

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
Кафедра «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен»

Курс лекций «Модели физико-химической ГГД и турбулентности.  
Вихреразрешающие подходы»  
([http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/SRS\\_methods](http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/SRS_methods))

## Лекция 2

# Особенности применения вихреразрешающих подходов для пристенных течений

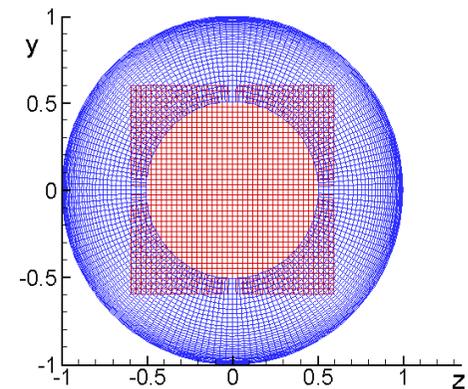
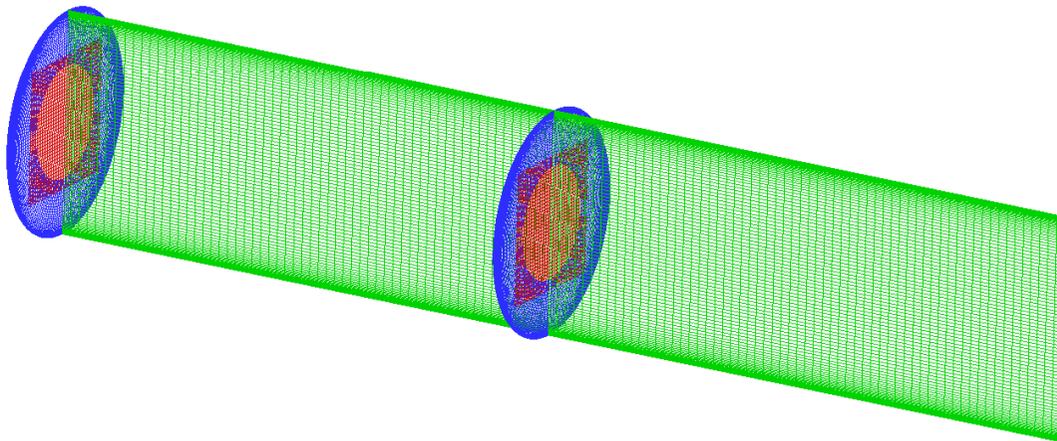
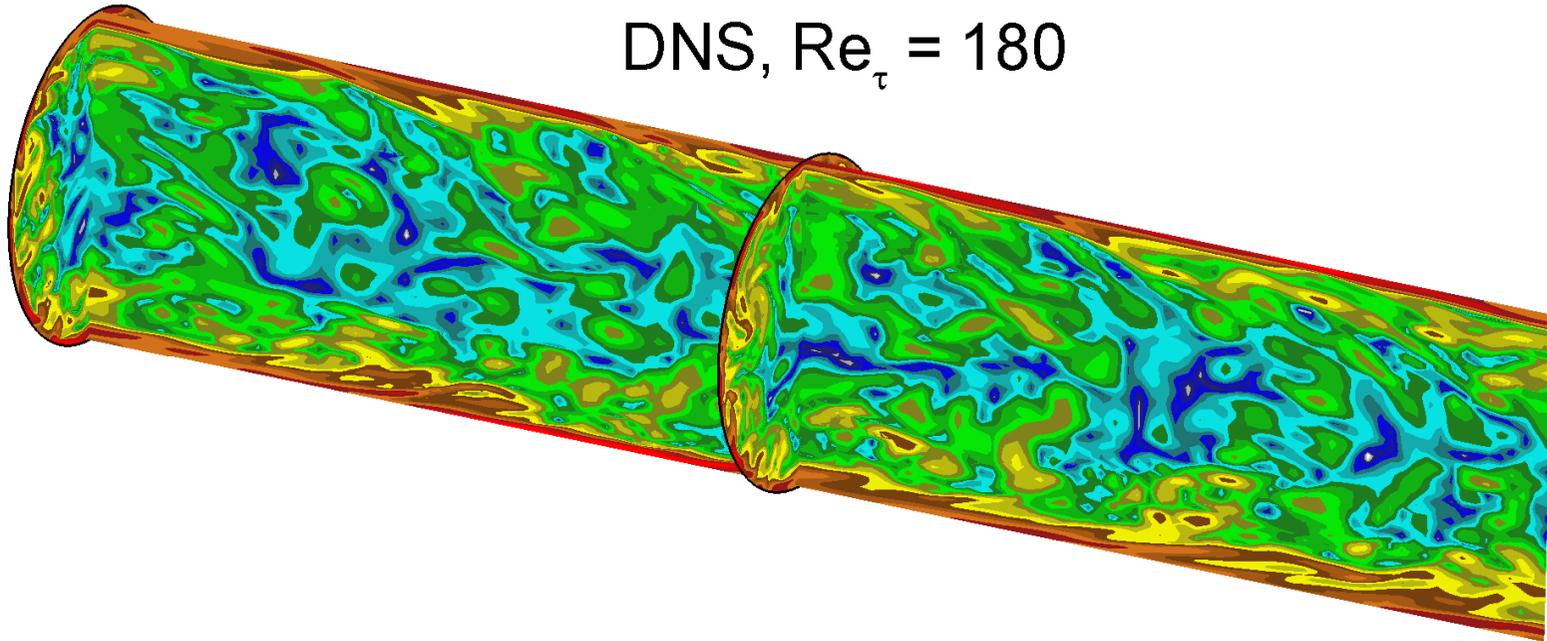
Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)  
2019 г.

# Содержание

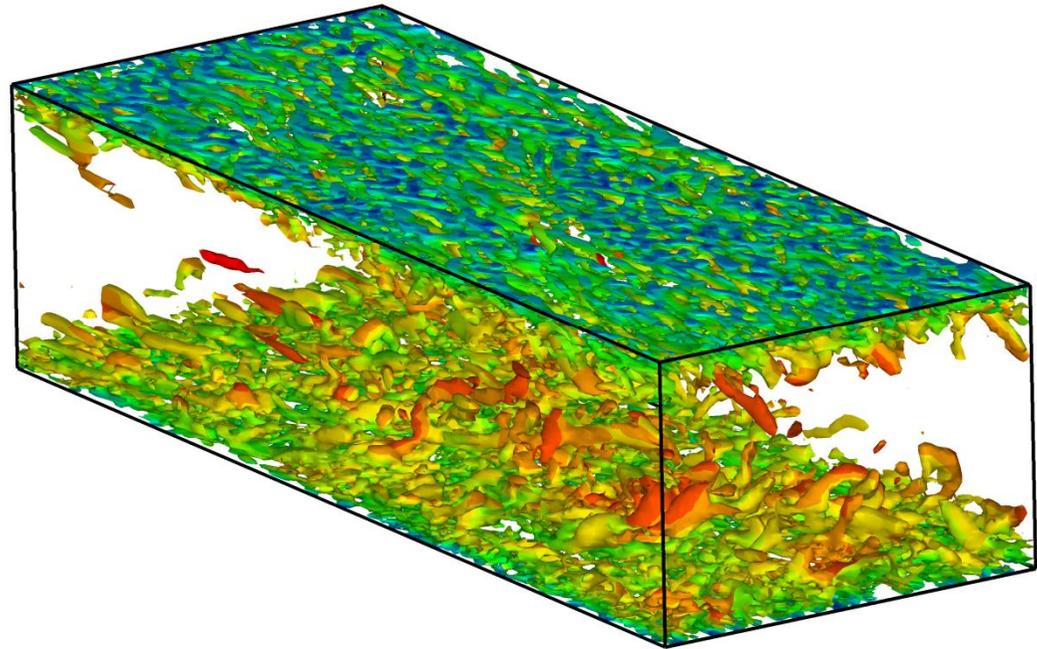
1. Особенности развитого течения в плоском канале
  - Параметры течения
  - Форма представления результатов
2. Требования к расчетной сетке
3. LES пристенных течений
  - Модель Смагоринского
  - IDDES
  - WMLES при высоких числах  $Re$
4. Практика расчетов

# Течение в круглой трубе

DNS,  $Re_\tau = 180$



# Развитое течение в канале



- Простейшее пристенное течение
  - Декартова сетка
- Периодическое в продольном и поперечном направлении
  - Не требуется задание турбулентных пульсаций на входной границе
- Хорошо подходит для проверки способности вихреразрешающих подходов к расчету турбулентных течений

# Масштабы

- Характерные масштабы

- Линейный масштаб

- ✓ Высота  $H$  или полувысота  $h=H/2$

- Скоростные масштабы

- ✓ Максимальная по сечению скорость  $U_{max}$

- ✓ Среднерасходная скорость  $U_{bulk}$

- ✓ Динамическая скорость  $u_\tau$



- На практике используют разные числа Рейнольдса

$$Re_\tau = u_\tau \cdot h / \nu \quad \text{или} \quad Re_H = U_{bulk} \cdot H / \nu$$

- Эмпирическая корреляция  $Re_H \approx 14.64 \cdot (Re_\tau)^{8/7}$

- В установившемся течении влияние градиента давления компенсируется трением о стенки

$$\int_V |\nabla p| = \int_S \tau_w \quad \Rightarrow \quad 2\tau_w = H \frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_\tau^2}{h} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

