

Министерство образования Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет “Военмех”

И.А. БЕЛОВ, С.А. ИСАЕВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2001

УДК 532.517.4

Б 43

Моделирование турбулентных течений: Учебное пособие / И.А. Белов, С.А. Исаев, Балт. гос. техн. ун-т. СПб., 2001. 108 с.

Дан структурный анализ одного из важнейших направлений в исследовании турбулентных течений, связанного с конструированием моделей турбулентности. Представлена классификация моделей и охарактеризованы наиболее известные их представители на ряде примеров. Преимущественное внимание уделено вопросам применения моделей турбулентности в рамках сложившихся вычислительных технологий. В этом плане данный материал является приложением к руководствам для известных пакетов прикладных программ (например, FLOW3D, PHOENICS, FIRE, FLUENT и др.).

Предназначено для студентов и аспирантов, проходящих подготовку в области механики жидкости, газа и плазмы. Полезно для обучающихся и специалистов по теплофизике, энергетике и другим смежным дисциплинам.

Ил. 41. Табл.9. Библиогр.: 30 назв.

Рецензенты: кафедра аэродинамики и динамики полета Академии гражданской авиации (зав.каф., канд.техн.наук, проф. Ю.И.Матвеев), д-р физ. - мат.наук, проф. В.А.Сосинович

*Утверждено
редакционно-издательским
советом БГТУ*

ВВЕДЕНИЕ

Физические аспекты моделирования турбулентности

1. *Турбулентность как составная часть курсов по аэрогидромеханике. Немеркнущая актуальность. Точка приложения ума титанов. Каталоги моделей, включенных в пакеты прикладных программ.*

Турбулентность с позиций современной аэрогидромеханики представляет вполне сложившуюся область знаний, содержащую полезные для инженерной практики сведения. В настоящее время широко распространенные программно-технические комплексы (иначе, коды или пакеты прикладных программ) невозможно представить без надлежащего каталога моделей турбулентности различного уровня сложности. Несмотря на значительные успехи в разработке моделей, теоретические конструкции турбулентности как фундаментальной науки еще далеки от своей завершенности. Так, в 1998г. в Оксфорде на международном семинаре по проблемам вычислительной гидродинамики моделирование турбулентности (а именно, прямое численное моделирование и моделирование крупными вихрями) было признано одним из трех актуальных научных направлений (вместе с решением сопряженных задач аэромеханики и проблем окружающей среды). Следует подчеркнуть, что на протяжении полутора минувших столетий многие выдающиеся умы аэрогидромехаников внесли свой вклад в эволюцию взглядов на турбулентность и сегодня, на этапе индустриального развития вычислительной гидродинамики десятки и сотни тысяч специалистов во всем мире занимаются расчетами различных турбулентных течений. Конечно, в данном курсе невозможно отразить все многообразие теории турбулентности (этому посвящены, например, обширные монографии Хинце [1], А.С.Монина и А.М. Яглома [2] и др.), как впрочем, и исчерпывающим образом представить все разработки в области моделей турбулентности. Тем не менее, преобладающее внимание здесь уделено принципам конструирования моделей и их наиболее употребительным конкретным примерам.

2. *Ламинарные и турбулентные течения. Переход. Критическое число Рейнольдса. Пример - течение в трубе.*

Наиболее характерные признаки и особенности турбулентных течений легче всего продемонстрировать на историческом примере – течении в круглой трубе.

Экспериментальное исследование установившегося потока жидкости с постоянной плотностью ρ и вязкостью μ в круглой горизонтальной трубе диаметром d проводится в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса, определенного по среднemasсовой скорости U . $Re = \rho U d / \mu$. За счет сил вязкого трения на длине трубы L давление падает от величины p_1 до p_2 . Поскольку расход жидкости по длине трубы неизменен, то из условия равновесия сил давления и трения следует выражение для среднего касательного напряжения на стенках трубы:

$$\tau_w = 1/4 d (p_1 - p_2) / L,$$

а коэффициент вязкого трения определяется как $c_f = \tau_w / (1/2 \rho U^2)$.

Визуализация картины течения в трубе с помощью окрашенной струйки жидкости показывает, что при низких числах Рейнольдса (до 2000) течение имеет плавный характер, когда струйки тока распространяются на большие расстояния, не смешиваясь друг с другом (рис.1,а). Такой режим течения называется ламинарным (слоистым). С ростом числа Re движение жидкости становится неустойчивым и струйки тока эпизодически размываются (рис.1,б). Такой режим определяется как переходный. И, наконец, как отметил О.Рейнольдс в 1883г., развивающийся по трубе поток характеризуется интенсивным перемешиванием и струйка жидкости превращается в

пятно, заполняющее все поперечное сечение (рис.1,в). Это движение жидкости называется турбулентным. Для него, как видно из графика зависимости $c_f(Re)$ на рис.1,г, характерно увеличение коэффициента трения по сравнению с ламинарным режимом.

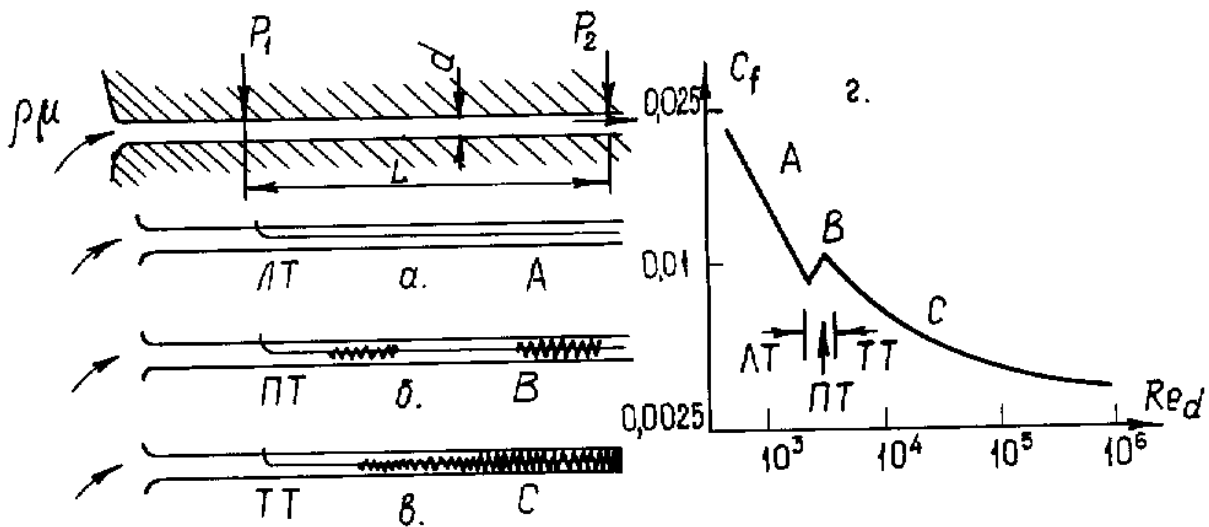


Рис.1

Переход от ламинарного к турбулентному режиму зависит от устойчивости исходного ламинарного течения по отношению к внешним возмущениям. Если вход в трубу сделать плавным, то ламинарное движение в трубе может поддерживаться при существенно больших числах Рейнольдса, например, до 50000.

Прогрессирующая неустойчивость ламинарного течения по отношению к малым возмущениям, которая является характерной для перехода от ламинарного течения к турбулентному, сопровождается усиливающимися пульсациями скорости относительно средней величины по пространству и по времени. По мере усиления пульсаций форма их постепенно изменяется от простых синусоидальных колебаний до беспорядочного завихренного движения с непрерывно меняющимся спектром длин волн и частот.

Если любую гидродинамическую величину (например, скорость движения частиц жидкости) в любой точке пространства представить в виде $\bar{U} = \bar{U} + u$, где \bar{U} – осредненная во времени (по сумме реализаций) величина скорости (ее математическое ожидание для достаточно большого числа замеров U во времени t); u – пульсационная составляющая скорости (ее дисперсия, если полагать, что $U(t)$ подвержена случайным изменениям), тогда реальное турбулентное течение можно условно разделить на две части: установившееся (со слоистой структурой) наподобие ламинарного течения; пульсационное (определяемое перемещением «обломков ламинарного течения» – турбулентных вихрей), которое происходит произвольным образом в пространстве (это подход Рейнольдса к исследованию турбулентных течений).

Вследствие того, что линии тока в осредненном и пульсационном движениях различны, осуществляется дополнительный (к ламинарному) перенос количества движения и энергии. Считают, что в этом случае перенос количества движения связан с «турбулентным трением» между слоями жидкости, а перенос тепла – с «турбулентной теплопроводностью». Переход к турбулентному режиму, как правило, сопровождается ускорением процесса обмена количеством движения и энергии в при-

стеночных слоях, в результате чего сопротивление тела и теплоотдача с поверхности возрастают.

3. *Наблюдения и образы. Трехмерный, нестационарный характер. Вихревая структура турбулентных течений. Растяжение вихрей. Масштабы. Энергия и масштаб турбулентности. Определение турбулентности по П.Брэдшоу.*

При описании турбулентного течения как пространственного и нестационарного процесса многие исследователи интерпретируют его как локальное вихревое движение со значительной завихренностью. Турбулентные вихри различных масштабов вызывают энергичное смешение и эффективные турбулентные напряжения, намного превышающие ламинарные.

Рассматривая течение около пластинки, можно представить схему крупных вихрей в развитом турбулентном пограничном слое (рис.2). Поток выше границы слоя имеет постоянную скорость U ; вихри двигаются в пределах слоя при беспорядочных колебаниях местной скорости порядка десятой части U . Самый большой размер вихря (l) сопоставим с толщиной пограничного слоя (δ). Размер турбулентных вихрей характеризует местный масштаб турбулентности.

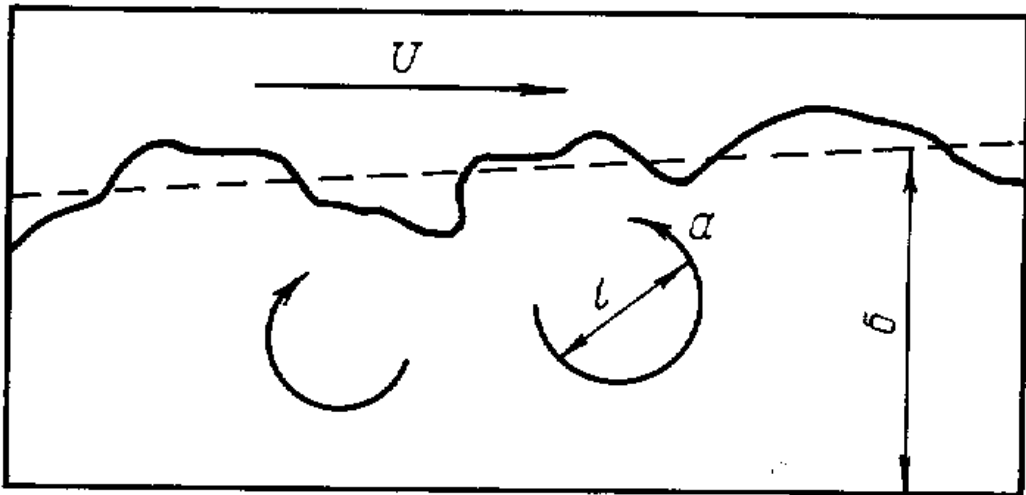


Рис.2

Важно подчеркнуть, что турбулентные вихри непрерывны и постоянно соприкасаются друг с другом, причем большие вихри содержат в себе вихри меньших размеров. В результате турбулентность трактуется как каскадный процесс передачи энергии от больших вихрей к малым. В конечном счете, самые маленькие вихри, размеры которых, кстати, намного превышают длину молекулярного пробега, рассеивают энергию в тепло посредством молекулярной вязкости.

