delta}) e^{-ikr'} dr'^3$ - Фурье-образ функции фильтра

$$\bar{u}(k) = \tilde{G}(k) \tilde{u}(k)$$

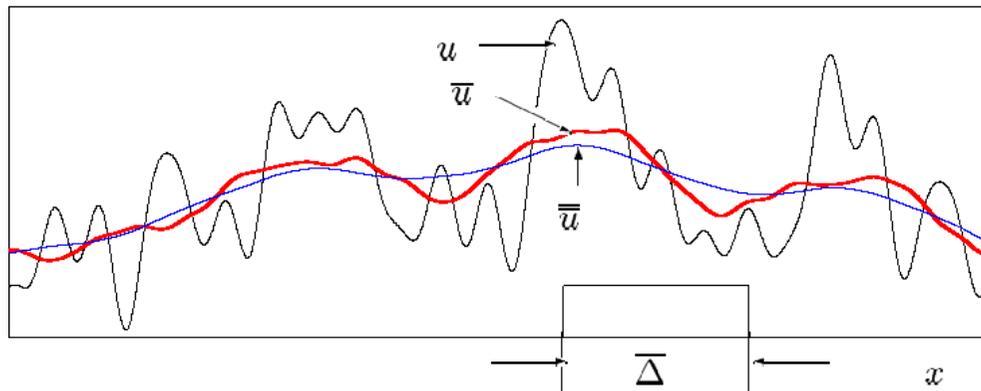
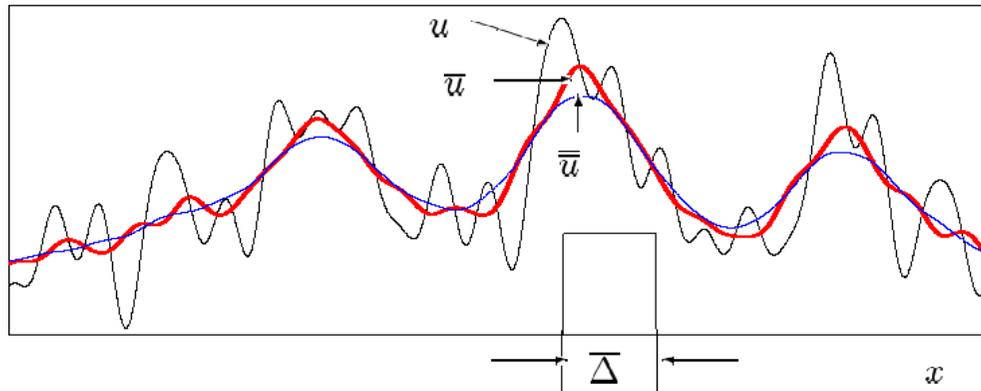
$$\tilde{u}(k) = \int u(r') e^{-ikr'} dr'^3$$

Наиболее часто используемые фильтры



Действие фильтров на спектр модельного сигнала

Свойства процедуры фильтрации



Для всех фильтров (кроме фильтра Фурье) $\overline{\bar{u}} \neq \bar{u}$, $\overline{u'} \neq 0$, $\overline{u'v'} \neq \overline{u'v}$

Процедура фильтрации на удовлетворяет условиям Рейнольдса!!!

Отфильтрованные уравнения

Применение процедуры фильтрации к уравнениям Навье-Стокса приводит к получению отфильтрованных уравнений, в которых появляются дополнительные подсеточные напряжения

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$$

которые принято делить на 3 части

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}$$

где

$$L_{ij} = \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad \text{- напряжения Леонарда (взаимодействие между разрешаемыми масштабами)}$$

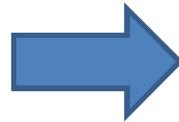
$$C_{ij} = \overline{\overline{u_i} u'_j} + \overline{u'_i \overline{u_j}} \quad \text{- смешанные напряжения (взаимодействие между разрешаемыми и неразрешаемыми масштабами)}$$

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \quad \text{- напряжения Рейнольдса (взаимодействие между неразрешаемыми масштабами)}$$

Подсеточные модели турбулентности

Отфильтрованные уравнения замыкаются при помощи «подсеточной» модели турбулентности

Поскольку моделируются вихри, размер которых меньше размера фильтра Δ



Размер фильтра Δ в явном виде входит в модель
Из соображений размерности
 $v_t \sim \varepsilon^{1/3} \Delta^{4/3}$

Существующие подсеточные модели можно условно разделить на следующие категории

- Модели вихревой (подсеточной) вязкости
 - Алгебраические модели
 - Динамические модели
 - Дифференциальные модели
- Модели близких масштабов
- Смешанные модели