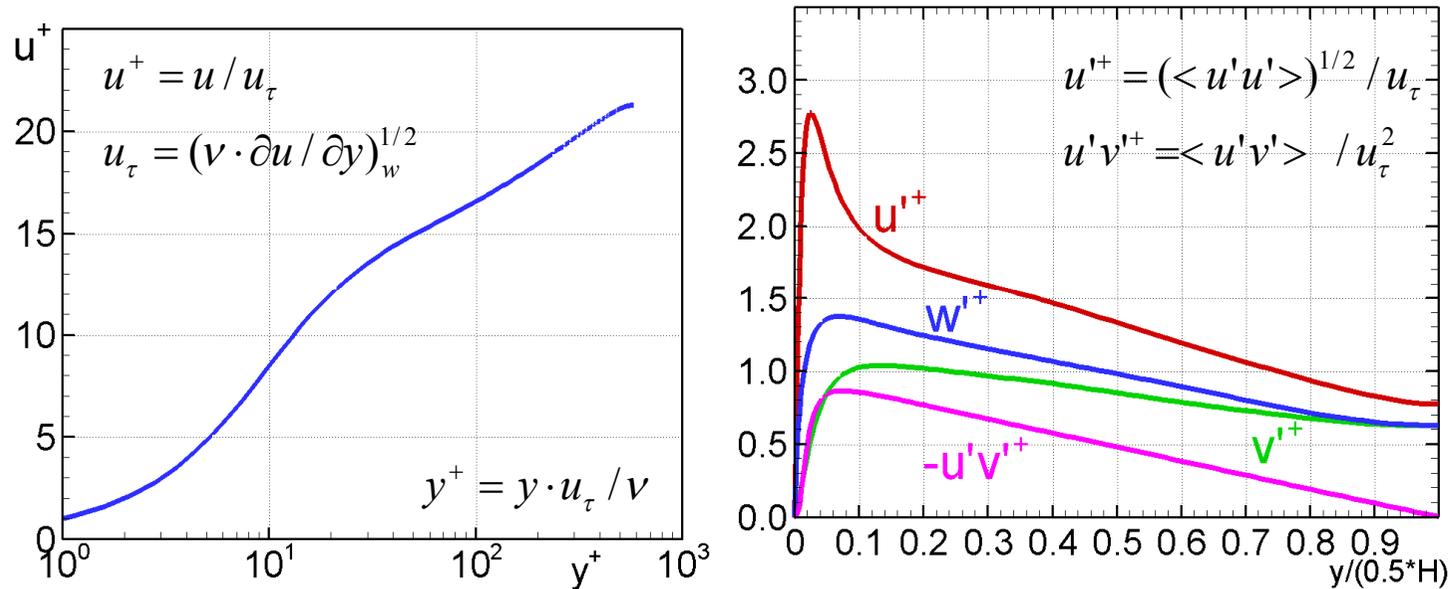
Градиент давления определяет динамическую скорость  $u_\tau$   
и число Рейнольдса  $Re_\tau$

# Установившееся течение

- Продольная компонента скорости зависит только от поперечной координаты
  - Профиль полных касательных напряжений – линейный

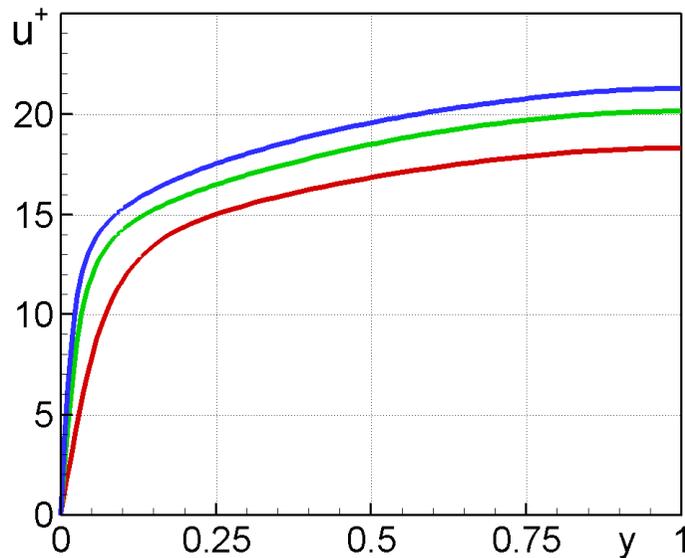
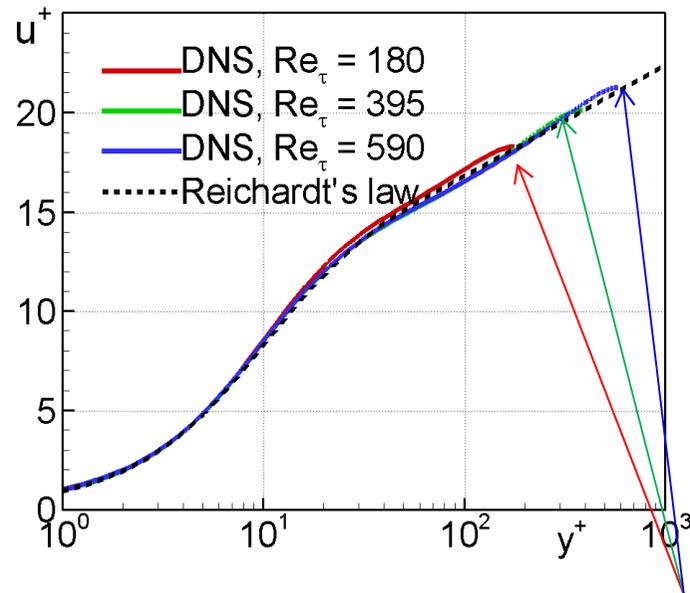
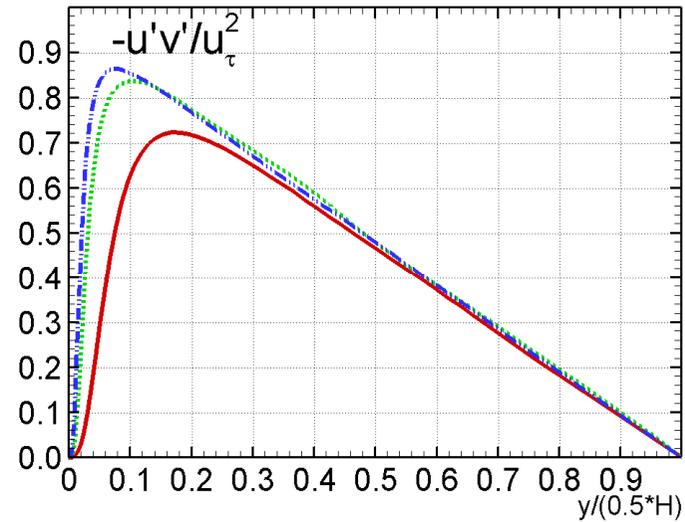
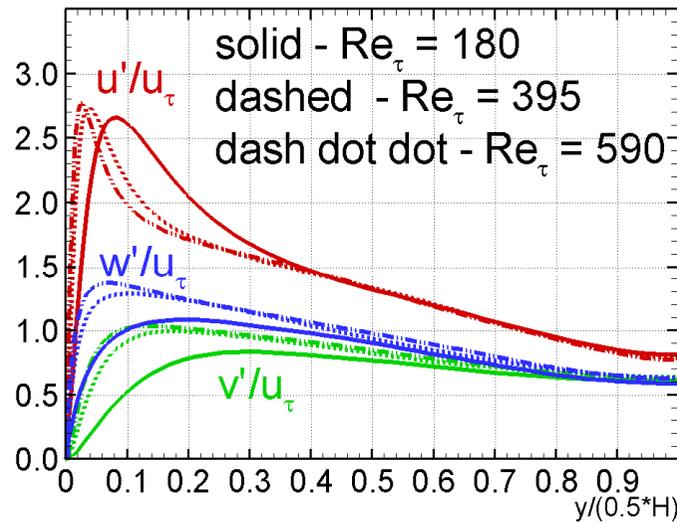
$$\frac{d\tau_\Sigma}{dy} = \frac{d}{dy} \left( \nu \frac{du}{dy} - \overline{u'v'} \right) = \frac{d}{dy} \left( (\nu + \nu_T) \frac{du}{dy} \right) = \frac{dp}{dx} = const \quad \longrightarrow \quad \frac{\tau_\Sigma}{\tau_w} = 1 - \frac{y}{h}$$

- В ламинарном случае аналитическое решение – парабола Пуазейля
- В турбулентном случае профиль скорости удовлетворяет закону стенки
  - ✓ В отличие от пограничного слоя отсутствует внешняя область



Типичные профили скорости и турбулентных напряжений  
в переменных закона стенки

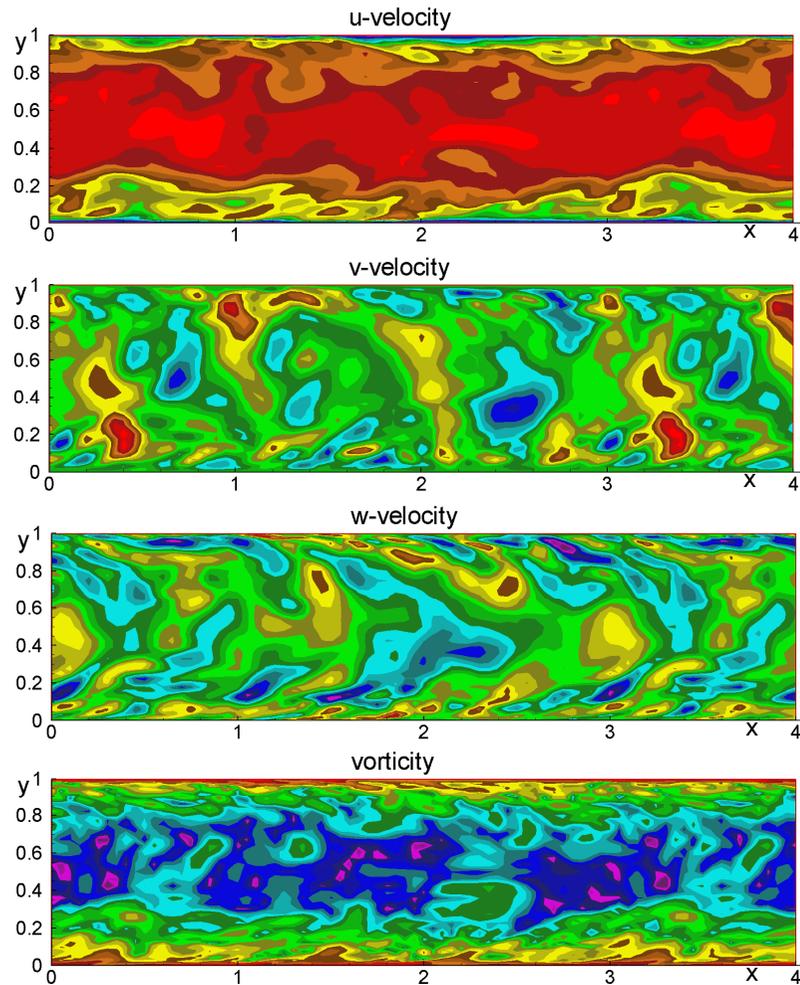
# Результаты DNS при умеренных числах $Re$