Одновременно с вихревой интерпретацией, турбулентность трактуется как волновой процесс.

Главный физический механизм, который отвечает за распространение энергии по широкому диапазону длин волны, это растяжение вихрей. В процессе растяжения вихрей их кинетическая энергия вращения увеличивается, а масштаб уменьшается. Увеличение местных скоростей стимулирует растяжение других жидких элементов, запуская таким образом каскадный процесс интенсификации движения с постепенной редукцией масштабов подвергнутых растяжению вихрей. При этом мелкомас-

штабные вихри не сохраняют ориентации средней скорости деформации. Они имеют универсальную структуру, что облегчает их анализ.

В ламинарном течении под действием вязких напряжений, обусловленных молекулярной вязкостью, кинетическая энергия среднего течения превращается непосредственно во внутреннюю тепловую энергию (диссипация). В турбулентном течении вихри отбирают энергию из среднего течения и сохраняют ее некоторое время, пока она не перейдет к мелким диссипативным вихрям. Кинетическая энергия турбулентности, приходящаяся на единицу объема $1/2\rho(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$, сосредоточена в вихрях, создающих турбулентные напряжения, и распределена прямо пропорционально создаваемым напряжениям. Эти напряжения создаются крупными вихрями, обладающими наилучшей способностью взаимодействовать со средним течением. Более мелкие вихри служат лишь проводниками энергии к самым мелким вихрям, в которых она диссипируется вследствие вязкости. В центральной части типичного турбулентного течения в трубе (рис.1,в) по крайней мере половина кинетической энергии турбулентности и большая часть турбулентных напряжений обусловлены вихрями с длиной волны, превышающей радиус трубы. Размер диссипативных вихрей при этом зависит от вязкости; обычно их длина волны составляет меньше 1% радиуса трубы.

Турбулентное движение всегда имеет все три компоненты, даже если у средней скорости есть две составляющие.

Таким образом, по П.Брэдшоу [3], *турбулентность – это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения.*

4. Математические подходы к анализу турбулентности. Оценка возможностей компьютеров.

Исходной посылкой для математического описания турбулентных течений является приемлемость для их интерпретации системы уравнений Навье-Стокса, описывающей характеристики мгновенного течения жидкости.

Несмотря на значительный прогресс в подходах, основанных на решении указанной системы уравнений в рамках прямого численного моделирования или моделирования крупных вихрей, прежде всего обусловленный развитием суперкомпьютеров, пока еще нельзя использовать их для решения задач инженерной практики. Обоснованием этого служит оценка, согласно которой для воспроизводимого спектра турбулентных вихрей отношение характерных размеров крупных и мелкомасштабных вихрей имеет порядок $Re^{3/4}$. Даже на ближайшие несколько десятилетий определение всех турбулентных масштабов остается неразрешимой проблемой.

Статистическое направление, перспективное в общем плане для теории турбулентности, также не привело до сих пор к результатам, существенным для инженерной практики.

Еще сравнительно недавно состояние науки о турбулентности, по меткому выражению известного гидромеханика Лайтхилла, представляло «кладбище теорий, на котором каждая новая теория добавляет еще одну могилу».

В последние два десятилетия широкое распространение получили различные полуэмпирические модели феноменологического типа, связанные с тем или иным способом замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса. Как уже отмечалось, каталоги такого рода моделей содержатся во всех распространяемых программных продуктах.

5. Выбор модели.

Понятие «модель турбулентности» подразумевает совокупность эмпирических и иных соотношений, в том числе дополнительных дифференциальных уравнений. Долгое время значительные усилия были направлены на поиск универсальной модели турбулентности, способной прогнозировать широкий спектр турбулентных течений. Имело место заблуждение, что для такой модели число уравнений должно быть максимальным. Однако увеличение числа уравнений с неизбежностью требует соответствующей, подчас трудно достижимой эмпирической информации, которая необходима для моделирования членов, входящих в уравнения для характеристик турбулентности.

Здесь приводится ставший уже традиционным подход [4,5] к анализу турбулентных моделей: по числу дифференциальных уравнений, вводимых в дополнение к исходной системе уравнений движения и энергии. Конечно, невозможно исчерпывающим образом отразить все разработанные модели, но перечень базовых моделей представлен. Особое внимание уделено вычислительным аспектам реализации моделей, что делает излагаемый материал руководством по использованию моделей.

В заключение вводного раздела следует привести схему выбора той или иной модели турбулентности (рис.3) [4].

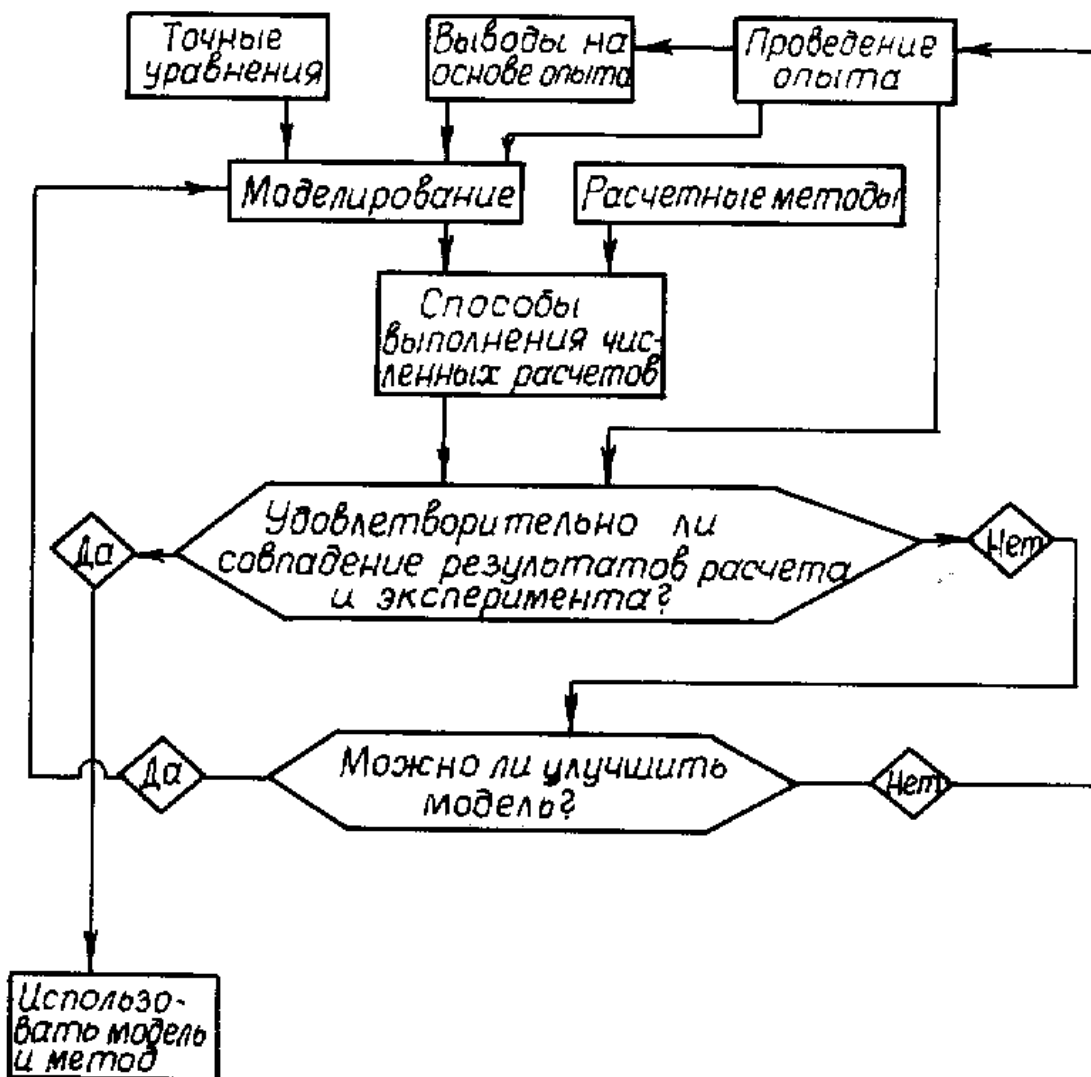


Рис.3

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОСТИ

1.1. Осредненные по Рейнольдсу уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

Система уравнений Навье-Стокса для описания турбулентного движения вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости при отсутствии массовых сил может быть представлена в векторно-тензорной форме:

$$\nabla \bullet \vec{V} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \bullet (\mu \nabla \vec{V}). \quad (1.2)$$

В скалярно-тензорной форме уравнения неразрывности и изменения количества движения записываются так:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{jk}. \quad (1.4)$$

С учетом уравнения неразрывности (1.3) уравнение (1.4) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_k) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{jk}. \quad (1.4a)$$

В уравнениях (1.1)-(1.4) используемые индексы определяют направления декартовой системы координат x_j (здесь $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; u_k, u_j – декартовы составляющие скорости в направлении соответствующих осей; p – давление; t – время; ρ – плотность жидкости; τ_{jk} – составляющие тензора вязких напряжений; $\tau_{jk} = \mu(\partial u_j / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_j)$; μ – коэффициент динамической (молекулярной) вязкости; \vec{V} – вектор местной скорости потока; $\vec{V} = \vec{e}_i u_i$; \vec{e}_i – единичные векторы; ∇ – оператор Гамильтона; $\frac{D}{Dt}$ – полная производная по времени.

С учетом уравнения неразрывности член, определяющий касательное трение, записывается как

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{jk} = \nu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j^2}, \quad (1.5)$$

где $\nu = \mu / \rho$ – коэффициент кинематической вязкости.

Как уже отмечалось, согласно подходу Рейнольдса, любые мгновенные значения гидродинамических параметров потока представляются в виде суммы осредненной величины (во времени) и ее пульсационной составляющей. Фактически это означает, что гидродинамическая величина является случайной, осреднение которой во времени дает ее математическое ожидание, а пульсационная составляющая которой – дисперсия случайной величины. Обозначая осредненную во времени величину $(\bar{\quad})$, а пульсационную $(\quad)'$, для составляющей скорости u_j , например, можно записать $u_j = \bar{u}_j + u_j'$. Тогда уравнение (1.3) примет вид

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0; \quad \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1.3a)$$

Для давления $p = \bar{p} + p'$, для трения $\tau_{jk} = \bar{\tau}_{jk} + \tau'_{jk}$. Естественно, что $\bar{u}'_j \equiv 0$, $\bar{p}' \equiv 0$, $\bar{\tau}'_{jk} \equiv 0$. Следует отметить, что среднее значение \bar{u}_i , несмотря на интегрирование по времени:

$$\bar{u}_i(t, x_j) = \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_i(t, x_j) dt$$

может изменяться во времени. Это означает, что период интегрирования $2\Delta t$ должен быть малым по сравнению с характерным временем нестационарного изменения \bar{u}_i .

Применяя операцию осреднения во времени к уравнению (1.4a), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_j \bar{u}_k) = -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\tau}_{jk} - \rho \overline{u'_j u'_k}), \quad (1.6)$$

где $-\rho \overline{u'_j u'_k}$ - составляющие тензора напряжений Рейнольдса или рейнольдсовых напряжений. Они являются дополнительными (шестью) неизвестными к гидродинамическим параметрам осредненного движения (\bar{u}_j, \bar{p}). Таким образом, система уравнений (1.3a) и (1.6) является незамкнутой.

Вопросы замыкания полученной системы уравнений решаются на различном уровне сложности, и им будет посвящена значительная часть курса. Простейший путь – использование эмпирической информации о характеристиках турбулентности, наиболее сложный заключается в выводе уравнений относительно рейнольдсовых напряжений.