Влияние модели турбулентности в LES гораздо менее существенно, чем в RANS

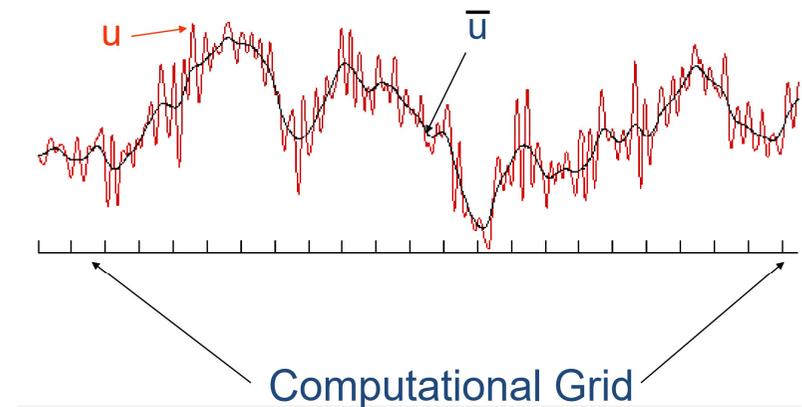
Практическая реализация LES

Зачастую на практике не пользуются явными фильтрами, а роль фильтра играет размер ячейки сетки (например, $\bar{\Delta} = \sqrt[3]{V}$)

- Такой фильтр называется неявным

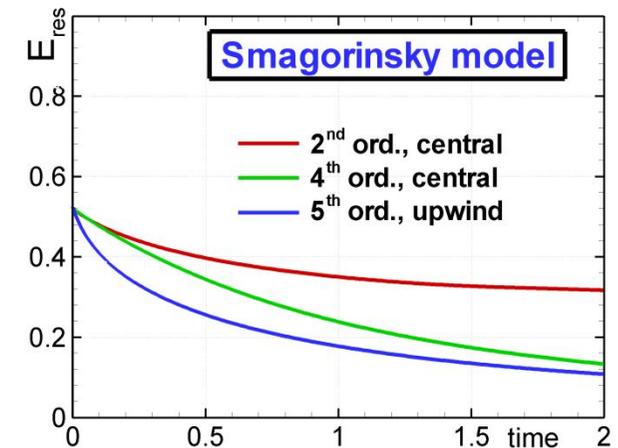
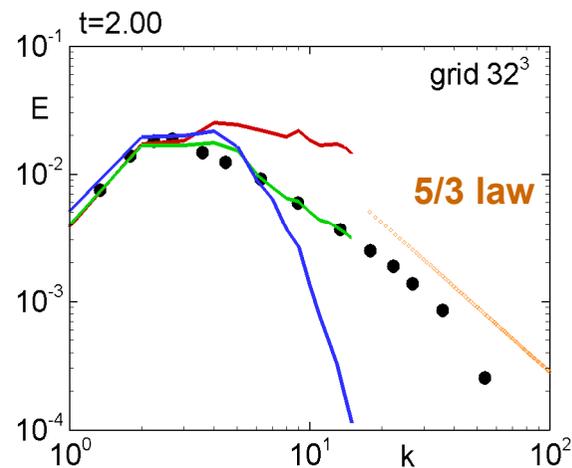
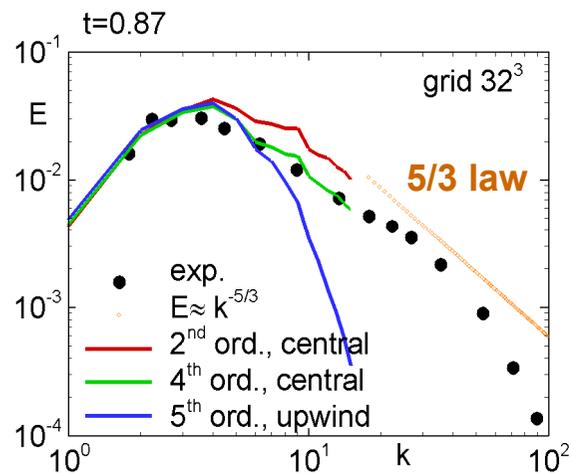


- Подсеточная модель содержит в явном виде размер ячейки сетки
- Вихри, которые меньше размера ячейки сетки естественным образом отфильтровываются
- Для точного разрешения вихрей, ненамного превосходящих размер ячейки, необходимо использование современных низкодиссипативных схем
 - Противопоточные схемы (традиционные для RANS) неприменимы для LES



Влияние конечно-разностной схемы

- Результаты расчетов сильно зависят от диссипативности и устойчивости используемой схемы
 - Значение константы зависит от схемы
 - ✓ В первую очередь необходимо выбрать расчетную схему