Значение  $y^+$  в центре канала равно числу Рейнольдса  $Re_\tau$

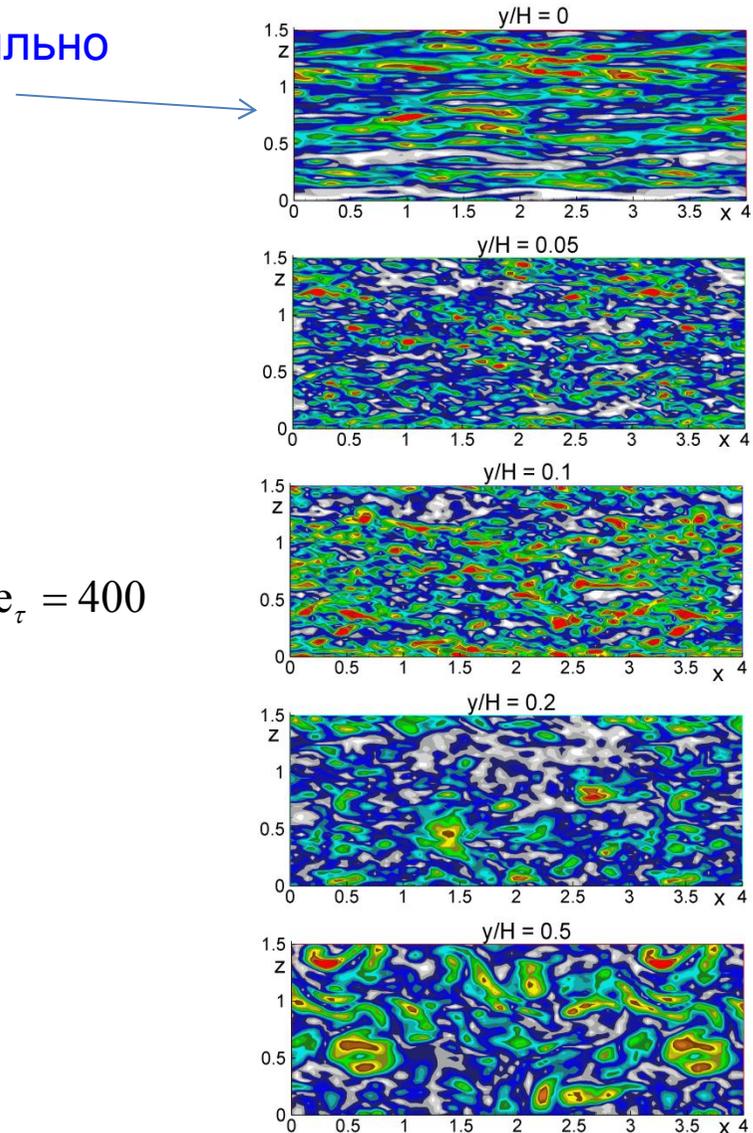
# Типичные турбулентные структуры

В окрестности стенки турбулентные вихри сильно вытянуты в продольном направлении



Поля переменных в плоскости XY

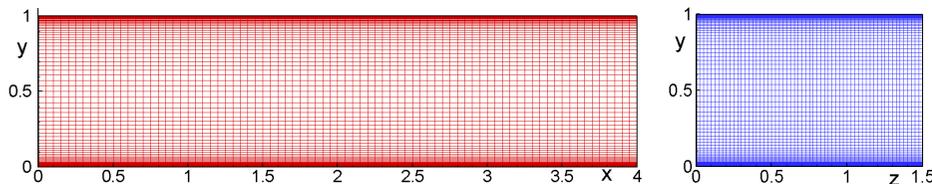
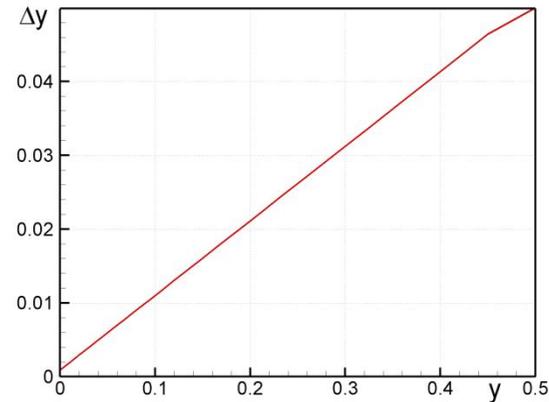
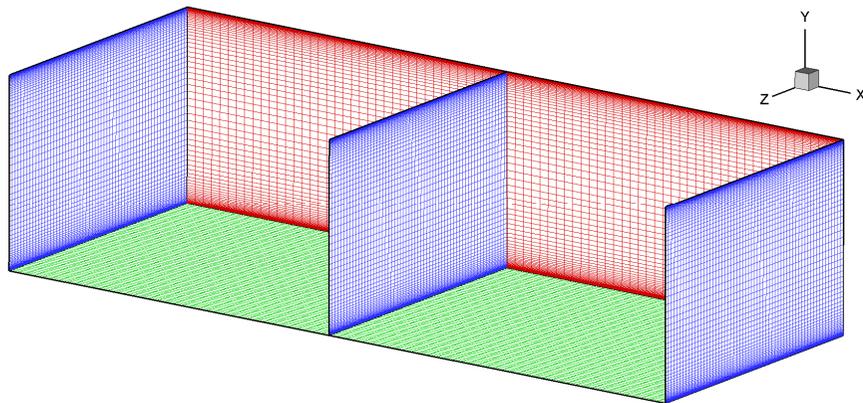
$$Re_\tau = 400$$



Поле завихренности в плоскости XZ

# Требования к расчетной сетке WMLES

- Турбулентные вихри вытянуты вдоль потока
  - Шаг «оптимальной» сетки в продольном направлении должен быть больше, чем в поперечном  $\Delta_x > \Delta_z$ 
    - ✓ Обычно  $\Delta_x = 2 \cdot \Delta_z$



$$\Delta_x = 0.05H, \Delta_z = 0.025H$$

$$\Delta_z \leq (\Delta_y)_c \leq \Delta_x$$

$$(\Delta_y)_w^+ \leq 1 \left( (\Delta_y)_w \leq H / (2 \text{Re}_\tau) \right)$$

$$\Delta^+ = \Delta \cdot u_\tau / \nu$$

- Пример расчетной сетки для LES для  $\text{Re}_\tau = 395$ 
  - Общее число узлов сетки  $N_x \times N_y \times N_z = 81 \times 77 \times 61 = 380457$

# Требования к сеткам при проведении DNS и LES

Поскольку минимальный размер вихрей пропорционален  $l^+$ , критерии качества сетки определяются в переменных закона стенки

- DNS

- Очень хороший:  $\Delta_x^+ = 10, \Delta_z^+ = 7, (\Delta_y^+)_w \leq 1, \Delta_z^+ \leq (\Delta_y^+)_c \leq \Delta_x^+$

- Хороший:  $\Delta_x^+ = 15, \Delta_z^+ = 10, (\Delta_y^+)_w \leq 1, \Delta_z^+ \leq (\Delta_y^+)_c \leq \Delta_x^+$

- Посредственный:  $\Delta_x^+ = 20, \Delta_z^+ = 10, (\Delta_y^+)_w \leq 1, \Delta_z^+ \leq (\Delta_y^+)_c \leq \Delta_x^+$

- Дальше уже не DNS

- LES

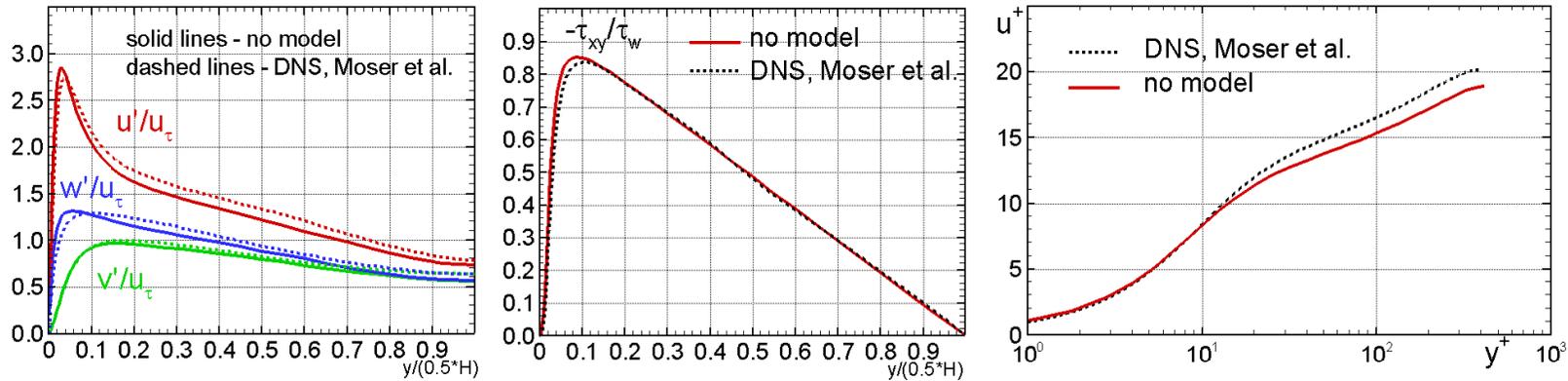
- Очень хороший:  $\Delta_x^+ = 20, \Delta_z^+ = 10, (\Delta_y^+)_w \leq 1, \Delta_z^+ \leq (\Delta_y^+)_c \leq \Delta_x^+$