1.2. Уравнения для рейнольдсовых напряжений

Вывод уравнения для рейнольдсовых напряжений ($-\rho \overline{u'_j u'_k}$) начинается с преобразования уравнения (1.4a). Умножая его на u_i , получим

$$u_i \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_k) \right) = u_i \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{jk} \right). \quad (1.7)$$

Поменяем индексы i и k местами:

$$u_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) \right) = u_k \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ji} \right). \quad (1.8)$$

Суммируя (1.7) и (1.8), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i u_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_k u_j) = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_j} + u_k \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}. \quad (1.9)$$

В результате осреднения во времени уравнения (1.9) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_k) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{u'_i u'_k}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_k + \rho \bar{u}_i \overline{u'_j u'_k} + \\ & + \rho \bar{u}_j \overline{u'_i u'_k} + \rho \bar{u}_k \overline{u'_i u'_j} + \rho \overline{u'_i u'_j u'_k}) = -\bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} - \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$- \overline{u_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k}} - \overline{u_k \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} - \overline{u'_k \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_j}} + \overline{u'_i \frac{\partial \tau'_{jk}}{\partial x_j}} + \overline{u_k \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}} + \overline{u'_k \frac{\partial \tau'_{ji}}{\partial x_j}}.$$

Умножим уравнение (1.6) на $\overline{u_i}$:

$$\overline{u_i} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{u_k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{u_j} \overline{u_k}) \right] = \overline{u_i} \left[- \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tau_{jk}} - \rho \overline{u'_j u'_k}) \right]. \quad (1.11)$$

Меняя в последнем уравнении местами индексы i и k , получаем

$$\overline{u_k} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{u_j} \overline{u_i}) \right] = \overline{u_k} \left[- \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tau_{ji}} - \rho \overline{u'_j u'_i}) \right]. \quad (1.12)$$

Сумма последних двух уравнений дает уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{u_i} \overline{u_k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{u_i} \overline{u_j} \overline{u_k}) &= - \overline{u_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} - \overline{u_k} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \\ + \overline{u_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tau_{jk}} - \rho \overline{u'_j u'_k}) &+ \overline{u_k} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tau_{ji}} - \rho \overline{u'_j u'_i}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Уравнение переноса турбулентных или рейнольдсовых напряжений получается вычитанием из уравнения (1.10) уравнения (1.13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{u'_i u'_k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{u'_j} \overline{u'_i u'_k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{u'_i u'_j u'_k}) &= - \overline{u'_i} \frac{\partial p'}{\partial x_k} - \\ - \overline{u'_k} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \overline{u'_i} \frac{\partial \tau'_{jk}}{\partial x_j} + \overline{u'_k} \frac{\partial \tau'_{ji}}{\partial x_j} &- \overline{\rho u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \overline{\rho u'_j u'_i} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Следует отметить, что первые четыре члена в правой части и член с тройной корреляцией в левой части уравнения (1.14) являются неизвестными.

Преобразуем (1.14). Запишем первые два члена в правой части как

$$- \overline{u'_i} \frac{\partial p'}{\partial x_k} - \overline{u'_k} \frac{\partial p'}{\partial x_i} = p' \left(\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_i} \right) - \left[\delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i p'}) + \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_k p'}) \right],$$

где δ_{jk} (δ_{ij}) - единичный тензор.

Третий и четвертый члены в правой части преобразуются с учетом уравнения неразрывности следующим образом:

$$\overline{u'_i} \frac{\partial \tau'_{jk}}{\partial x_j} + \overline{u'_k} \frac{\partial \tau'_{ji}}{\partial x_j} = \mu \left(\overline{u'_i} \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_j^2} + \overline{u'_k} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \right) = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\overline{u'_i u'_k}) - 2\mu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_j}.$$

Таким образом, (1.14) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_i u'_k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_j} \overline{u'_i u'_k}) &= - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j u'_k}) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\overline{u'_i u'_k}) + \\ + \frac{1}{\rho} p' \left(\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_i} \right) &- \left[\delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i p'}) + \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_k p'}) \right] - \\ - 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_j} - \overline{u'_j} \overline{u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} &- \overline{u'_j} \overline{u'_i} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (1.15)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_i u'_k}) + \overline{u'_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_k}) = \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ik} + R_{ik} + P_{ik} - \varepsilon_{ik}, \quad (1.15a)$$

где

$$D_{ik} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_k}) - \overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{1}{\rho} (\overline{\delta_{jk} u'_i} + \overline{\delta_{ij} u'_k}) p';$$

$$R_{ik} = \frac{1}{\rho} \overline{p' (\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i})}; \quad P_{ik} = - \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{u'_j u'_i \frac{\partial u_k}{\partial x_j}}; \quad \varepsilon_{ik} = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}}.$$

Левая часть уравнения построена по форме обычного уравнения переноса (равна субстанционной (полной) производной от $\overline{u'_i u'_k}$). Для четырех членов в правой части приняты следующие обозначения:

D_{ik} — диффузионный член, обусловленный молекулярной диффузией, турбулентной диффузией перемешивания посредством взаимодействия пульсаций скорости и турбулентной диффузией давления посредством корреляций давления и скорости;

R_{ik} — член перераспределения, описывающий обмен энергией между отдельными составляющими $\overline{u'_i u'_k}$ вследствие корреляции давления и напряжения трения;

P_{ik} — член порождения или генерации турбулентности, определяющийся производением рейнольдсовых напряжений и средних градиентов скорости (характеризует перенос энергии от осредненного течения к пульсационному);

ε_{ik} — диссипативный член, характеризующий преобразование энергии, подведенной к пульсационному течению, в частности, перенос энергии крупномасштабных вихрей к мелкомасштабным диссипирующим вихрям.

Полученное уравнение (1.15) не является замкнутым, так как неизвестны величины: $\overline{u'_i u'_j u'_k}$, $(\overline{\delta_{jk} u'_i} + \overline{\delta_{ij} u'_k}) p'$, R_{ik} , ε_{ik} . Для замыкания (1.15) требуется указанные члены соответствующим образом моделировать, используя эмпирические данные или иные соображения, подчас эвристического характера.

1.3. Уравнение для кинетической энергии турбулентных пульсаций

Частным случаем (1.15) является уравнение для кинетической энергии турбулентных пульсаций $k = \overline{u'_k u'_k} / 2$. Если в уравнении (1.15) принять $i = k$, просуммировать члены по всем $i = k$ и умножить полученное уравнение на $1/2$, то в результате получаем

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j \frac{\partial k}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_j k'}) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_{jk} (\overline{u'_k p'}) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} - \nu \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} - \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j}}$$

(1.16)

или

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j \frac{\partial k}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} D_s + P - \varepsilon_s,$$

(1.16a)

где

$$D_s = \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \delta_{jk} (\overline{u'_k p'}) - \overline{u'_j k'} = D_{kk} / 2; \quad k' = \overline{u'_k u'_k} / 2;$$

$$P = - \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} = P_{kk} / 2; \quad \varepsilon_s = \nu \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}}.$$

Уравнение (1.16) по виду не отличается от уравнения (1.15), за исключением того, что член перераспределения в нем отсутствует. Члены генерации P , диффузии D_s и диссипации ε_s — такие же, как и в уравнении (1.15). Отметим, что ε_s называют

изотропной диссипацией турбулентности или псевдодиссипацией. Вместо ε_s вводят в рассмотрение функцию, которую называют истинной диссипацией, или скоростью диссипации турбулентной энергии:

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \left(\overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \right)^2 \approx \varepsilon_s + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_j u'_k}. \quad (1.17)$$

Следует добавить, что $\varepsilon \approx \varepsilon_s$, если диссипирующие (мелкомасштабные) турбулентные вихри являются изотропными, т.е. статистически не зависящими от направления потока. Во многих случаях равенство ε и ε_s близко к действительности. Исключение составляют пристеночные течения, а именно слой, примыкающий к стенке (так называемый вязкий подслой). Также отметим, что формальный переход в уравнении (1.16) от ε_s к ε сказывается на изменении в нем диффузионного члена, который в этом случае принимает вид

$$D = D_s + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_j u'_k} = \frac{1}{2} D_{kk} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_j u'_k}.$$

Независимо от формы записи уравнения (1.16) неизвестными в нем являются корреляции пульсаций давления и скорости; двойные $\overline{u'_j u'_k}$ и тройные $\overline{u'_j k'}$ корреляции пульсаций скорости, а также диссипативный член ε или ε_s .

1.4. Уравнение для изотропной диссипации турбулентности

Это уравнение получается из уравнения (1.4). Продифференцировав его по x_k и умножив результат на $\partial u'_i / \partial x_k$, после осреднения во времени получим [4]

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \overline{u'_j \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} D_\varepsilon + P_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon, \quad (1.18)$$

где

$$D_\varepsilon = \nu \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_j} - \overline{u'_j \varepsilon'_s} - 2 \nu \delta_{ij} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right);$$

$$P_\varepsilon = - 2 \nu \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k}} - 2 \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right) - 2 \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k};$$

$$\varepsilon_\varepsilon = 2 \nu^2 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k}; \quad \varepsilon'_s = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}.$$

Физический смысл членов, входящих в уравнение (1.18), тот же, что и соответствующих членов уравнений (1.15) или (1.16). Здесь диффузионный член D_ε включает в себя молекулярную диффузию диссипации, диффузию диссипации из-за турбулентного перемешивания посредством корреляций $\overline{u'_j \varepsilon'_s}$ и диффузию диссипации, обусловленную пульсациями давления. Член генерации диссипации P_ε состоит из трех слагаемых, из которых первые два определяют генерацию диссипации из-за турбулентного перемешивания в осредненном движении, а последний – в пульсационном движении. Член ε_s называется диссипативным и определяет диссипацию диссипации турбулентности. Отметим, что все члены в правой части уравнения (1.18) требуют специального моделирования, ибо это уравнение не является замкнутым в любом сочетании с ранее записанными уравнениями для характеристик турбулент-

ности. Также отметим, что уравнение для скорости диссипации энергии турбулентных пульсаций ε может быть получено из уравнения (1.18) при использовании преобразования (1.17).

В принципе, из приведенных дифференциальных уравнений можно получить уравнения для неизвестных корреляций более высокого порядка, чем рассмотренные здесь. Однако при этом, в силу нелинейности исходных уравнений, каждое уравнение для корреляции n -го порядка будет содержать корреляции $(n + 1)$ -го порядка и ряд неизвестных корреляций того же порядка n . Следовательно, система уравнений переноса для турбулентных характеристик потока является бесконечной. Значит, вне зависимости от того, на каком порядке «прервать» систему, необходимо будет моделировать входящие в систему неизвестные члены, представляя их через известные в данном приближении. Отметим, что среди моделей турбулентности, использующих дифференциальные уравнения для турбулентных характеристик, наибольшее распространение получили модели 2-го приближения или порядка, когда система уравнений для турбулентных характеристик ограничивается уравнениями (1.15)-(1.18).

2. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ТЕПЛОБМЕН. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОСТИ

2.1. Осредненная форма уравнения энергии

Уравнение для корреляции $\overline{u'_i T}$, представляющей скорость переноса температуры T в направлении x_i турбулентными пульсациями скорости, аналогично уравнению (1.15) и может быть получено в рамках описанного подхода на основе системы уравнений Навье-Стокса и энергии.

Ограничимся рассмотрением случаев несжимаемой вязкой жидкости

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\tau_{ij}}{\rho c_p} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

или, с учетом закона теплопроводности Фурье $q_j = \lambda \partial T / \partial x_j$, где λ - коэффициент теплопроводности,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \frac{\nu}{c_p} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (2.1)$$

где $Pr = c_p \mu / \lambda = \rho c_p \nu / \lambda$ — молекулярное число Прандтля.