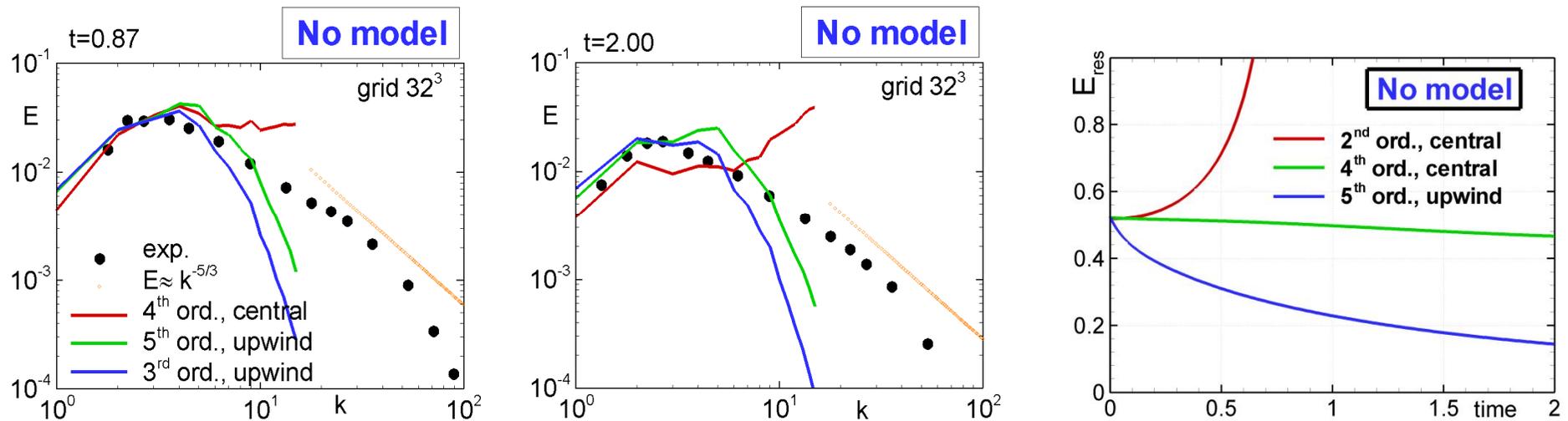


Сравнение результатов расчетов, полученных по модели Смагоринского при $C_S=0.2$ с экспериментальными данными (Comte-Bellot и Corrsin)

Выбор конечно-разностной схемы

Оценку различных схем можно провести на примере расчета вырождения однородной изотропной турбулентности без подсеточной модели

- Противопоточные схемы слишком диссипативны
- Центральнo-разностная схема второго порядка неустойчива
- Центральнo-разностная схема четвертого порядка лучше других подходит для LES



Сравнение результатов расчетов, полученных без модели турбулентности, с экспериментальными данными (Comte-Bellot и Corrsin)

Свойства схемы зависят от деталей реализации



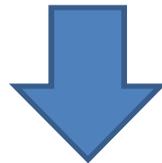
Подобное исследование должно проводиться для каждого кода

MILES

Диссипация самых мелких из разрешаемых вихрей обеспечивается

- Подсеточной моделью турбулентности
- Численной диссипацией

Численная диссипация зависит от используемой схемы и сетки



При удачном выборе схемы и сетки можно обойтись без подсеточной модели турбулентности (MILES)

НО!!! Не существует четких рецептов и критериев того, что сетка и схема обеспечивают «правильный» MILES.

Подсеточная модель Смагоринского

- Наиболее часто используется при проведении LES
- Основана на гипотезе Буссинеска (использует подсеточную вязкость)

$$\nu_t = (C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \quad \bar{\Delta} = (\Delta_x \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z)^{1/3} = Vol^{1/3} \quad |\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$$

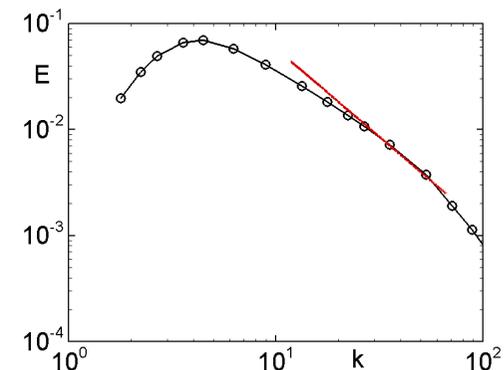
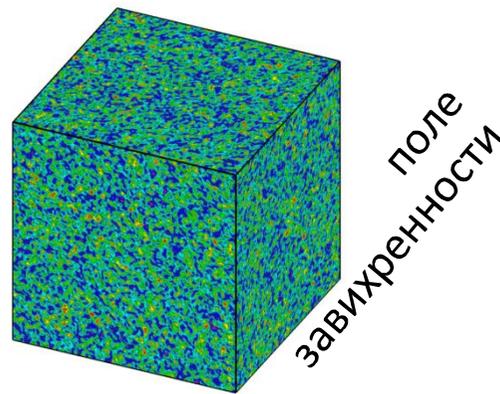
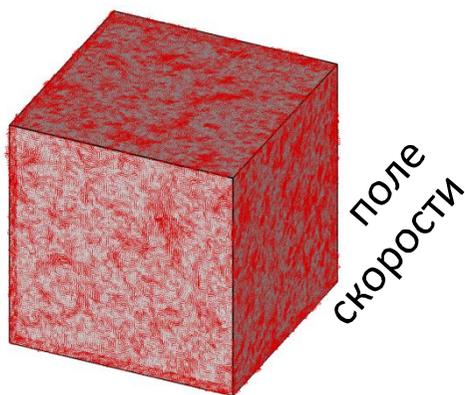
➤ Выполнение закона «-5/3», соответственно $\nu_t \sim \varepsilon^{1/3} \Delta^{4/3}$