- Хороший:  $\Delta_x^+ = 40, \Delta_z^+ = 20, (\Delta_y^+)_w \leq 1, \Delta_z^+ \leq (\Delta_y^+)_c \leq \Delta_x^+$

- Посредственный:  $\Delta_x^+ = 60, \Delta_z^+ = 30, (\Delta_y^+)_w \leq 1, \Delta_z^+ \leq (\Delta_y^+)_c \leq \Delta_x^+$

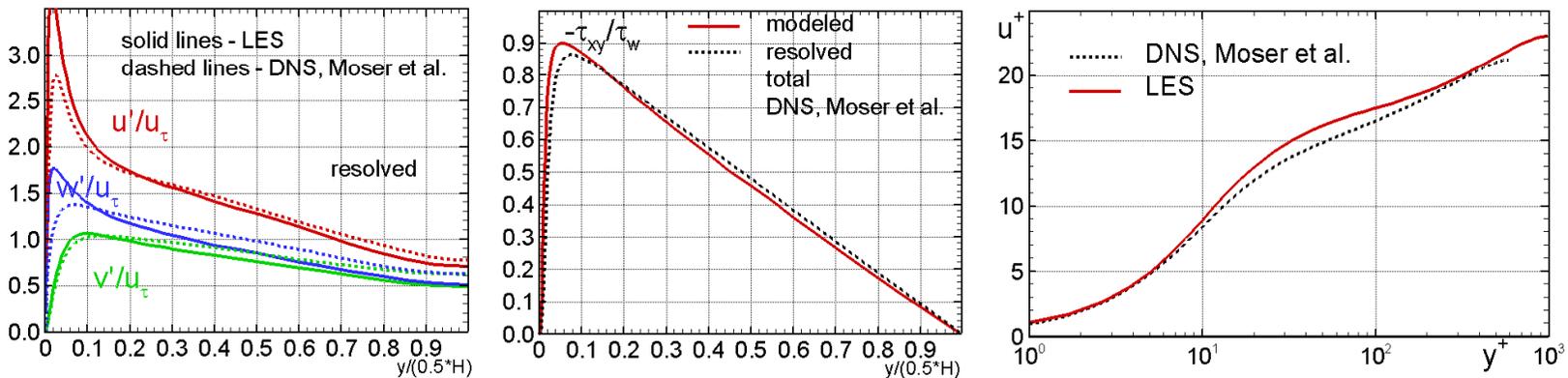
- Дальше уже не LES

# Пример DNS на грубой сетке



$Re_\tau = 400$ , no model,  $\Delta x^+ = 40$ ,  $\Delta z^+ = 20$  (DNS, Moser et al. at  $Re_\tau = 395$ )

Профиль скорости заметно отклоняется от логарифмического закона



$Re_\tau = 1000$ , no model,  $\Delta x^+ = 100$ ,  $\Delta z^+ = 50$  (DNS, Moser et al. at  $Re_\tau = 590$ )

# LES пристенных течений

Полные напряжения

$$\langle \tau_{total} \rangle = \langle u_i' u_j' \rangle + \langle \tau_{ij} \rangle$$

состоят из разрешенной

$$\langle u_i' u_j' \rangle = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle$$

и моделируемой частей

$$\langle \tau_{ij} \rangle = -2 \langle \nu_t \cdot S_{ij} \rangle + 2/3 \cdot \langle k_t \rangle \cdot \delta_{ij}$$

- Простейшая модель для определения подсеточной вязкости - модель Смагоринского

$$\nu_t = f_{VD} \cdot (\Delta_{LES})^2 |\bar{S}| \quad |\bar{S}| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$$

- При расчете пристенных течений используют демпфирующую функцию

$$f_{VD} = 1.0 - \exp(-(y^+ / A^+)^3), \quad A^+ = 25$$

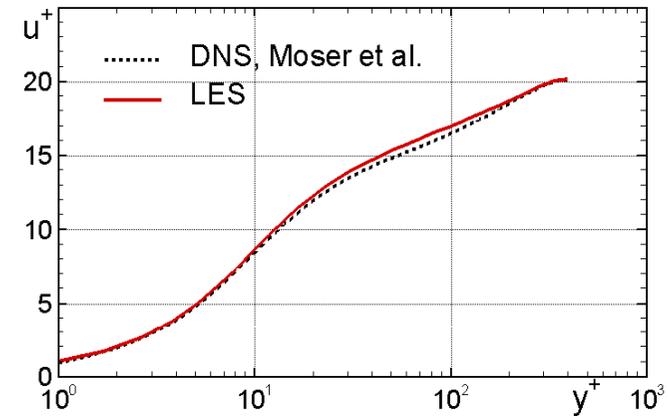
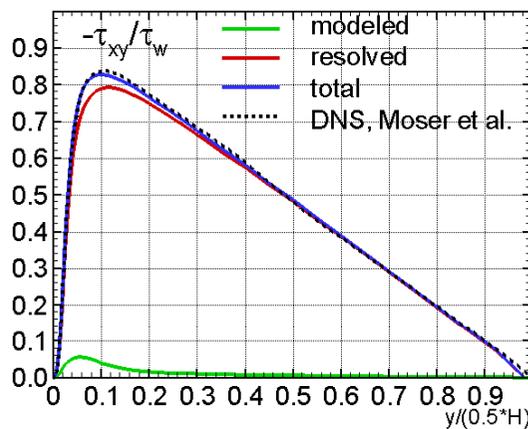
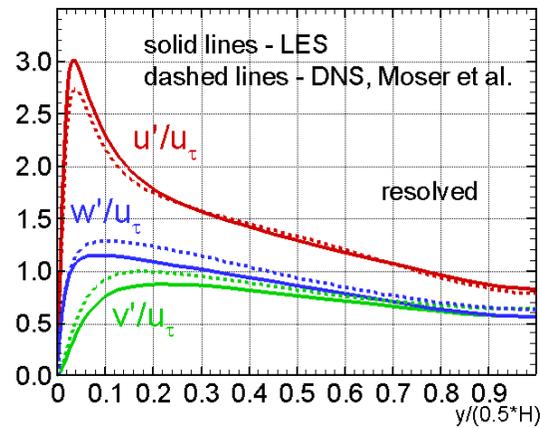
и ограничивают линейный масштаб формулой Прандтля

$$\Delta_{LES} = \min(\kappa \cdot d_w, C_{SMAG} \bar{\Delta}) \quad \bar{\Delta} = (\Delta_x \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z)^{1/3} = Vol^{1/3}$$

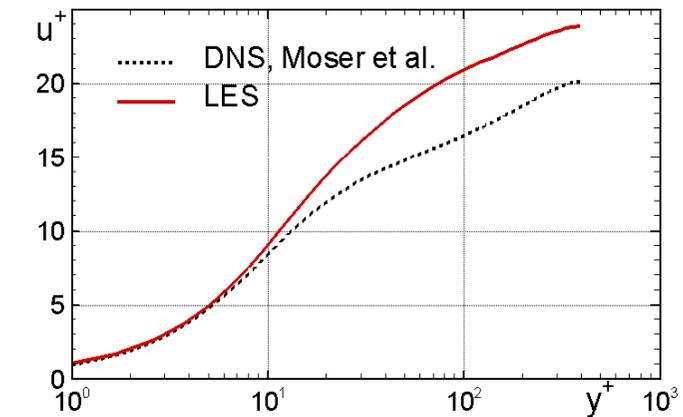
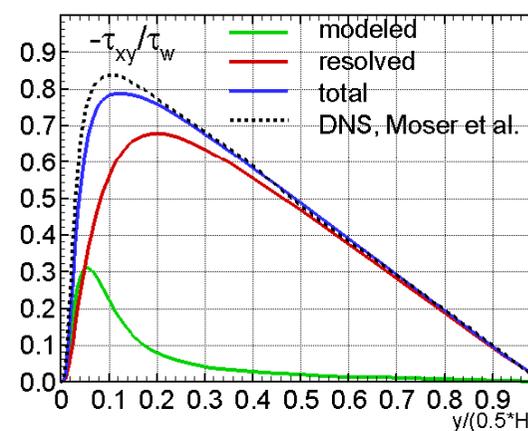
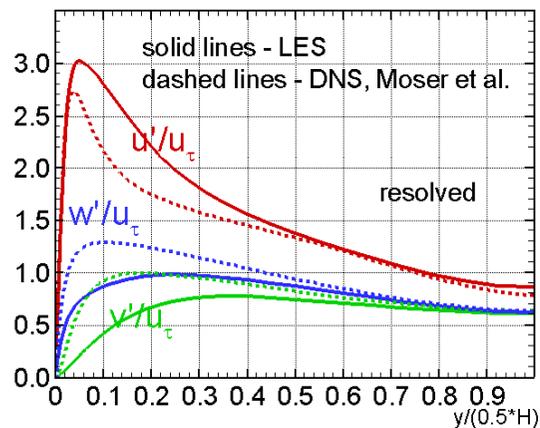
- Калибровка константы в однородной изотропной турбулентности  $C_{SMAG} = 0.2$

# Модель Смагоринского в канале

- Результаты при значении константы  $C_S=0.2$  существенно отличаются от DNS
  - Для получения правильного результата необходимо значение  $C_S=0.1$