Уравнение (2.1) в осредненном во времени виде записывается как

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_j T} + \frac{\nu}{c_p} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\nu}{c_p} \left(\frac{\partial \overline{u'_i u'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_j u'_i}}{\partial x_i} \right). \quad (2.2)$$

В уравнении (2.2), так же как и в уравнениях Рейнольдса, появились дополнительные члены, которые называются составляющими турбулентного потока тепла $\overline{u'_j T}$ и являются неизвестными. Отметим, что во многих практически интересных случаях работой вязких сил в уравнении энергии (последние два члена в правой части) пренебрегают.

2.2. Уравнения для составляющих турбулентного потока тепла

Умножим уравнение (2.1) на u_i . Пренебрегая работой вязких сил, в этом случае получаем

$$u_i \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\nu}{Pr} u_i \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}.$$

Умножим i -ю проекцию уравнения Навье-Стокса на T :

$$T \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{T \partial p}{\rho \partial x_i} + \nu T \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}.$$

В результате сложения последних двух уравнений получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_i T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j T) = \frac{\nu}{Pr} u_i \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} - \frac{T \partial p}{\rho \partial x_i} + \nu T \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}.$$

Операция осреднения во времени дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i T} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i' T'} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j T} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j' T'} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j u_i' T'} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{T u_i' u_j'} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j' T'} = \frac{\nu}{Pr} \left(\overline{u_i \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}} + \overline{u_i' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2}} \right) - \frac{\overline{T \partial p}}{\rho \partial x_i} - \frac{\overline{T' \partial p'}}{\rho \partial x_i} + \nu \overline{T \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} + \nu \overline{T' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Умножим на $\overline{u_i}$ уравнение (2.2):

$$\overline{u_i} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \right) = \overline{u_i} \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_j^2} - \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_j' T'}}{\partial x_j},$$

а i -ю проекцию уравнения Навье-Стокса на \overline{T} :

$$\overline{T} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j T} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{T u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = - \frac{\overline{T \partial p}}{\rho \partial x_i} + \nu \overline{T \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2}}.$$

Суммируя последние два уравнения и вычитая результат из (2.3), получаем уравнение для корреляции $\overline{u_i' T'}$ вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i' T'}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i' T'}}{\partial x_j} = - \overline{u_j' T'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} - \\ - \frac{\partial \overline{u_i' u_j' T'}}{\partial x_j} - \frac{\overline{T' \partial p'}}{\rho \partial x_i} + \frac{\nu}{Pr} \overline{u_i' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2}} + \nu \overline{T' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Последние два члена в правой части (2.4) преобразуются согласно

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{u_i' T'}}{\partial x_j^2} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i' T'}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{T' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + \overline{u_i' \frac{\partial T'}{\partial x_j}} \right) = \\ &= \overline{T' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} + \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} + \overline{u_i' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2}} + \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Обозначая $\nu/Pr = \alpha$ - коэффициент температуропроводности, можно записать

$$\begin{aligned} \alpha \overline{u_i' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2}} + \nu \overline{T' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} &= \alpha \overline{u_i' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2}} + \alpha \overline{T' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} + (\nu - \alpha) \overline{T' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} = \\ \alpha \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i' T'}}{\partial x_j^2} - 2 \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \right) &+ (\nu - \alpha) \overline{T' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}}. \end{aligned}$$

Корреляция $\frac{\overline{T' \partial p'}}{\rho \partial x_i}$ представляется в виде

$$\overline{\frac{T'}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i}} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{p' T'}}{\partial x_i} - \overline{p' \frac{\partial T'}{\partial x_i}} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p' T'}) \delta_{ij} - \overline{\frac{p'}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial x_i}}.$$

Тогда (2.4) переписывается в форме:

$$\frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial t} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i T'}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}^T + R_{ij}^T + P_{ij}^T - \varepsilon_{ij}^T, \quad (2.5)$$

где

$$D_{ij}^T = \alpha \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j T'} - \frac{1}{\rho} \delta_{ij} (\overline{p' T'});$$

$$R_{ij}^T = \overline{\frac{p'}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial x_i}}; \quad P_{ij}^T = - \overline{u'_j T' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} - \overline{u'_i u'_j \frac{\partial T'}{\partial x_j}}; \quad \varepsilon_{ij}^T = 2\alpha \overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}.$$

Отметим, что в (2.5) пренебрегли членом $(\nu - \alpha) \overline{T' \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}}$, учитывая, что число Pr имеет порядок единицы, т.е. $(\nu - \alpha) \rightarrow 0$.

Анализ уравнения (2.5) показывает, что левая его часть сконструирована подобно любому уравнению переноса; D_{ij}^T — диффузионный член, определяющий скорость пространственного переноса $\overline{T'}$ под действием молекулярной диффузии (обычно пренебрегается), под действием турбулентной диффузии, обусловленной пульсациями скорости и давления; R_{ij}^T — член перераспределения, определяющий корреляцию давления с градиентом температуры (является эквивалентом корреляции давления с напряжением трения в уравнении для рейнولدсовых напряжений); P_{ij}^T — член генерации, выражающий скорость создания $\overline{u'_i T'}$ вследствие совместного действия градиентов средней скорости и средней температуры (первый член в P_{ij}^T увеличивает пульсации скорости, а второй — уровень пульсаций температуры); ε_{ij}^T — диссипативный член, равный нулю в случае изотропной турбулентности (часто принимается пренебрежимо малым и для неізотропной турбулентности). Поскольку P_{ij}^T содержит искомую функцию, а член ε_{ij}^T мал, моделированию в (2.5) подлежат члены R_{ij}^T и D_{ij}^T .

2.3. Уравнение для интенсивности турбулентных пульсаций температуры

Интересно отметить, что в ряде исследований рассматривается уравнение переноса турбулентных пульсаций температуры (интенсивности температурных пульсаций). Оно получается в результате умножения уравнения (2.1) на T' (в пренебрежении работой вязких сил) и последующего осреднения во времени. В итоге получается

$$\overline{T' \frac{\partial T'}{\partial t}} + \overline{u'_j T' \frac{\partial T'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j T' \frac{\partial T'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j T' \frac{\partial T'}{\partial x_j}} = \alpha \overline{T' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2}}, \quad (2.6)$$

где $\alpha = \nu / \text{Pr}$.

Уравнение (2.6) с учетом того, что

$$\overline{\alpha T' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2}} = \alpha \frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial x_j^2} - \alpha \overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j}}; \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_j T'^2} = \overline{u'_j \frac{\partial T'^2}{\partial x_j}}$$

(последнее получается в силу уравнения неразрывности), переписывается в виде

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t} + \overline{u'_j \frac{\partial T'^2}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_j} - \overline{u'_j T'^2} \right) - \overline{u'_j T' \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}} - \alpha \overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j}} \quad (2.7)$$

или

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t} + \overline{u'_j \frac{\partial T'^2}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} D_T + P_T - \varepsilon_T, \quad (2.7a)$$

где

$$D_T = \alpha \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_j} - \overline{u'_j T'^2}; \quad P_T = - \overline{u'_j T' \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}}; \quad \varepsilon_T = \alpha \overline{\left(\frac{\partial T'}{\partial x_j} \right)^2}.$$

По аналогии с уравнением (1.16) для энергии турбулентных пульсаций, здесь в уравнении (2.7a) член D_T определяет перенос $\overline{T'^2}/2$ за счет молекулярной диффузии и за счет турбулентных пульсаций скорости; член P_T определяет скорость генерации пульсаций температуры под действием градиента температуры \overline{T} ; ε_T определяет диссипацию пульсаций температуры в мелкомасштабных движениях.

3. МОДЕЛИ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА

Многие модели турбулентности, используемые в расчетной практике, основаны на концепции вихревой вязкости и турбулентной диффузии. Следуя Буссинеску, рейнольдсовы напряжения определяются как произведение вихревой вязкости на составляющие тензора осредненных скоростей деформации:

$$- \overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k. \quad (3.1)$$

Само по себе уравнение (3.1) не вводит модели турбулентности, а только характеризует структуру такой модели, при этом основной задачей является задание функции ν_t . В отличие от коэффициента молекулярной вязкости ν коэффициент ν_t определяется состоянием турбулентности и не связан со свойствами жидкости. Он может сильно изменяться от точки к точке пространства и в зависимости от типа течения. Так, например, ν_t в зонах циркуляционного течения может на несколько порядков превышать ν . Также известно, что для течения в открытом канале ν_t распределен по параболическому закону по глубине, а для плоской струи он изменяется пропорционально квадратному корню из расстояния от источника [6].

Иногда при расчетах турбулентных течений ν_t принимается постоянным (Буссинеск (1877), Васильев (1971)). Однако столь грубое описание турбулентности допустимо в тех случаях, когда величина турбулентного переноса не имеет существенного значения или использование более сложных конструкций представляется неоправданным.

Концепция турбулентной вязкости предполагает, что перенос количества движения происходит аналогично переносу за счет молекулярного движения. Подвергаясь справедливой критике как физически необоснованная, она, однако, широко применяется, поскольку позволяет получать вполне приемлемые результаты в инженерной практике.

Полезно представление о пропорциональности ν_t масштабу скорости \widehat{v} и масштабу турбулентности L , т.е.

$$\nu_t \sim \widehat{v} L, \quad (3.2)$$

поскольку для многих течений можно аппроксимировать с достаточной точностью распределение характерных масштабов.

По прямой аналогии с турбулентным переносом количества движения понятие турбулентной диффузии предполагает следующее соотношение между переносом массы или тепла и градиентом переносимой субстанции:

$$- \overline{u'_j \varphi'} = G_t \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_j}, \quad (3.3)$$

где G_t — коэффициент турбулентной диффузии. Подобно турбулентной вязкости G_t не является собственной характеристикой жидкости, а зависит от состояния турбулентности. Согласно гипотезе Рейнольдса об аналогии при турбулентном переносе массы или тепла и количества движения,

$$G_t = \nu_t / \sigma_t. \quad (3.4)$$

Величина σ_t называется турбулентным числом Прандтля – Шмидта. В отличие от самих коэффициентов турбулентной диффузии и турбулентной вязкости, их отношение σ_t слабо изменяется как в пределах потока, так и от течения к течению. Поэтому оно принимается постоянным в ряде моделей, хотя и испытывает влияние плавучести и кривизны линий тока.

Как уже отмечалось, понятие турбулентной вязкости не свободно от недостатков. Это прежде всего касается ситуаций, когда в течениях возникают зоны отрицательной вязкости. К тому же предположение об изотропности коэффициентов турбулентной вязкости (диффузии) является сильным упрощением, имеющим ограниченную пригодность при интерпретации сложных течений, в частности тех, для которых действие массовых сил имеет преобладающее направление. Поэтому иногда коэффициенты турбулентной вязкости (диффузии) принимаются различными по разным направлениям.

Важным достоинством моделей турбулентной вязкости является их относительная простота, наглядность и вычислительная эффективность: в рамках приближения Буссинеска проблема замыкания сводится к определению одной скалярной величины (турбулентной вязкости) вместо шести компонент тензора τ_{ij}^t . Иногда наряду с тензором рейнольдсовых напряжений используется тензор анизотропии $a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} / k - 2/3 \delta_{ij}$. Как следует из (3.1), гипотеза Буссинеска сводится к предположению о том, что тензор анизотропии рейнольдсовых напряжений пропорционален тензору скоростей деформаций осредненного течения ($a_{ij} = -2\nu_t / k \cdot S_{ij}$). Хорошо известно, что это предположение не выполняется даже во многих простых течениях, например, в установившемся течении в круглой трубе, вращающейся вокруг своей оси, не говоря уже о более сложных пристенных течениях. С другой стороны, во многих случаях, особенно при анализе течений, в которых основное влияние на осредненное движение оказывает лишь одна из компонент тензора рейнольдсовых напряжений (напряжение сдвига τ_{xy}^t), нарушение гипотезы Буссинеска не приводит к сколько-нибудь заметным погрешностям.