- Константу можно оценить из энергетического спектра Обухова

$$E(k) = C_k \varepsilon^{-2/3} k^{-5/3} \quad C_k \approx 1.4 \div 2.2 \quad \Rightarrow \quad C_s = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3C_k} \right)^{3/4} \approx 0.13 \div 0.18$$

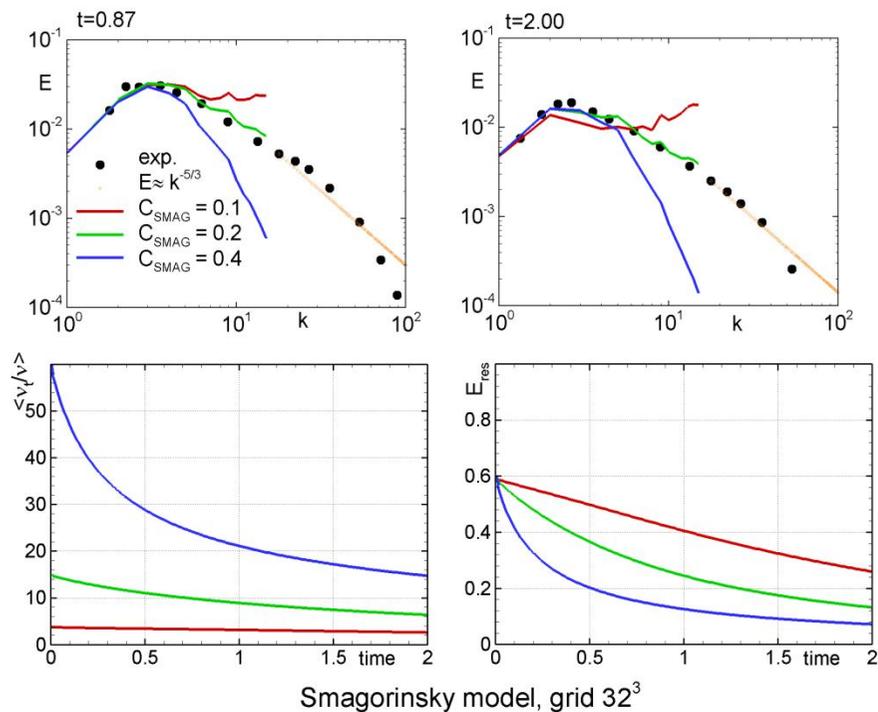
- Калибровка константы задаче о вырождении однородной изотропной турбулентности (ДИТ) дает $C_s \approx 0.2$ (значение зависит от кода!)

➤ Правильное значение константы должно обеспечивать правильную эволюцию энергетического спектра во времени