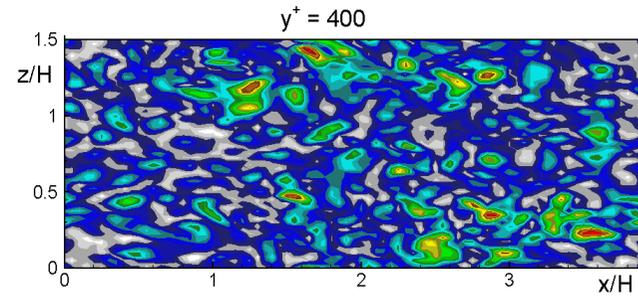
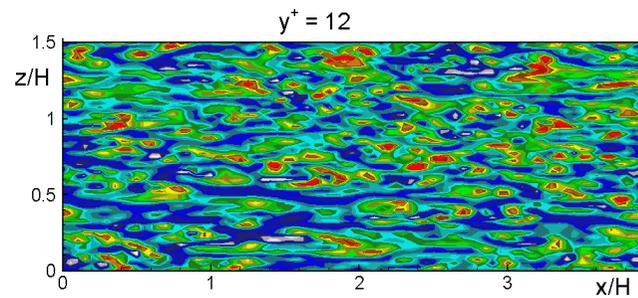
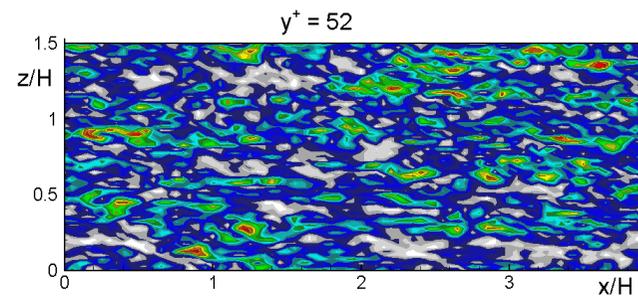
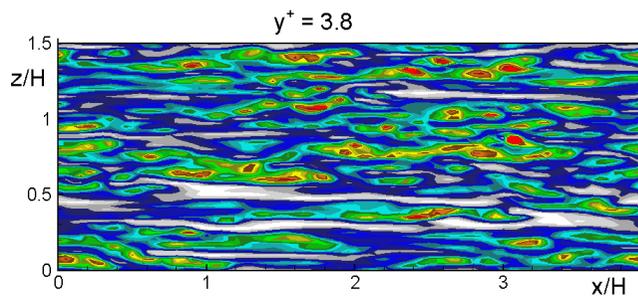


$Re_\tau = 400$ , LES Smagorinsky,  $\Delta = Vol^{1/3}$ ,  $C_{SMAG} = 0.1$

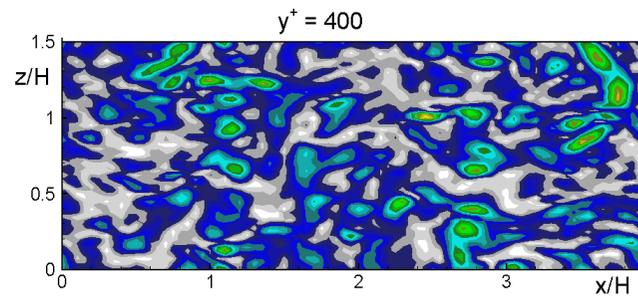
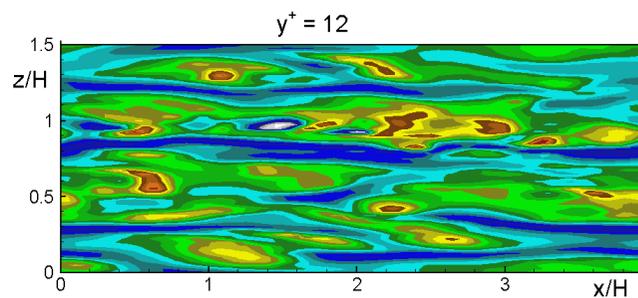
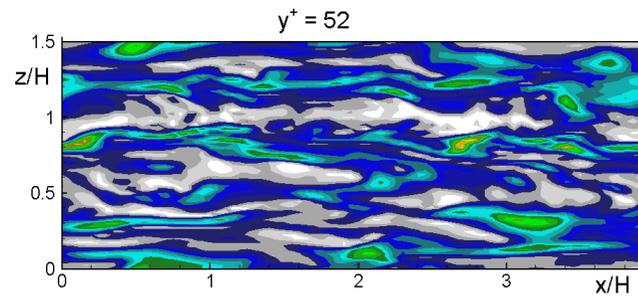
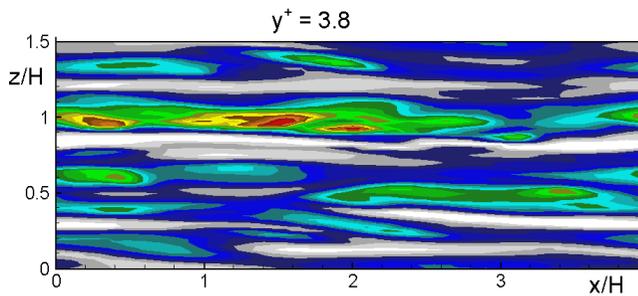


$Re_\tau = 400$ , LES Smagorinsky,  $\Delta = Vol^{1/3}$ ,  $C_{SMAG} = 0.2$

# Модель Смагоринского в канале



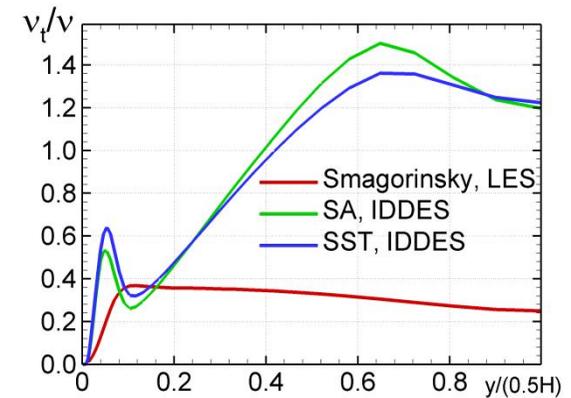
$C_S = 0.1$



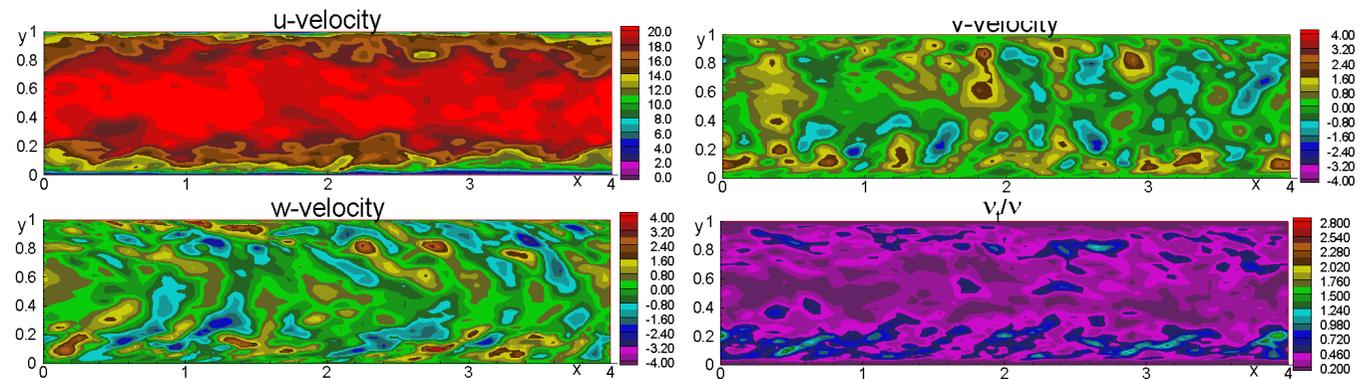
$C_S = 0.2$

# Другие подходы: IDDES

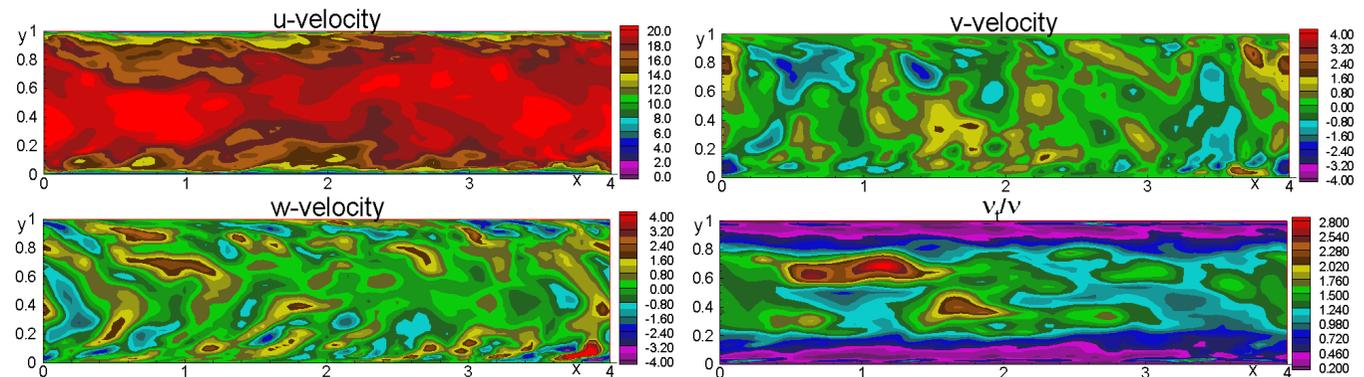
Несмотря на существенное различие в профиле подсеточной вязкости, турбулентные структуры подобны для разных подходов