Указанные обстоятельства (относительная простота и приемлемость для широкого круга сдвиговых турбулентных течений) обуславливают широкую применимость моделей турбулентной вязкости.

Более сложным подходом к решению проблемы замыкания является использование различных нелинейных соотношений между тензором анизотропии a_{ij} и тензором скоростей деформаций S_{ij} и составляющими вектора завихренности Ω_i , характеризующими кинематику осредненного течения. Построенные на указанных принципах модели называются нелинейными моделями турбулентной вязкости.

Впервые такой подход был предложен Поупом (1975), а в дальнейшем получил развитие в работах Спезайла (Speziale).

4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Алгебраические модели принадлежат к простейшим типам моделей турбулентности, в которых связь между турбулентной вязкостью и параметрами осредненного потока задается алгебраическими соотношениями. Отсюда следуют достоинства моделей такого типа: вычислительная эффективность, простота калибровки и модификаций с учетом специфики рассматриваемых течений. Однако очевидна и узкая специализация этих моделей, поскольку они опираются на априорную (эмпирическую) информацию о структуре конкретного рассматриваемого течения. Расширенное использование алгебраических моделей для других типов течений подчас невозможно в принципе (поскольку, например, опираясь на структурные кинематические характеристики пограничного слоя, такие как толщина вытеснения и потери импульса, скорость на внешней границе пограничного слоя, нельзя анализировать течения, для которых указанные характеристики не определены). Кроме того, алгебраическая формулировка моделей обуславливает их мгновенную реакцию на изменения параметров и условий на границах пограничного слоя.

Тем не менее, алгебраические модели турбулентной вязкости многие десятилетия были основным инструментом расчета турбулентных сдвиговых течений.

4.1. Модель пути смешения Прандтля

Модель для описания распределения ν_t впервые была предложена Л.Прандтлем в 1925г. и известна как модель пути смешения. Доказано, что она довольно хорошо воспроизводит тонкие вязкие слои. Рассматривая осредненные сдвиговые течения без градиента давления, Прандтль постулировал, что характерный масштаб пульсаций скорости \hat{v} равен градиенту осредненной скорости, умноженному на характерный масштаб длины l_m , который он назвал путем смешения.

Следуя И.П.Гинзбургу [7], получим выражения коэффициентов турбулентной вязкости и теплопроводности.

Возьмем два слоя жидкости на расстоянии l_m друг от друга (среднее расстояние пульсаций). Истинные скорости в этом случае

$$v_x = \overline{v_x} + v'_x; \quad v_y = v'_y.$$

Вследствие пульсаций составляющей скорости v'_y имеет место турбулентное перемешивание (перенос количества движения и тепла). Действительно, через единичную площадку, перпендикулярную оси y , в единицу времени переносится масса жидкости $\rho v'_y$. Находясь в первом слое, она имела количество движения $\rho v'_y \overline{v_x}$. Во втором слое ее количество движения стало $\rho v'_y (\overline{v_x} + l_m \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y})$.

Таким образом, вследствие наличия пульсаций изменение количества движения обуславливает напряжение турбулентного трения

$$\tau_{xy}^t = \rho v'_y l_m \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y}.$$

Путь смешения (или перемешивания) l_m определяется таким образом, чтобы

$$v'_x = l_m \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y}$$

Предполагая $v'_x \sim v'_y$, получаем $\tau_{xy}^t = \rho l_m^2 (\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y})^2$. Следовательно,

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right|. \quad (4.1)$$

Длина пути смешения определяется эмпирически. Успех предложенной Прандтлем модели был предопределен тем обстоятельством, что для многих простых типов течений со сдвигом l_m может быть выражена относительно несложными формулами.

При рассмотрении течения в пограничном слое полагают

$$l_m = \kappa y, \quad (4.2)$$

где κ — универсальный коэффициент пропорциональности, не зависящий от числа Рейнольдса; $\kappa \approx 0.39$. Это объясняется тем, что пульсации больше там, где выше скорость. Следовательно, у стенки, где скорость близка к нулю, пульсаций нет. Таким образом, путь перемешивания пропорционален расстоянию от стенки y .

Для свободных слоев со сдвигом l_m можно поперек слоя полагать константой, пропорциональной толщине слоя. Коэффициент пропорциональности, т.е. эмпирическая константа, зависит от типа течения.

Следует отметить, что в дополнение к модели пути смешения Прандтль предложил простую модель вихревой вязкости для свободных сдвиговых течений (модель Прандтля–Райхардта (1942) или вторая модель Прандтля):

$$\nu_t = \chi [U_{max} - U_{min}] \delta(x), \quad (4.3)$$

где U_{max} и U_{min} — максимальная и минимальная величины скорости в слое, δ — полуширина слоя смешения, χ — эмпирический безразмерный параметр, постоянный по толщине слоя, x — расстояние, измеренное в направлении потока.

Выражение (4.3) получено Райхардтом экспериментально для струйных потоков. Для свободных струй, истекающих в затопленное пространство, $U_{max} = U_m$ — скорость на оси симметрии, $U_{min} = 0$. В случае истечения в спутный поток $U_{min} = 0$. Для струйных течений $\chi = 1$; $\delta = Cx$, где $C = 0.0254$ для нулевой интенсивности турбулентности на срезе сопла, $C = 0.03$ для $Tu(\infty) = 1.5\%$.

Турбулентное число Прандтля–Шмидта равно приблизительно 0.9 для течений вблизи стенки, 0.5 в плоских струях и слоях смешения, 0.7 для круглых струй.

4.2. Моделирование пограничных слоев

Современные представления о структуре турбулентного пограничного слоя (ТПС) основываются на анализе опытных данных [8]. В ТПС выделяется по меньшей мере пять подобластей: вязкий подслой, переходная или буферная область, область логарифмического профиля скорости, область закона следа и область перемежаемости. Первые три принято объединять в одну внутреннюю область или область закона стенки. Внутренняя область пограничного слоя на плоской пластине занимает примерно 15-20% от толщины всего слоя. Согласно измерениям в ней генерируется до 80% энергии турбулентности, причем первые 5% толщины дают более половины вклада в полное производство турбулентной энергии. Область закона следа и область перемежаемости обычно объединяют во внешнюю область ТПС, которая занимает порядка 80% от толщины всего слоя.

Внешняя область ТПС с характерной для нее крупномасштабной турбулентностью обладает «долгой памятью» по Клаузеру. Полное затухание возмущений в этой области происходит на расстоянии, во много раз превышающем линейный масштаб турбулентности. Следовательно, свойства течения во внешней области могут зависеть в большей степени от предыстории потока.

Различные области ТПС отличаются друг от друга разномасштабностью вихревых (когерентных) структур.

Цепочка вращающихся в противоположных направлениях продольных вихрей плотно покрывает гладкую стенку. Эти вихри подвержены колебаниям вблизи стенки и в свою очередь порождают низкоскоростные поперечные к потоку жгуты. В эволюции жгутов можно выделить следующие фазы: формирования, подъема, колебания и разрушения. Последовательность последних трех фаз принято называть всплеском. Выше низкоскоростных продольных вихрей, но все еще достаточно близко к стенке находится слой, постоянно разрушаемый всплесками. По некоторым данным, всплески дают порядка 70% рейнольдсовых напряжений. Характерным элементом внутренней области являются также мелкомасштабные поперечные вихри большой энергии. Эти вихри частично заполняют буферную область и полностью участок логарифмического профиля скорости. Основными элементами внешней области ТПС являются крупномасштабные поперечные вихревые структуры с характерными размерами порядка толщины слоя и «типичные» вихри с большой энергией в области перемежаемости. Очевидно, что даже схематизированное представление о структуре ТПС является достаточно сложной и не до конца изученной картиной взаимодействия структурных элементов.

На рис.4 показан типичный профиль скорости в ТПС, развивающемся на плоской пластине без градиента давления. Величина y^+ выражает обезразмеренное расстояние от стенки.

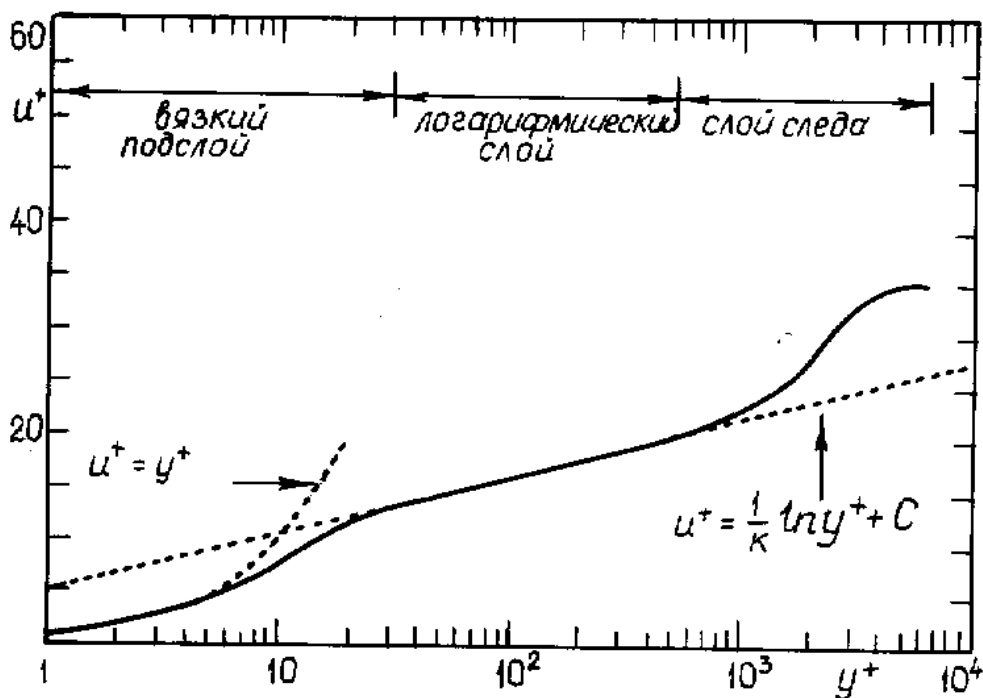


Рис.4

Показаны три участка разбиения профиля: вязкий подслой, логарифмический слой и слой следа. Логарифмический слой определяется как близкая к стенке часть ТПС, где напряжения, обусловленные молекулярной вязкостью, пренебрежимо малы по сравнению с рейнольдсовыми напряжениями, а также незначительны инерциальные, конвективные члены. Эта область пролегает между $y^+ = 30$ и $y = 0.1\delta$, где δ — толщина ТПС, а y^+ на верхней границе зависит от числа Рейнольдса. Интересно отметить, что закон стенки имеет место в логарифмическом слое. Вязкий под-

слой располагается между стенкой и логарифмическим слоем. Вблизи стенки скорость изменяется приблизительно линейно с y^+ и постепенно переходит к закону стенки при больших y^+ . Область следа пролегает между логарифмическим слоем и кромкой ТПС. Скорость асимптотически стремится к закону стенки при $y/\delta \rightarrow 0$ и значительно отличается от него при приближении к внешнему потоку.