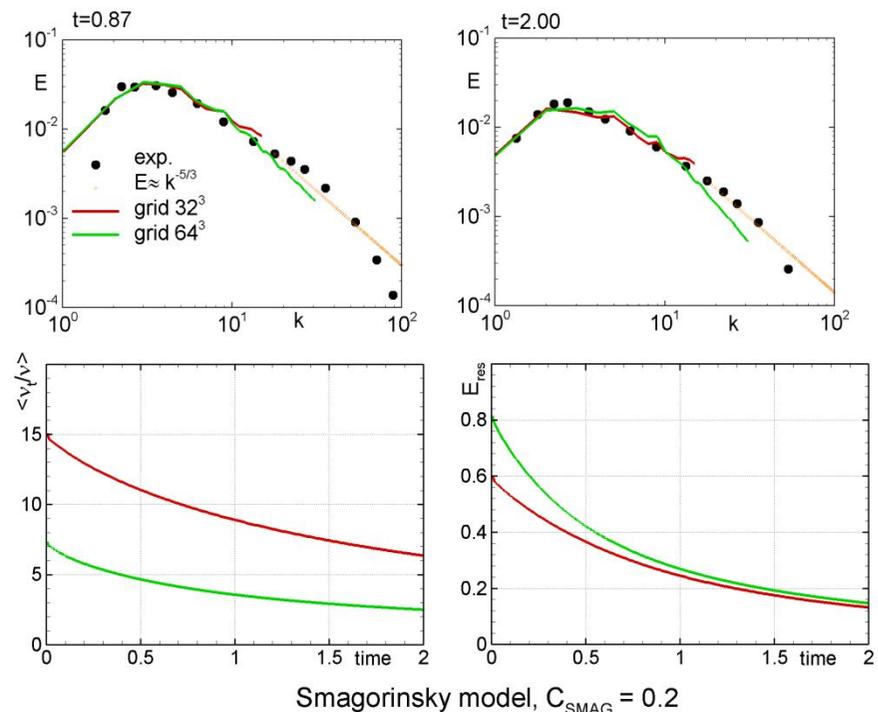


Калибровка константы модели Смагоринского

- Все расчеты выполнены с использованием ранее выбранной центрально-разностной схемы четвертого порядка
- Значение константы $C_S=0.2$ обеспечивает правильный наклон спектра
- Результат не зависит от используемой сетки
 - Это не так для слишком диссипативных схем или «плохих» подсеточных моделей



Влияние константы



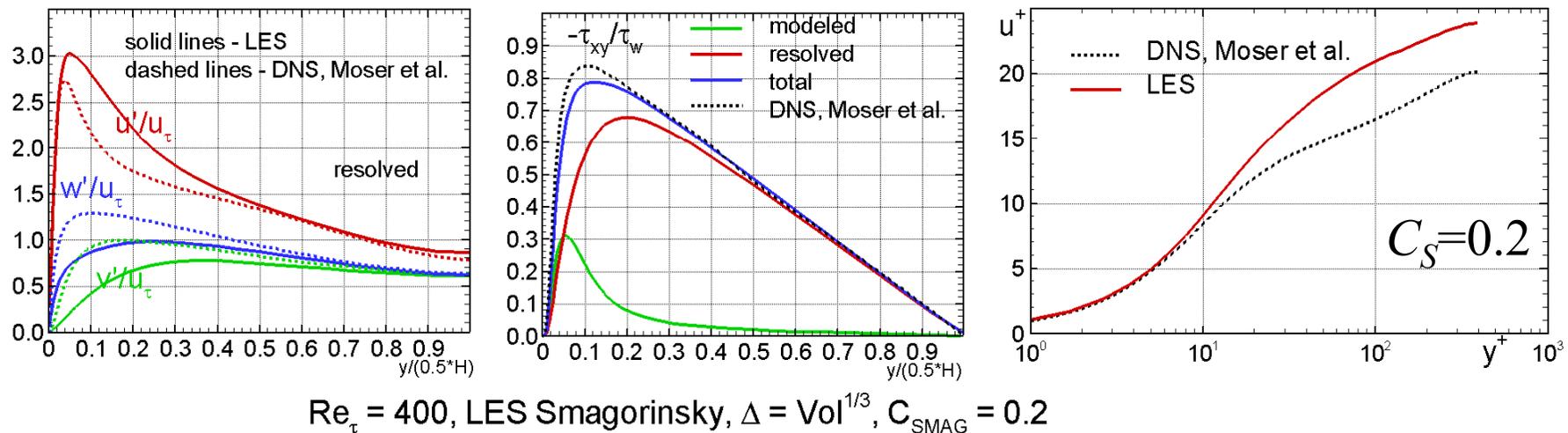
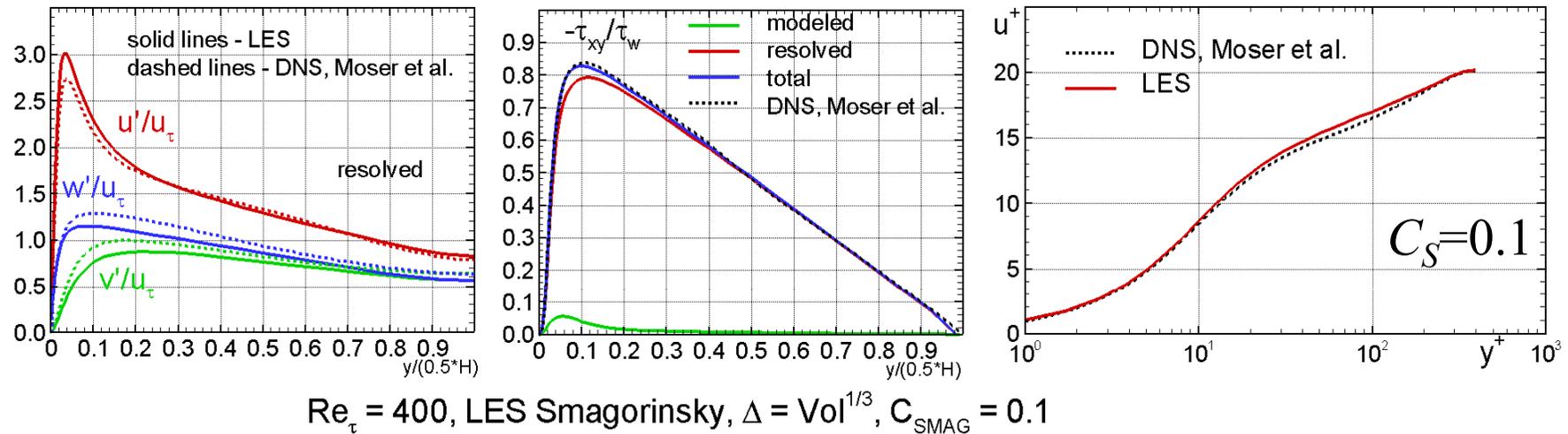
Влияние расчетной сетки