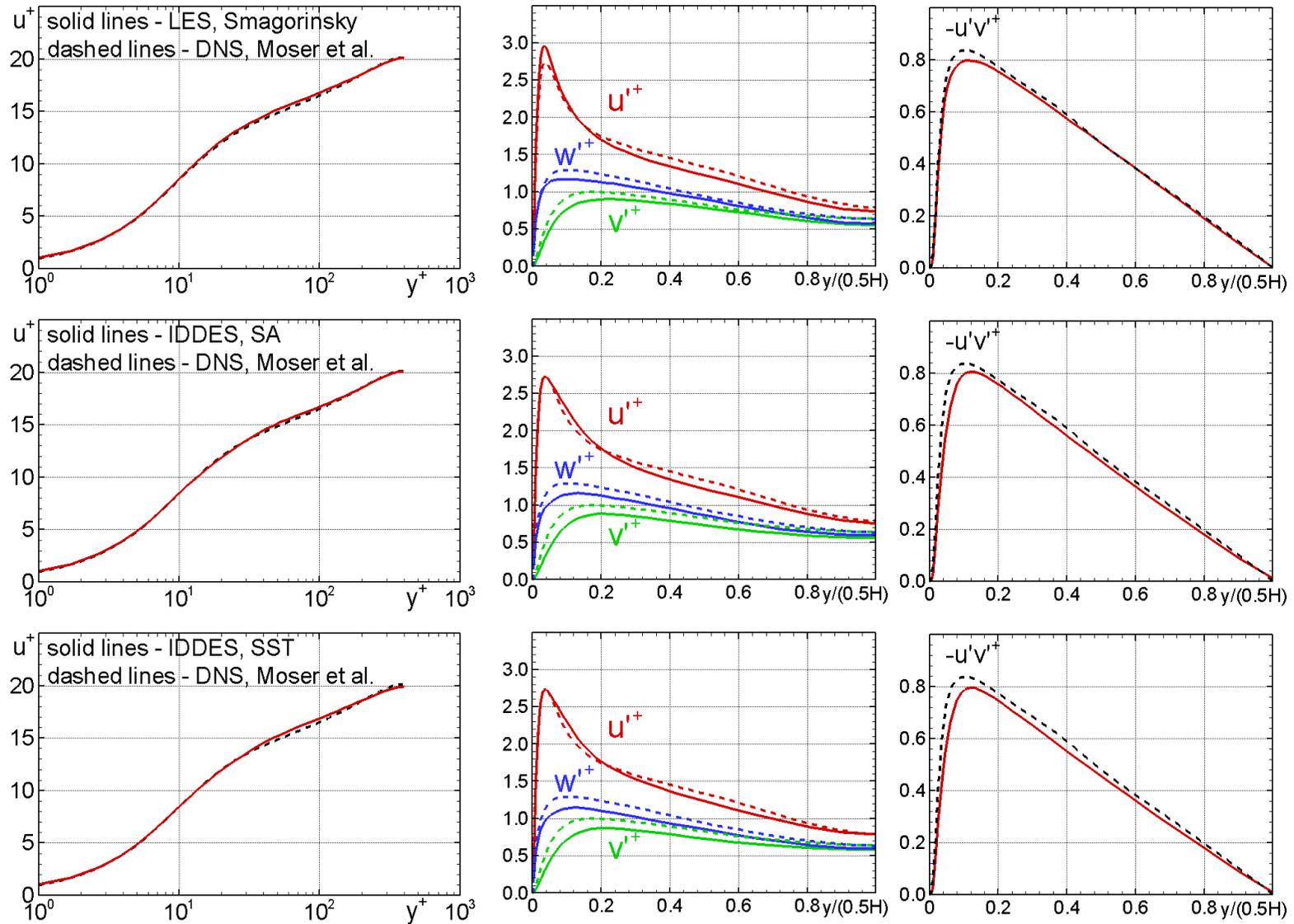
Модель  
Смагоринского



SA IDDES



# Другие подходы: IDDES



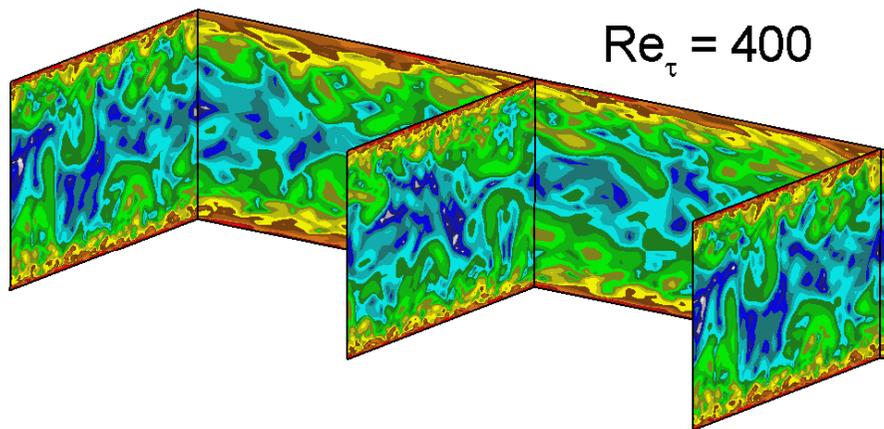
Как и модель Смагоринского с константой  $C_S=0.1$ , обе версии IDDES (SA и SST) хорошо согласуются с результатами DNS

# Высокие числа Рейнольдса

При увеличении числа Рейнольдса необходимо либо существенно измельчать сетку (сохраняя  $\Delta x^+$ ,  $\Delta y^+$ ,  $\Delta z^+$ ) либо использовать модели с WMLES свойствами

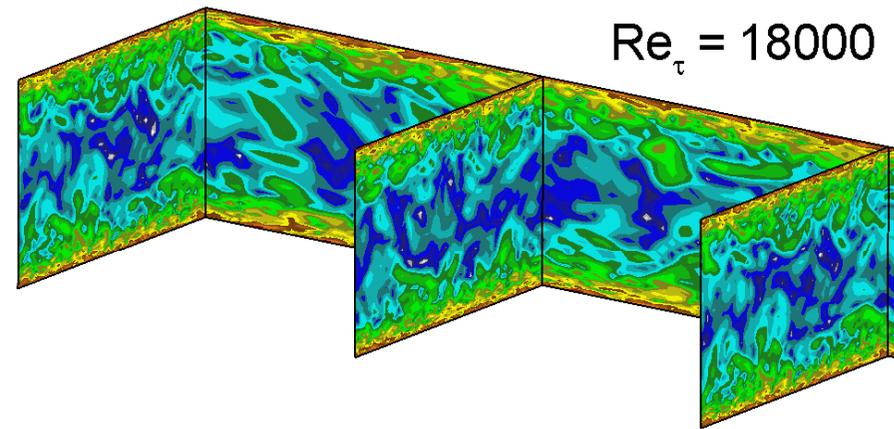
$$\text{Re}_\tau = 400$$

$$\Delta_x^+ = 40, \Delta_z^+ = 20, (\Delta_y^+)_w \leq 1, (\Delta_y^+)_c = 30$$



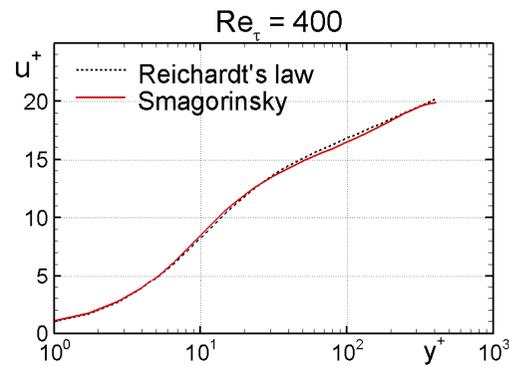
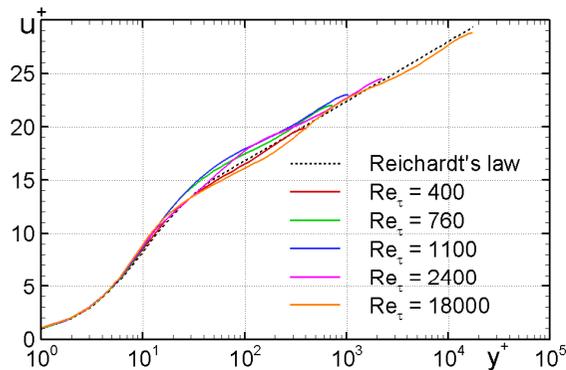
$$\text{Re}_\tau = 18000$$

$$\Delta_x^+ = 2000, \Delta_z^+ = 1000, (\Delta_y^+)_w \leq 1, (\Delta_y^+)_c = 1500$$



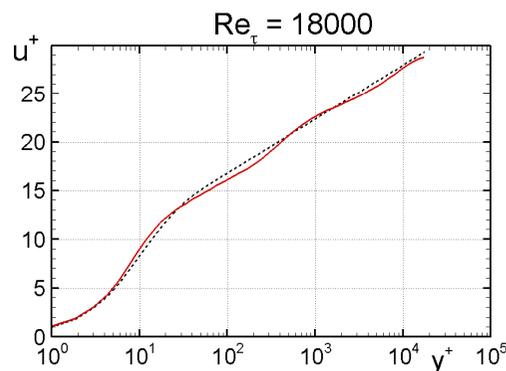
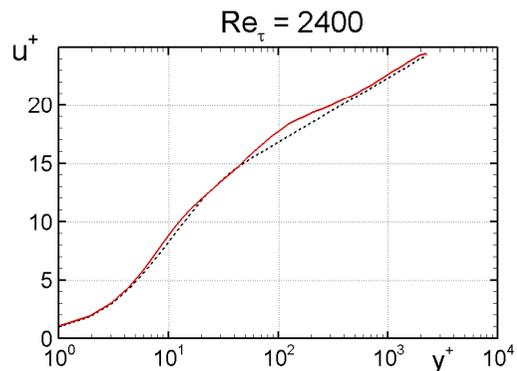
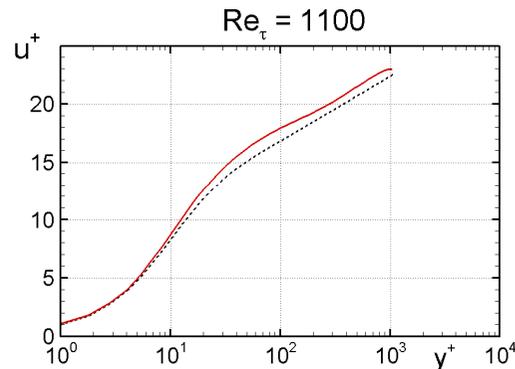
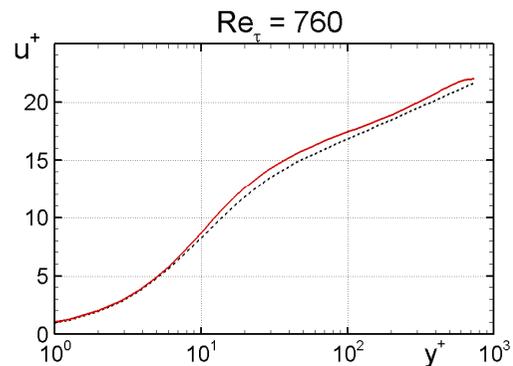
Алгебраическая WMLES модель на основе модели Смагоринского