Для логарифмического слоя из уравнения (1.6) следует, что сумма вязких и турбулентных касательных напряжений есть величина постоянная. Следовательно,

$$-\overline{u'v'} \approx \nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_w = \frac{\tau_w}{\rho} = u_\tau^2, \quad (4.4)$$

где индекс w обозначает величины на стенке, а $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ известна как динамическая скорость. Из (4.1) и (4.4) следует:

$$l_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \approx u_\tau^2. \quad (4.5)$$

Вспоминая (4.2), получаем при интегрировании (4.5)

$$\bar{u} \approx \frac{u_\tau}{\kappa} \ln y + \text{const}. \quad (4.6)$$

Вводя безразмерные параметры

$$u^+ \equiv \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad \text{и} \quad y^+ \equiv \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad (4.7)$$

переписываем уравнение (4.7):

$$u^+ \approx \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C. \quad (4.8)$$

Коэффициент κ известен как постоянная Кармана, а C — безразмерная константа. На основе анализа экспериментальных данных для ТПС с градиентом давления и без него предложены следующие значения (Coles и Hirst (1969)):

$$\kappa \approx 0.41; \quad C \approx 5.0. \quad (4.9)$$

Для учета взаимодействия молекулярного и турбулентного переноса импульса в непосредственной близости от стенки (в ламинарном подслое) Ван-Дристом (1956) предложена модификация пути смешения за счет введения демпфирующей функции:

$$l_m = \kappa y [1 - e^{-y^+/A_o^+}], \quad (4.10)$$

где константа A_o^+ принимается равной 26.

Для внешней области характерно гораздо более медленное изменение гидродинамических параметров. В качестве масштаба скорости в этой области принято использовать скорость на внешней границе пограничного слоя U_e , а в качестве линейного масштаба — одну из его интегральных толщин (чаще всего толщину вытеснения δ^*). В рамках двухслойной схемы турбулентная вязкость во внешней области предполагается постоянной величиной. Клаузер (1956) предложил, подобно второй формуле Прандтля для течений в следе,

$$\nu_{to} = \alpha U_e \delta^*, \quad (4.11)$$

где ν_{to} — кинематический коэффициент вихревой вязкости во внешней части ТПС и α — коэффициент замыкания.

Эскудер (1966) обнаружил, что точность прогнозирования улучшается, если ограничить максимальную величину пути смешения согласно

$$(l_m)_{max} = 0.09\delta, \quad (4.12)$$

где δ — толщина ТПС.

Интересна интерпретация ТПС, данная Коулсом и Херстом (1969). Ими отмечается, что течение в типичном ТПС может рассматриваться как подобное течению в следе с влиянием блокировки его стенкой.

Корсином и Кестлером (1954), а также Клебановым (1954) на основании исследований перемежающихся течений предложена поправка для ТПС на гладкой стенке, согласно которой для учета перемежаемости на границе ТПС и внешнего потока вихревую вязкость (4.11) умножают на коэффициент перемежаемости Клебана:

$$F_{Kleb}(y, \delta) = [1 + 5.5(\frac{y}{\delta})^6]^{-1}. \quad (4.13)$$

4.3. Популярные алгебраические модели

Модель Себеси-Смита – двухслойная модель с ν_t , заданными различными выражениями на каждом слое. Вихревая вязкость определяется как

$$\nu_t = \begin{cases} \nu_{ti}, & y \leq y_m, \\ \nu_{to}, & y > y_m, \end{cases} \quad (4.14)$$

где y_m – наименьшая величина y , для которой $\nu_{ti} = \nu_{to}$. Величина ν_t во внутреннем слое ν_{ti} и во внешнем слое ν_{to} рассчитываются по следующим формулам:

внутренний слой:

$$\nu_{ti} = l_m^2 [(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \bar{v}}{\partial x})^2]^{1/2}, \quad (4.15)$$

$$l_m = \kappa y [1 - e^{-y^+/A^+}],$$

внешний слой:

$$\nu_{to} = \alpha U_e \delta_v^* F_{Kleb}(y, \delta), \quad (4.16)$$

коэффициенты замыкания:

$$\kappa = 0.40, \quad \alpha = 0.0168, \quad A^+ = 26 [1 + y \frac{dp/dx}{\rho u_\tau^2}]^{-1/2}.$$

Здесь F_{Kleb} – функция перемежаемости Клебана, заданная выражением (4.13), U_e – скорость на кромке ТПС, δ_v^* – толщина вытеснения, определяемая как

$$\delta_v^* = \int_0^\delta (1 - \bar{u}/U_e) dy.$$

Описание, приведенное выше, пригодно для двумерных течений. В случае решения трехмерных задач ν_{ti} пропорционально модулю вектора завихренности. В 1974г. Себеси и Смит дали обобщение их модели на случаи влияния вдува, кривизны линий тока, шероховатости, низкорейнольдсовых эффектов и др.

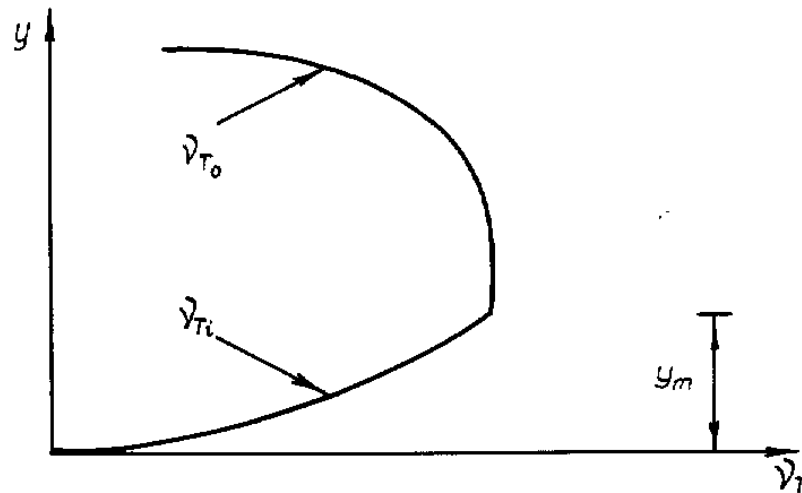


Рис.5

Модель Себеси и Смита элегантна и легко реализуема. Наибольшие расчетные усилия связаны с определением толщины потери импульса. Рис.5 иллюстрирует типичный профиль вихревой вязкости. При числах Рейнольдса, характерных для полностью развитого турбулентного течения, стыковка внутреннего и внешнего слоев реализуется в области логарифмического участка ТПС.

Оценим величину y_m^+ следующим образом. Поскольку ожидается, что точка сращивания профиля лежит в логарифмическом слое, экспоненциальным членом в демпфирующем множителе Ван-Дрифта можно пренебречь. Используя закон стенки, получаем

$$\nu_{ti} \approx \kappa^2 y^2 \frac{u_\tau}{\kappa y} \approx \kappa u_\tau y^+.$$

Так как точка сращивания лежит вблизи стенки, то $y/\delta \ll 1$, функция перемежаемости Клебанава близка к единице, так что ($\delta_v^* = \delta^*$):

$$\nu_{to} \approx \alpha U_e \delta^*.$$

Следовательно, приравнявая ν_{ti} и ν_{to} , находим

$$y_m^+ \approx \frac{\alpha}{\kappa} \text{Re}_{\delta^*} \approx 0.042 \text{Re}_{\delta^*}. \quad (4.17)$$

Предполагая для типичного ТПС $\text{Re}_{\delta^*} \sim 10^4$, для точки сращивания получаем $y_m^+ \sim 420$.

В 1974г. Себеси и Смит модернизировали свою модель на основании широкого сопоставления результатов расчета с экспериментальными данными, введя в демпфирующий множитель и в формулу Клаузера для турбулентной вязкости во внешней области дополнительные эмпирические функции, учитывающие влияние градиента давления, вдува, отсоса, сжимаемости и низких чисел Рейнольдса. Это позволило существенно расширить набор течений, для которых модель обеспечивает приемлемое согласие с экспериментами. Однако, как уже упоминалось, модель Себеси-Смита содержит величины, определенные исключительно для течений типа пограничного слоя, и поэтому не может быть без существенных изменений применена к более сложным турбулентным течениям.

Приведем формулы уточненной модели Себеси-Смита:

$$\nu_{ti} = (\kappa y)^2 D \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|, \quad D = [1 - \exp(-y u_\tau / (A \nu))]^2,$$

$$A = A_o \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right) \left[\frac{\mu}{\mu_e} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^2 \frac{p^+}{B_*} (1 - \exp(C_1 \frac{\mu_w}{\mu} B_*)) + \exp(C_1 \frac{\mu_w}{\mu} B_*) \right]^{-1/2},$$

$$B_* = \frac{v_W}{u_\tau}, p^+ = \frac{\nu_e U_e dU_e}{u_\tau^3 dx},$$

$$\nu_{to} = \alpha (1 + R_o)/(1 + R)\delta^* U_e F_{Kleb}, F_{Kleb} = (1 + 5.5(y/\delta)^6)^{-1},$$

$$R = R_o[1 - \exp(-0.243\sqrt{z_1} - 0.298z_1)], z_1 = \text{Re}^{**}/425 - 1.$$

Константы: $\kappa = 0.41$, $\alpha = 0.0168$, $A_o = 26$, $R_o = 0.55$, $C_1 = 11.8$.

Модель Болдуина-Ломакса (1978) была сформулирована для использования в расчетах, где такие характеристики ТПС, как δ , δ_v^* , U_e , с трудом поддаются определению. Такая ситуация возникает при численном моделировании отрывных течений, в особенности для течений со скачками уплотнения. Как и модель Себеси – Смита, модель Болдуина-Ломакса двухслойная. Вихревая вязкость находится по формуле (4.14), а вязкости во внутреннем и внешнем слое задаются как следующие:
внутренний слой:

$$\nu_{ti} = l_m^2 |\omega|, \quad (4.18)$$

$$l_m = \kappa y [1 - e^{-y^+/A_o^+}],$$

внешний слой:

$$\nu_{to} = \alpha C_{cp} F_{wake} F_{kleb}(y; y_{max}/C_{Kleb}), \quad (4.19)$$

$$F_{wake} = \min[y_{max} F_{max}; C_{wk} y_{max} U_{dif}^2 / F_{max}],$$

$$F_{max} = \frac{1}{\kappa} [\max(l_m |\omega|)],$$

где y_{max} является величиной y , при которой $l_m |\omega|$ принимает максимальное значение.

Коэффициенты замыкания:

$$\kappa = 0.40, \quad \alpha = 0.0168, \quad A_o^+ = 26,$$

$$C_{cp} = 1.6, \quad C_{Kleb} = 0.3, \quad C_{wk} = 1.$$

Функция F_{Kleb} является функцией перемежаемости (4.13) Клебана с δ , замененной y_{max}/C_{Kleb} , и ω - величиной вектора завихренности, т.е.

$$\omega = [(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z})^2 + (\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x})^2]^{1/2}$$

для полностью трехмерных течений.

U_{dif} является максимальной величиной \bar{u} для пограничных слоев. Для свободных сдвиговых слоев U_{dif} представляет разницу между максимальной скоростью в слое и величиной \bar{u} при $y = y_{max}$. В целом, для потоков со сложной структурой она определяется как

$$U_{dif} = (\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2})_{max} - (\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2})_{y=y_{max}}.$$

Главное различие между моделями Болдуина-Ломакса и Себеси-Смита лежит во внешнем слое, где произведение $C_{cp} F_{wake}$ заменяет $U_e \delta_v^*$. Чтобы избежать локализации кромки ТПС, модель Болдуина-Ломакса устанавливает масштаб длины во внешнем слое в выражении завихренности в слое. С одной стороны, использование выражения $F_{wake} = y_{max} F_{max}$ позволяет заменить δ_v^* на $y_{max}^2 \omega / U_e$. А с другой стороны, применение $F_{wake} = C_{wk} y_{max} U_{dif}^2 / F_{max}$ эффективно заменяет толщину сдвигового слоя δ во второй модели Прандтля с помощью $U_{dif} / |\omega|$.

При расчетах течений в пограничных слоях обнаруживается весьма малое различие между моделями Болдуина-Ломакса и Себеси-Смита. Это показывает, что выражение для определения масштаба длины во внешнем слое, основанное на завихренности и расстоянии от стенки, является эквивалентным толщине вытеснения δ_v^* . Для более сложных течений, которые включают, например, отрывные зоны, модель Болдуина-Ломакса вполне корректно прогнозирует масштаб длины во внешнем слое в противоположность δ_v^* , отрицательной для отрывных течений и поэтому являющейся нежелательным масштабом длины. Однако и модель Болдуина-Ломакса может быть неприменимой к ситуациям, когда функция F имеет несколько максимумов.