Модель Смагоринского для пристенных течений

- В случае пристенных течений модель Смагоринского $\nu_t = (C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}|$ обладает рядом серьезных недостатков
 - В сдвиговом слое подсеточная вязкость не равна 0
 - ✓ Вязкий подслой
 - ✓ Ламинарный участок пограничного слоя
 - ✓ Начальный участок слоя смешения
 - Линейный масштаб $\bar{\Delta} = (\Delta_x \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z)^{1/3} = Vol^{1/3}$ физически необоснован при использовании сильно неравномерных сеток
 - ✓ Характерно для пристенных течений
- При расчете пристенных течений модель приходится модифицировать $\nu_t = f_{Damp} \cdot (\Delta_{LES})^2 |\bar{S}|$
 - Демпфирующая функция Пиомелли (не локальна)
 $f_{Damp} = 1.0 - \exp(-(y^+ / A^+)^3)$, $A^+ = 25$
 - Ограничение линейного масштаба формулой Прандтля (подсеточная вязкость не может быть больше RANS вязкости)
 $\Delta_{LES} = \min(\kappa \cdot d_w, C_s \cdot \Delta)$
 - Изменение значения константы: $C_s=0.1$

Модель Смагоринского в канале

- Результаты при значении константы $C_S=0.2$ существенно отличаются от DNS
 - Для получения правильного результата необходимо значение $C_S=0.1$



Условия корректного использования LES (1/2)

1. Достаточно мелкая сетка

- Волновое число, соответствующее шагу сетки Δ , лежит в инерционном интервале
 - Как правило, для этого надо разрешать не менее 80% кинетической энергии
 - ✓ Отношение разрешенной и модельной энергий можно использовать для автоматической адаптации сеток
- Вытянутость ячеек сетки соответствует статистической анизотропии вихрей размера Δ
 - Обычно (за исключением областей с большими градиентами скорости) вихри изотропны

2. Низкодиссипативная расчетная схема

- Схема для LES должна проходить тест «Вырождение однородной изотропной турбулентности»

3. «Правильная» подсеточная модель

- При измельчении сетки подсеточная вязкость удовлетворяет условию $\nu_t \sim \varepsilon^{1/3} \Delta^{4/3}$
 - Константа обычно подбирается так, чтобы в задаче о вырождении однородной изотропной турбулентности спектр удовлетворял закону «-5/3»

Условия корректного использования LES (2/2)

4. Наличие разрешенных турбулентных пульсаций

- В зависимости от рассматриваемой задачи они могут
 - задаваться на входной границе
 - возникать за счет неустойчивости потока
 - ✓ В обоих случаях существует область перестройки пульсаций, в которой точность LES падает
-
-

- Эти условия должны выполняться как в LES, так и в LES областях гибридных подходов
- Во многих практических LES расчетах эти условия не выполняются по различным причинам
 - Грубые сетки
 - Анизотропные ячейки сетки
 - Отсутствует инерционный интервал с законом «-5/3»
- В некоторых ситуациях это приводит к существенным ошибкам
 - Большинство усовершенствований LES направлены на их устранение

Более сложные модели
на основе модели Смагоринского

или

не слишком успешные попытки
исправить ее недостатки

Подсеточная модель WALE (Wall-Adapting Local Eddy-viscosity)

- Идея состоит в замене S в модели Смагоринского $\nu_t = (C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}|$ не величину, обладающую следующими свойствами
 - Тензорная инвариантность
 - Легко определяема на сетке любого типа (нет старших производных)
 - Равна 0 на стенке и не требует демпфирования ($\nu_t \sim y^3$ у стенки)
- Для построения искомой величины авторы использовали