# Высокие числа Рейнольдса



$$\text{Re}_\tau = 400$$

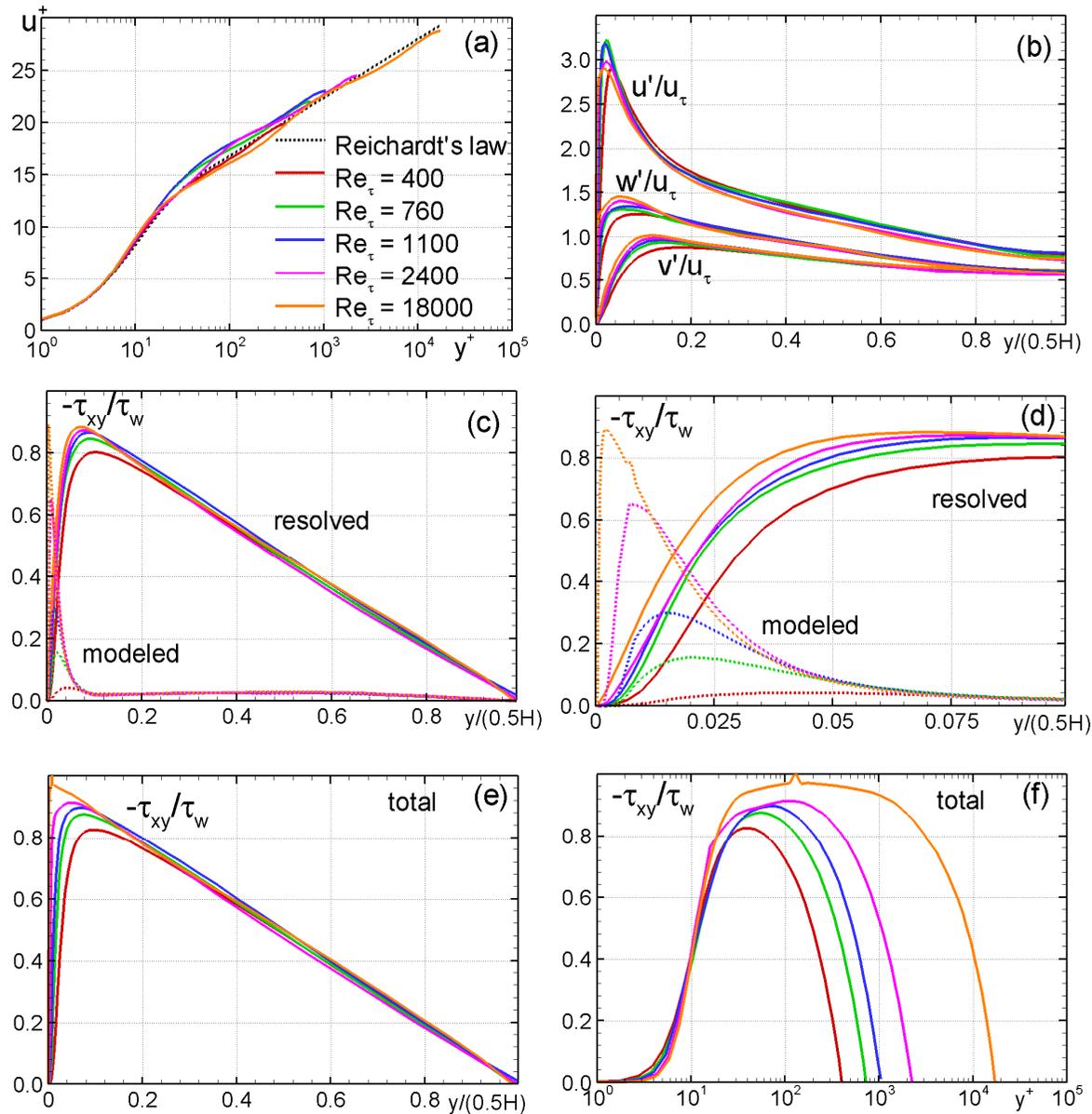
$$\Delta_x^+ = 40, \Delta_z^+ = 20, (\Delta_y^+)_w \leq 1, (\Delta_y^+)_c = 30$$



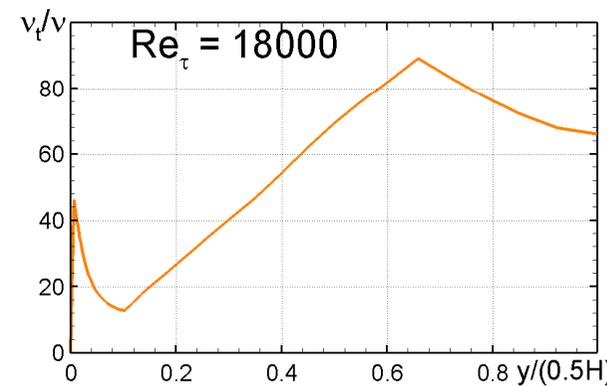
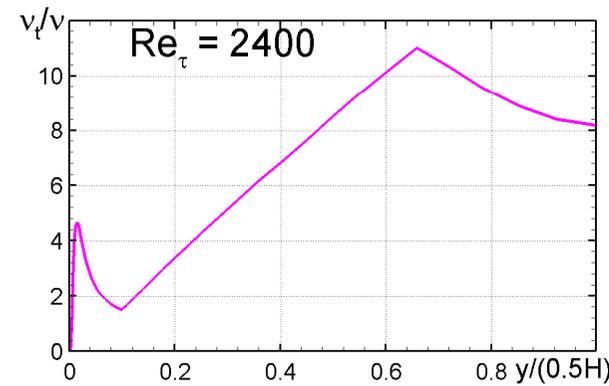
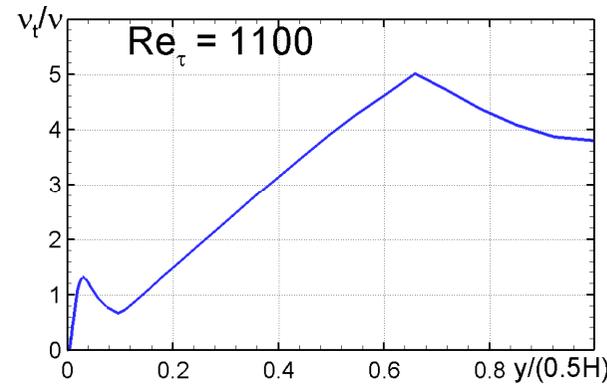
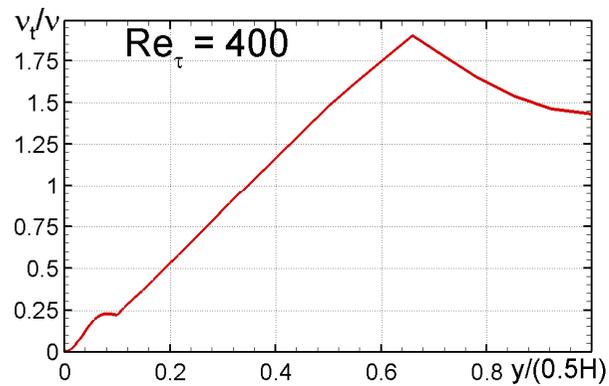
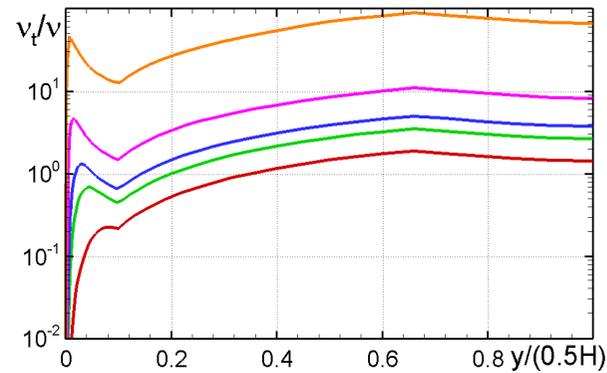
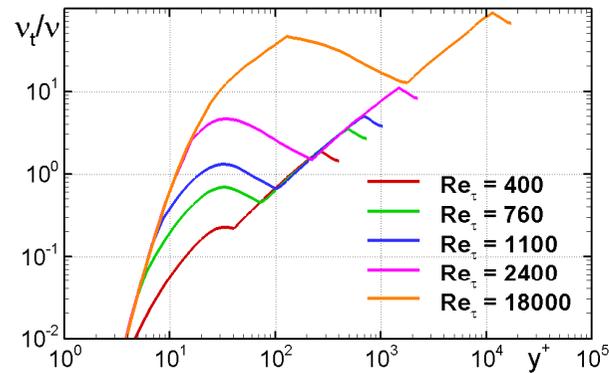
$$\text{Re}_\tau = 18000$$

$$\Delta_x^+ = 2000, \Delta_z^+ = 1000, (\Delta_y^+)_w \leq 1, (\Delta_y^+)_c = 1500$$