Модель Прандтля-Лойцянского-Клаузера-3 (ПЛК-3, 1995) предложена в рамках традиционной двухслойной клаузеровской схемы ТПС. Она базируется на использовании пути смешения с демпфирующим множителем Лойцянского D_L во внутренней области и соотношения, названного формулой Клаузера-3, во внешней. Полагается, что универсальными масштабами внешней области являются динамическая скорость и толщина вытеснения ТПС. Формула Клаузера-3, согласно которой турбулентная вязкость определяется выражением $\nu_{to} = \kappa u_\tau \delta^*$, не зависит от числа Рейнольдса в диапазоне изменения $320 < Re^{**} < 2 \cdot 10^4$. Здесь число Рейнольдса определяется по толщине потери импульса, скорости на внешней границе ТПС и кинематической вязкости. Обнаружено, что при $Re > 10^3$ толщина внутренней области равна толщине вытеснения ТПС. ПЛК-3 формулируется следующим образом:

$$\text{- во внутренней области:} \quad \nu_{ti} = (\kappa y)^{2\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} D_L, \quad (4.20)$$

$$D_L = 1 - e^{-\left(\frac{y u_\tau}{26\nu}\right)^2},$$

$$\text{- во внешней области:} \quad \nu_{to} = \kappa u_\tau \delta^* F_{Kleb}. \quad (4.21)$$

Модель Гарбарука-Стрельца-Лапина (ГЛС, 1998 [9]) предложена также в рамках двухслойной клаузеровской схемы ТПС. Модель базируется на линейной зависимости турбулентной вязкости во внутренней области от расстояния от стенки: $\nu_{ti} = \kappa y \hat{v}_i D$, где \hat{v}_i - скоростной масштаб, подлежащий определению в общем случае; D - демпфирующий множитель. Выбор масштаба скорости производится на основе распределения напряжения трения. В случае течения на плоской пластине $\hat{v}_i = u_\tau$. Демпфирующий множитель обеспечивает выполнение закона стенки «четвертой степени» для турбулентной вязкости вблизи стенки:

$$D = \left[1 - \exp\left(-\frac{y \hat{v}_i}{12\nu}\right)\right]^3. \quad (4.22)$$

Во внешней области применяется формула Клаузера-3. Границей между внутренней и внешней подобластями ТПС является $y_m = \delta^*$.

Модель Джонсона-Кинга (модель с половинным уравнением) получена Джонсоном и Кингом (1985) [см. также Джонсона (1987), Джонсона и Коклея (1990)] как неравновесная версия алгебраической модели. Отправной точкой при выводе этой модели послужила равновесная алгебраическая модель, в которой вихревая вязкость представлялась в виде

$$\mu_t = \mu_{to} \tanh(\mu_{ti}/\mu_{to}), \quad (4.23)$$

где μ_{ti} и μ_{to} - вихревая вязкость во внутреннем и внешнем слоях соответственно. Гиперболический тангенс позволяет исключить возможные разрывы в $\partial\mu_t/\partial y$ в (4.14).

Внутренний слой.

μ_{ti} определяется в форме, подобной используемой в моделях Себеси-Смита и Болдуина-Ломакса. Однако зависимость от градиента скорости заменяется явной зависимостью от расстояния до стенки y и двух масштабов скорости u_τ и u_m в следующем виде:

$$\mu_{ti} = \rho \left[1 - \exp\left(-\frac{u_d y / \nu}{A^+}\right) \right]^2 \kappa u_s y, \quad (4.24)$$

$$\sqrt{\rho} u_s = (1 - \gamma_2) \sqrt{\tau_w} + \gamma_2 \sqrt{\tau_m}, \quad \gamma_2 = \tanh(y/L_c),$$

$$L_c = \frac{\sqrt{\tau_w}}{\sqrt{\tau_w} + \sqrt{\tau_m}} L_m, \quad L_m = \begin{cases} \kappa y, & y_m/\delta \leq C_1/\kappa, \\ C_1 \delta, & y_m/\delta \geq C_1/\kappa, \end{cases}$$

$$u_m = \sqrt{\tau_m/\rho_m}, \quad u_D = \max[u_m, u_\tau],$$

где индекс m обозначает величину в точке $y = y_m$, в которой, как предполагается, рейнольдсовы сдвиговые напряжения принимают максимальное значение: $\tau_m = (\rho \tau_{xy})_{max}$; u_τ — динамическая скорость, а ρ_w — плотность на стенке. В своей первоначальной форме эта модель имеет единственный масштаб скорости u_m в формуле (4.24). Такое задание масштаба дает лучшее согласие по профилю скорости для отрывных течений по сравнению с прандтлевской градиентной формулировкой (4.1). Позднее введение двух скоростных масштабов u_s и u_D позволит улучшить предсказания для присоединяющихся течений и течений с влиянием сжимаемости.

Внешний слой.

Неравновесные черты модели появляются благодаря введению параметра неравновесности $\sigma(x)$, так что

$$\mu_{to} = \alpha \rho U_e \delta_v^* F_{Kleb}(y, \delta) \sigma(x). \quad (4.25)$$

В модели Джонсона-Кинга решается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для максимального рейнольдсового сдвигового напряжения τ_m в выражении $u_m = \sqrt{\tau_m/\rho_m}$:

$$U_m \frac{d}{dx} (u_m^2) = a_1 \left[\frac{(u_m)_{eq} - u_m}{L_m} \right] u_m^2 - C_{dif} \left[\frac{u_m^3}{C_2 \delta - y_m} \right] | 1 - \sigma^{1/2} |. \quad (4.26)$$

Здесь U_m — средняя скорость, $(u_m)_{eq}$ — величина u_m , соответствующая равновесной алгебраической модели ($\sigma = 1$). Первый член в правой части уравнения (4.26) является реминисценцией релаксационной модели Ханга ($d\mu_t/dx = (\mu_{te} - \mu_t)/L$). Второй член определяет влияние турбулентной диффузии на рейнольдсовы напряжения. Уравнение (4.26) решается, чтобы определить τ_m . После окончания решения рассчитывается коэффициент $\sigma(x)$ из условия, что максимум рейнольдсовых напряжений задается с помощью

$$\tau_m = (\mu_t)_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)_m.$$

Таким образом подыскивается μ_t , согласованное с τ_m . При использовании этой модели расчеты выполняются итерациями, поскольку $\sigma(x)$ априори неизвестно, при этом для решения уравнения (4.26) должны применяться либо величина $\sigma(x)$ на предыдущей итерации, либо экстраполяционная величина.

Коэффициенты замыкания.

$$\begin{aligned} \kappa &= 0.40, & \alpha &= 0.0168, & A^+ &= 17, \\ a_1 &= 0.25, & C_1 &= 0.09, & C_2 &= 0.7, \\ C_{dif} &= 0.5 \quad \text{для } \sigma(x) \geq 1; & & & & 0 \text{ - в противном случае.} \end{aligned}$$

Главная идея модели заключается в том, что турбулентные напряжения регулируют отклонения от равновесности при скоростях, отличающихся от прогнозов по алгебраической модели. Обыкновенное дифференциальное уравнение призвано учесть различие в скоростях.

4.4. Учет влияния кривизны стенки, перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения

Массовые силы, возникающие вследствие сил плавучести или кривизны линий тока, могут существенно изменить распределение длин пути смешения. Этот эффект может быть учтен эмпирическими формулами, полученными, например, в результате исследования стратифицированных пограничных слоев в атмосфере.

Для устойчивой стратификации ($Ri > 0$) часто используется формула Монина-Яглома

$$\frac{l_m}{l_{m0}} = 1 - \beta_1 Ri,$$

где число Ричардсона определяется как

$$Ri = - \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho / \partial y}{(\partial \bar{u} / \partial y)^2}.$$

Здесь координата y отсчитывается вдоль вертикали, а $\beta_1 \approx 7$.

При неустойчивой стратификации обычно используется следующая формула:

$$\frac{l_m}{l_{m0}} = (1 - \beta_2 Ri)^{-1/4},$$

где $\beta_2 \approx 14$. Величина l_{m0} представляет собой длину пути смешения при отсутствии архимедовых сил ($Ri = 0$). Архимедовы силы также влияют на число Прандтля-Шмидта. Это влияние учитывается формулой Мунка-Андерсона:

$$\sigma_t / \sigma_{t0} = (1 + 3.33 Ri)^{1.5} / (1 + 10 Ri)^{0.5}.$$

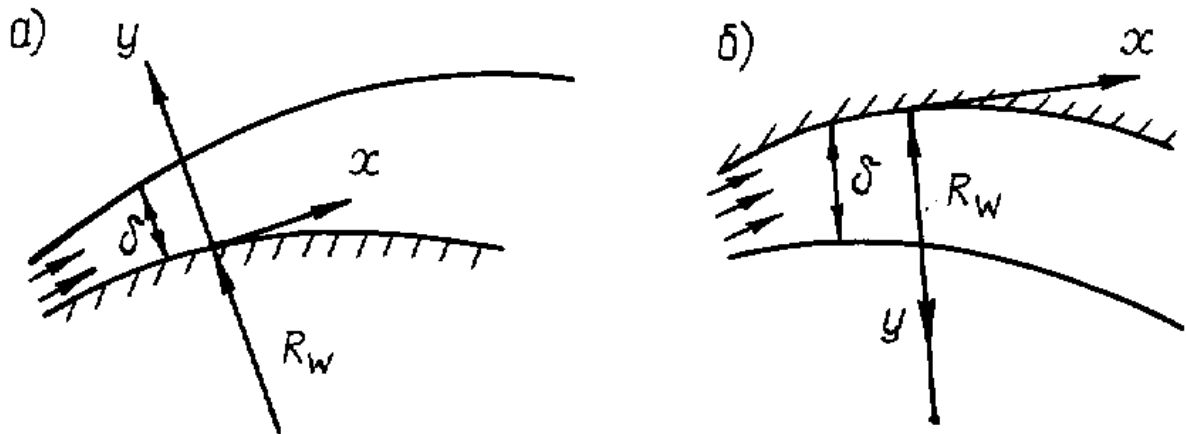


Рис.6

Обычно методы, разработанные для расчета ТПС на плоской пластине, применяются для анализа характеристик ТПС на криволинейных стенках. Опыт показывает, что такой подход допустим до тех пор, пока толщина пограничного слоя δ мала по сравнению с радиусом R_W кривизны поверхности: $\delta/R_W \ll 1$. Для конечных величин δ/R_W влияние кривизны может быть весьма существенным. Следует различать вогнутые и выпуклые поверхности (рис.6). На выпуклых поверхностях (а) $R_W > 0$; на вогнутых (б) $R_W < 0$.

В качестве примера учета влияния кривизны стенки в алгебраической модели турбулентности приводится обобщение модели Грабарука-Лапина-Стрельца для ТПС несжимаемой жидкости на выпуклой криволинейной поверхности [10]:

$$\nu_t = \min(\kappa y \hat{v}_i D, \kappa \delta^* \hat{v}_o F_{Kleb}), \quad (4.27)$$

где D – демпфирующий множитель, определяемый по (4.22); \hat{v} – скоростной масштаб, определяемый на основе распределения касательного напряжения вблизи стенки. Скоростной масштаб для внутренней и внешней областей слоя записываются как

$$\hat{v}_o = u_\tau \exp(-CRi_t), \quad \hat{v}_i = u_\tau \exp(-CRi_t),$$

где $C = 1.4$ – эмпирическая константа, Ri_t – турбулентное число Ричардсона, определяемое выражением

$$Ri_t = \frac{\delta^*}{R_W} \beta, \quad \beta = \left[\frac{\nu_t}{\nu} + 1 \right].$$

Существенной особенностью представленной модели является применение в качестве сомножителя перед параметром кривизны δ^*/R_W весовой функции β , аргументом которой является локальное турбулентное число Рейнольдса $Re_t = \nu_t/\nu$, характеризующее структур ТПС. В отличие от существующих аналогичных моделей, в которых разброс эмпирической «константы» β составляет величину порядка 200-300% (в зависимости от рассматриваемого течения и параметра кривизны), предложенная функциональная зависимость для β позволяет описать ТПС на выпуклой криволинейной поверхности в широком диапазоне параметра кривизны $\delta/R_W = 0.01 \div 0.09$.