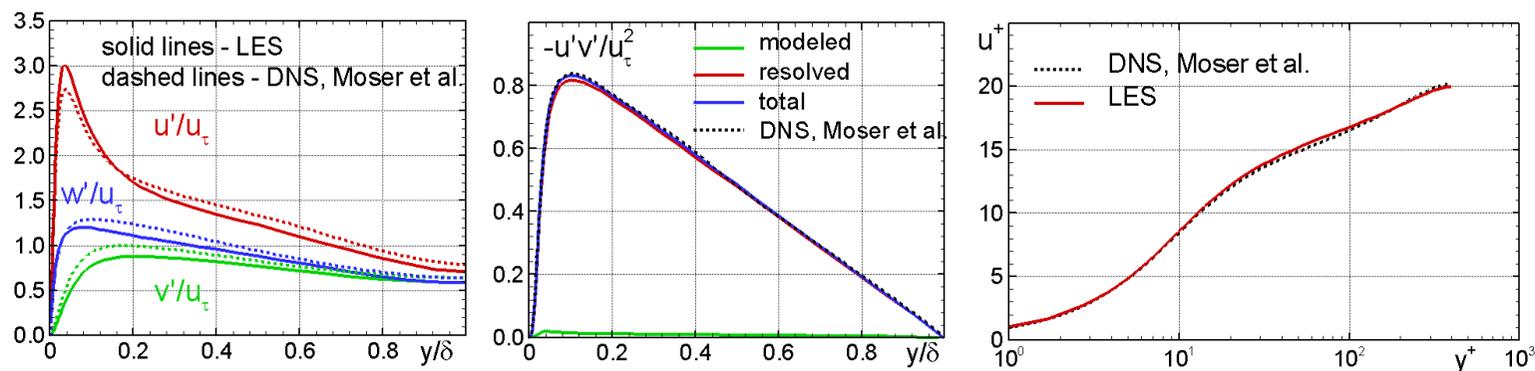
квадратичный тензор

$$S_{ij}^d = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \equiv S_{ik} S_{kj} + \Omega_{ik} \Omega_{kj} - \frac{1}{3} (S_{lk} S_{kl} + \Omega_{lk} \Omega_{kl}) \delta_{ij}$$

- Величина $S_{ij}^d S_{ij}^d \sim y^2$ в окрестности стенки
- Модель $\nu_t = (C_w \bar{\Delta})^2 \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(S_{ij} S_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}}$ обеспечивает $\nu_t \sim y^3$
 - Константа модели калибруется с использованием ДИТ
 - ✓ $C_w = 0.47$

Подсеточная модель WALE в канале

- Обеспечивает правильный профиль скорости при константе, полученной при калибровке DIHT
 - Не требует демпфирующего множителя



- Этот результат получен при низком числе Рейнольдса на сетке, достаточной для проведения разрешенного до стенки LES!!!
 - Получение аналогичного результата для более высокого числа Рейнольдса требует неприемлемо мелких сеток

Динамические модели: Germino identity

Необходимость изменения константы модели Смагоринского в зависимости от течения привела к идее автоматического определения константы (Germino-Lilly)

- Кроме основной фильтрации ($\overline{u_i}$) с размером фильтра Δ введем дополнительную фильтрацию ($\langle u_i \rangle$) с размером фильтра $\Delta_1 > \Delta$
- Будем считать, что действие дополнительного фильтра на исходный сигнал и на сигнал, отфильтрованный при помощи основного фильтра приводит к одинаковому результату $\langle \overline{u_i} \rangle = \langle u_i \rangle$
- Рассмотрим модельные напряжения в отфильтрованных системах уравнений, полученных при помощи следующих фильтров

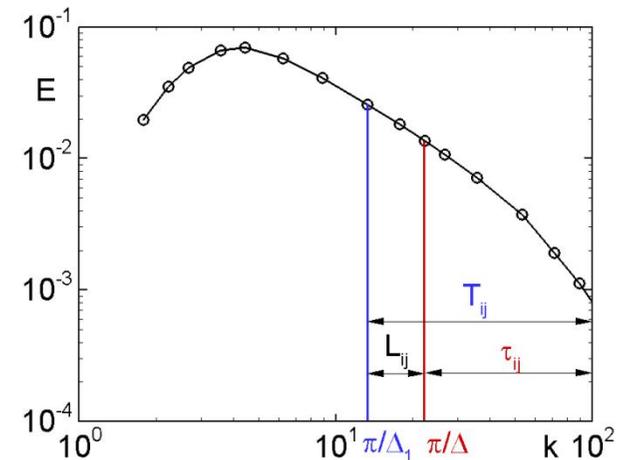
1. Основной фильтр $\tau_{ij} = \overline{u_i \cdot u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$
2. Дополнительный фильтр $T_{ij} = \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle - \langle u_i u_j \rangle$
3. Последовательное применение основного и дополнительного фильтров

$$L_{ij} = \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle - \langle \overline{u_i \cdot u_j} \rangle$$

- $L_{ij} = T_{ij} - \langle \tau_{ij} \rangle$ (поскольку фильтрации 2 и 3 приводят к уравнениям относительно $\langle u_i \rangle$)

➤ Действительно

$$L_{ij} + \langle \tau_{ij} \rangle = \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle - \langle \overline{u_i \cdot u_j} \rangle + \langle \overline{u_i \cdot u_j} \rangle - \langle \overline{u_i u_j} \rangle = \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle - \langle \overline{u_i u_j} \rangle = \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle - \langle u_i u_j \rangle = T_{ij}$$