# Высокие числа Рейнольдса

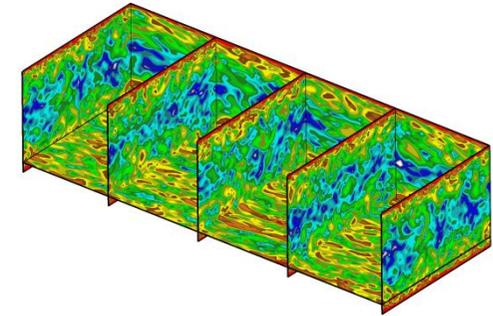


# Высокие числа Рейнольдса



# Практика расчетов

## Начальное приближение

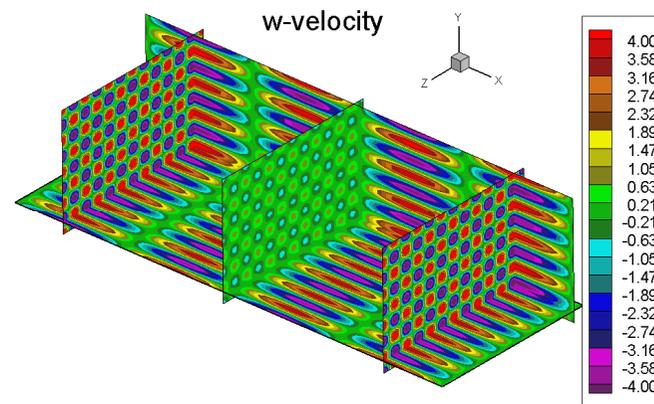
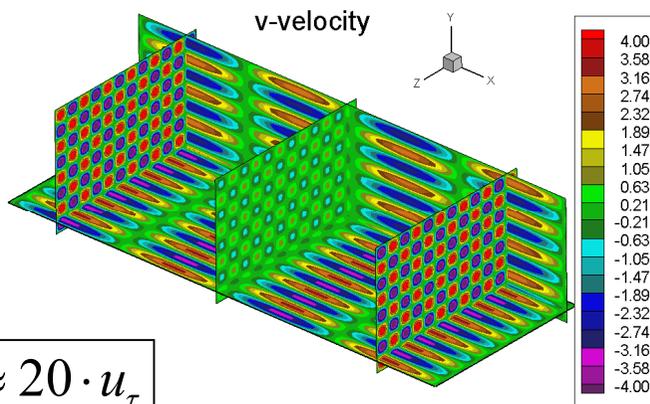


- В качестве начального приближения вполне подойдет поле «от другой модели»
- Если нет и его, то начальное приближение можно сгенерировать следующим образом

$$u = \langle u \rangle + u' \quad \langle u \rangle = u_0 \quad u' = 0$$

$$v = \langle v \rangle + v' \quad \langle v \rangle = 0 \quad v' = 0.3 \cdot u_0 \cdot \sin\left(0.5 \frac{2\pi x}{H}\right) \cdot \sin\left(4.0 \frac{2\pi y}{H}\right) \cdot \sin\left(4.0 \frac{2\pi z}{H}\right)$$

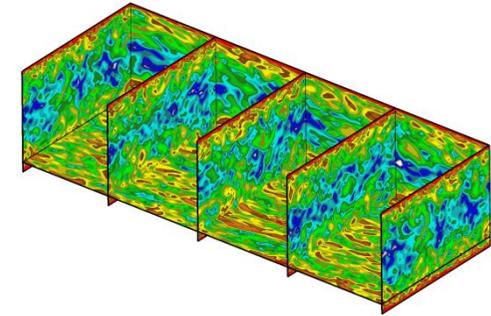
$$w = \langle w \rangle + w' \quad \langle w \rangle = 0 \quad w' = 0.3 \cdot u_0 \cdot \sin\left(0.5 \frac{2\pi x}{H}\right) \cdot \cos\left(4.0 \frac{2\pi y}{H}\right) \cdot \cos\left(4.0 \frac{2\pi z}{H}\right)$$



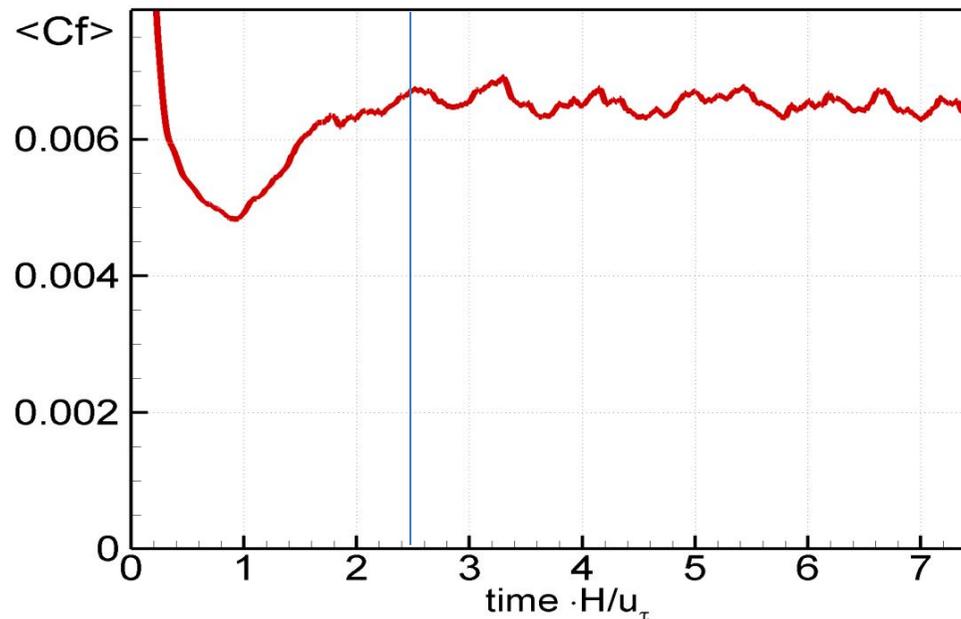
$$u_0 = U_b \approx 20 \cdot u_\tau$$

# Практика расчетов

## Сколько считать и осреднять



$$T = T_{init} + T_{aver} = 150 \cdot H / U_b = 7.5 \cdot H / u_\tau$$



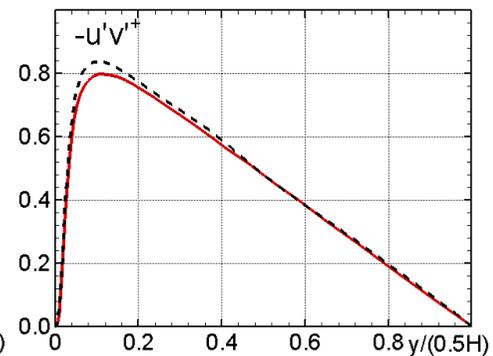
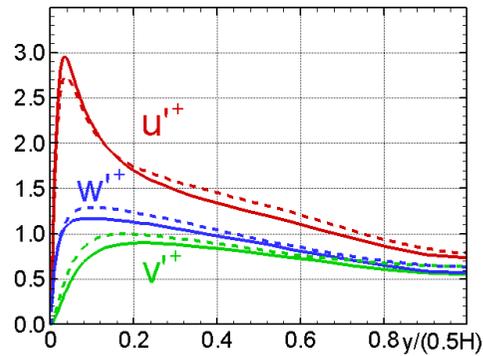
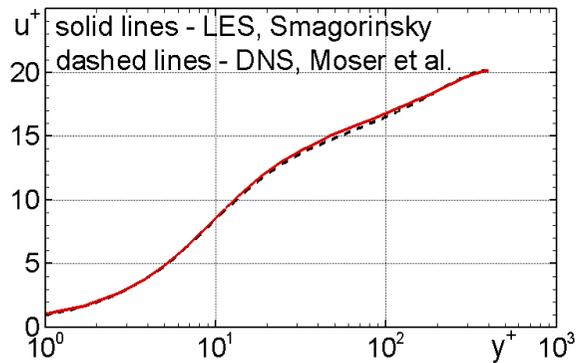
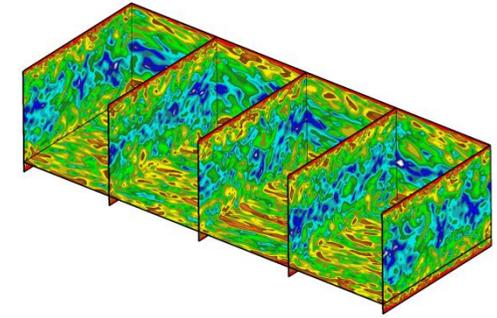
Установление к статистически  
равновесному решению

$$T_{init} = 50 \cdot H / U_b = 2.5 \cdot H / u_\tau$$

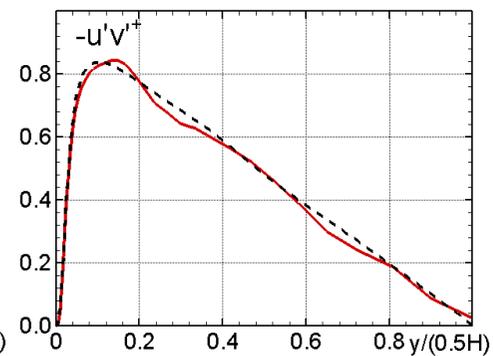
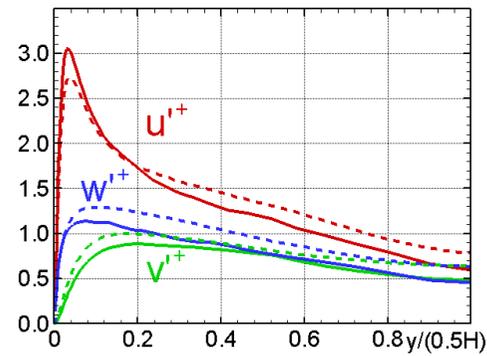
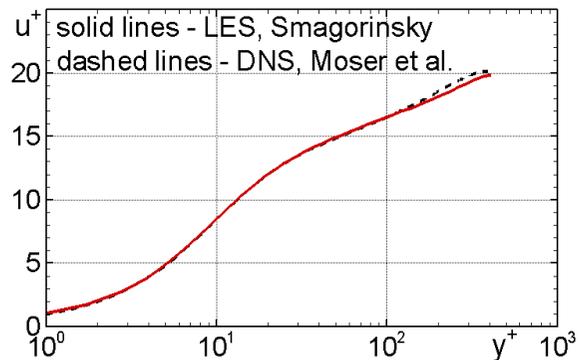
Осреднение по времени

$$T_{aver} = 100 \cdot H / U_b = 5.0 \cdot H / u_\tau$$

# Практика расчетов Быстрый анализ результатов



Осреднение по времени и пространству



Осреднение только по пространству

## Резюме

- Установившееся течение в канале является простым и информативным тестом для оценки способности вихреразрешающих подходов к расчету пристенных течений
- Даже для этого, самого простого теста, требуется проведение нестационарного трехмерного расчета на сетке около 0.5 миллиона ячеек
  - В зависимости от мощности компьютера такой расчет длится от нескольких часов до нескольких дней