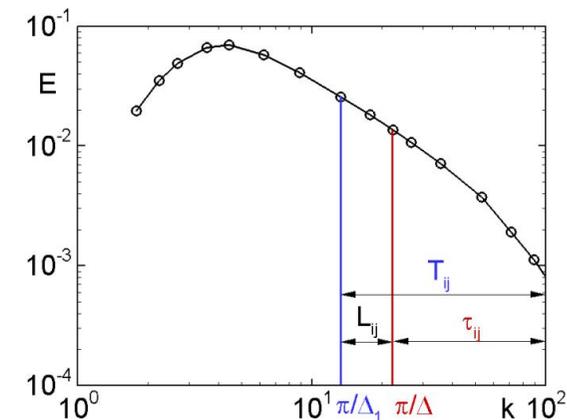


Динамические модели: формулировка Lilly

- Предположим
 - Что модельные напряжения в случае основной и дополнительной фильтрации описываются моделью Смагоринского
 - Что константа модели Смагоринского одинакова для обеих процедур фильтрации
- Напряжения можно представить в следующем виде
 - $T_{ij} = 2\nu_t^{\Delta_1} \langle S_{ij} \rangle = 2(C_S \Delta_1)^2 |\langle S \rangle| \langle S_{ij} \rangle = 2(C_S \Delta)^2 \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} \right)^2 |\langle \bar{S} \rangle| \langle \bar{S}_{ij} \rangle$
 - $\tau_{ij} = 2\nu_t^{\Delta} \bar{S}_{ij} = 2(C_S \Delta)^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}$
- Тогда, следуя Germino identity $L_{ij} = T_{ij} - \langle \tau_{ij} \rangle = 2(C_S \Delta)^2 \left[\left(\frac{\Delta_1}{\Delta} \right)^2 |\langle \bar{S} \rangle| \langle \bar{S}_{ij} \rangle - \langle |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \rangle \right]$
или $L_{ij} = 2(C_S \Delta)^2 M_{ij}$
где матрицы $L_{ij} = \langle \bar{u}_i \rangle \langle \bar{u}_j \rangle - \langle \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \rangle$ и $M_{ij} = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} \right)^2 |\langle \bar{S} \rangle| \langle \bar{S}_{ij} \rangle - \langle |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \rangle$
вычисляются путем применения дополнительного фильтра к отфильтрованному (LES) полю
- Для определения константы C_S используется метод наименьших квадратов
 - Минимизация функционала $Q = [L_{ij} - 2(C_S \Delta)^2 M_{ij}]^2$ дает значение $(C_S \Delta)^2 = \frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{kl} M_{kl}}$

Динамические модели: недостатки

- При реализации модели Lilly возникают определенные трудности
 - Правая часть выражения для $(C_s \Delta)^2$ может стать отрицательной
 - ✓ Осреднение по однородному направлению
 - Применимо только для простых задач
 - ✓ Ограничение как сверху, так и снизу
 - Подсеточная вязкость в значительной степени определяется ограничителями, поэтому теряется динамическая суть модели
 - Результат очень чувствителен к численной схеме и реализации дополнительной фильтрации
- Причины возникающих проблем
 - Энергетический спектр Обухова (которому соответствует модель Смагоринского) является осредненным, локальный моментальный спектр может заметно от него отличаться
 - ✓ Предположение об одинаковости константы Смагоринского для разных фильтров (справедливое «в среднем») может не выполняться локально
 - Предположение об одинаковости константы может нарушаться из-за различий в реализации двух процедур фильтрации
 - ✓ Основная фильтрация обычно неявная
 - ✓ Дополнительная фильтрация обычно состоит в осреднении по нескольким соседним точкам



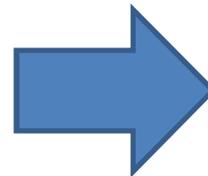
Свойства LES

- При использовании достаточно мелких сеток и хороших схем обеспечивает очень высокую точность
- Требует решения трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса на подробных сетках

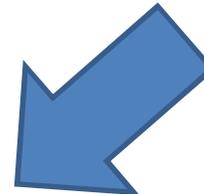


Использование LES сопряжено со значительными затратами

При приближении к стенке
характерный размер вихрей
уменьшается



Возрастают
требования к сетке



Вычислительные затраты особенно
существенны в окрестности стенки

Резюме

- При практической реализации метода LES используются различные нестрогие допущения, поэтому LES не является априори точным методом
 - Тем не менее, при выполнении ряда условий точность этого метода очень высока даже при использовании простейшей алгебраической модели Смагоринского
- В некоторых ситуациях (в частности, в пограничном слое) выполнить упомянутые условия очень трудно, а иногда и практически невозможно
 - Развитие LES направлено на смягчение последствий невыполнения этих условий