В качестве примера алгебраической модели турбулентности для описания переходного пограничного слоя представляется обобщение модели Прандтля-Лойцянского-Клаузера-3 [10]. Параметром, характеризующим начало и конец переходного участка, является степень турбулентности внешнего потока ϵ . Согласно этой модели в выражении для турбулентной вязкости (4.20) и (4.21) вместо константы $\kappa = 0.41$ применяется функция перехода K следующего вида:

$$K = \kappa \left\{ 1 - \exp \left[-6 \frac{(Re^{**})^3 - (Re_S^{**})^3}{(Re_E^{**})^3 - (Re_S^{**})^3} \right] \right\}, \quad (4.28)$$

где числа Рейнольдса начала $Re_S^{**}(\epsilon)$ и конца $Re_E^{**}(\epsilon)$ перехода определяются эмпирическими соотношениями (см. Abu-Ghannam B., Shaw R. // J. Mech. Eng. Sci., 1980. V.22. N5. P.213-228):

$$Re_S^{**} = 163 + \exp(6.91 - \epsilon),$$

$$Re_E^{**} = \begin{cases} 2.667 Re_S^{**}, & \epsilon < 6\%, \\ 320 + \exp(7.7 - 0.4475\epsilon), & \epsilon \geq 6\%. \end{cases}$$

Модель перехода помимо структурного параметра $S = u_\tau \delta^* / \nu$ включает безразмерный параметр Re^{**} и два эмпирических параметра: числа Рейнольдса $Re_S^{**} = U_e \delta_S^{**} / \nu$ и $Re_E^{**} = U_e \delta_E^{**} / \nu$ начала и конца перехода соответственно. Следует отметить, что δ^{**} — толщина потери импульса.

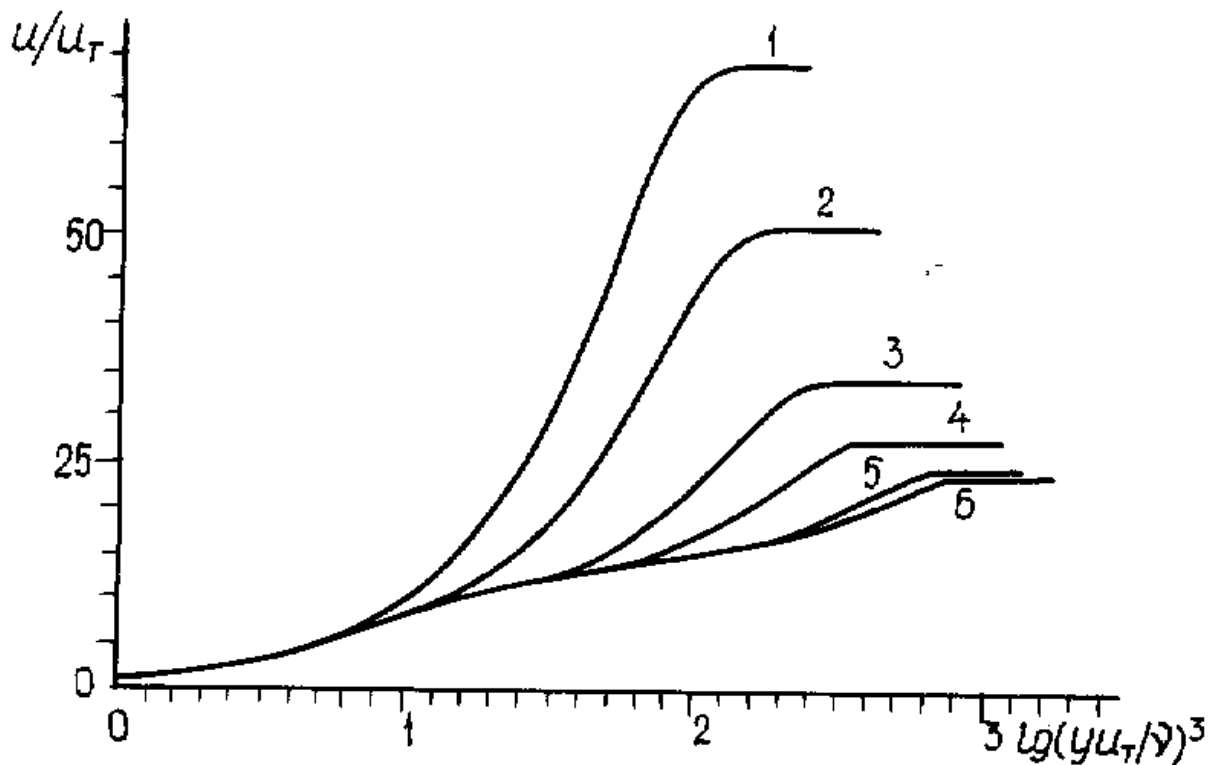


Рис.7

Данный подход позволяет описать формирование элементов структуры переходного пограничного слоя от начала перехода (ламинарный режим) до его окончания (турбулентный режим). На переходном участке формируются элементы внутренней области ТПС: вязкий подслой, буферная область и участок логарифмического профиля скорости. Внешняя область ТПС изначально структурно «родственна» внешней области ламинарного слоя (слой постоянной вязкости).

На рис. 7 представлена динамика формирования элементов структуры переходного пограничного слоя от профиля Блаузиса (кривая 1) до турбулентного режима (кривая 6). Показано, что формирование логарифмического участка профиля скорости начинается по достижении локального значения турбулентного числа Рейнольдса порядка 13, при котором турбулентная вязкость на порядок превосходит молекулярную, независимо от уровня внешней турбулентности. При этом структура переходного слоя приобретает черты развитого ТПС (вязкий подслой, переходная область, область логарифмического профиля скорости, области следа и перемежаемости).

4.5. Тестирование алгебраических моделей. Область применимости

Большое внимание в области моделирования турбулентности направлено на тестирование моделей и определение границ их применимости. Эта работа проводится как отдельными исследователями, так и в рамках специальных международных программ, координируемых Стэнфордским университетом, Европейской комиссией по развитию научных исследований и Европейским сообществом по течениям, турбулентности и горению (ERCOfTAC). Значительный вклад в решение данной проблемы внесли три Стэнфордские международные конференции (1968, 1980 и 1990гг.), получившие неофициальное название «олимпиад моделей турбулентности» [5]. Под эгидой ERCOfTAC регулярно проводятся специализированные международные рабочие семинары, на которых обсуждаются результаты расчетов, полученные участниками при использовании одних и тех же моделей для так называемых «тестовых течений», т.е. выбранных экспериментов, для которых получены наиболее надежные и полные характеристики. Обычно к их числу относятся интегральные характеристики течений (например, сопротивление и подъемная сила), локальные данные по давлению, трению и теплопередаче на обтекаемой поверхности.

Таблица 4.1

№	Источник	Характеристика течения
1	<i>Hunt, Joubert, 1979</i>	Установившееся течение в криволинейном канале $R_1/R_0=0.99$
2	<i>Eskinazi, Yeh, 1954</i>	Установившееся течение в криволинейном канале $R_1/R_0=0.9$
3	<i>Wallendorf, 1935</i>	Установившееся течение в криволинейном канале $R_1/R_0=0.8$
4	<i>Smith, Townsend, 1982</i>	Течение Куэтта между соосными цилиндрами $R_1/R_0=2/3$
5	<i>Wendl, 1933</i>	Течение Куэтта между соосными цилиндрами $R_1/R_0=0.68 \div 0.935$
6	<i>Johnston, Halleen, Lezius, 1972</i>	Установившееся течение во вращающемся канале $R_0=0.05 \div 0.2$
7	<i>Kristoffersen, Anderson, 1993</i>	Установившееся течение во вращающемся канале (DNS) $R_0=0.05 \div 0.5$

В [11] систематизированы физические эксперименты, отобранные в качестве «эталонных» для исследования возможностей моделей турбулентности. В их число входит группа экспериментов по одномерным установившимся течениям в криволинейных и вращающихся каналах (табл. 4.1), а также эксперименты по плоским пограничным слоям с нулевым, отрицательным, положительным и знакопеременным градиентом давления (в том числе предотрывные), по пограничным слоям со вдувом, отсосом и внезапным изменением скорости стенки. Кроме того, для оценки точности моделей привлекаются опытные данные по пограничным слоям с продольной кривизной поверхности, по предотрывному пограничному слою на продольно обтекаемом цилиндре и по динамике квазитрехмерного пограничного слоя, переходящего с вращающегося цилиндра на неподвижный (табл. 4.2).

На рис. 8 [5] сравниваются численные прогнозы на основе модели Болдуина-Ломакса (сплошные линии) и модели Себеси-Смита (пунктирные линии) с экспериментальными данными Лауфера для потока в круглой трубе при числе Рейнольдса 40000, определенному по диаметру и среднемассовой скорости. Предсказания по модели Болдуина-Ломакса отличаются от экспериментальных данных не более чем на 3%. Прогнозы для профиля скорости по модели Себеси-Смита имеют большую погрешность (порядка 8%). Расчетные коэффициенты трения в пределах 7% для модели Себеси-Смита и 1% для модели Болдуина-Ломакса согласуются с универсальным законом Прандтля для трения в гладкой трубе (см. Шлихтинга)

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 4 \lg(2\text{Re}_D \sqrt{c_f}) - 1.6,$$

где c_f и Re_D основываются на среднемассовой скорости в трубе и диаметре трубы D .

На рис.9 проводится сравнение результатов расчетов по трем моделям: Болдуина-Ломакса (кривая 1), Себеси-Смита (кривая 2) и Гарбарука-Лапина-Стрельца (кривая 3) с данными эксперимента для эталонного течения №4800, характеризующегося наличием положительного градиента давления. Продемонстрировано вполне удовлетворительное согласие для коэффициента трения на стенке, свидетельствующее о приемлемости рассмотренной группы моделей для предотрывных турбулентных течений несжимаемой вязкой жидкости.

Таблица 4.2

№	Краткое название	Характеристика	Расчетные параметры, сравниваемые с экспериментом
1	1400	Плоская поверхность, $\text{grad}P=0$	$C_F(\text{Re}_\theta), u(y), u^+(y^+)$
2	2700	Плоская поверхность, $\text{grad}P<0$	$C_F(x), U_e(x), H(x), u(y), u^+(y^+)$
3	3300	Плоская поверхность, $\text{grad}P>0$, слабый	$C_F(x), U_e(x), H(x), u(y), u^+(y^+)$
4	1200	Плоская поверхность, $\text{grad}P>0$, умеренный	$C_F(x), U_e(x), H(x), u(y), u^+(y^+)$
5	0141	Плоская поверхность, $\text{grad}P>0$, сильный	$C_F(x), U_e(x), \overline{H(x)}, u(y), u^+(y^+), \overline{u'v'}(y)$
6	4800	Плоская поверхность, $\text{grad}P>0$, сильный (предотрывный п.с.)	$C_F(x), U_e(x), H(x), u(y), u^+(y^+)$
7	0431	Плоская поверхность, $\text{grad}P>0$, сильный (предотрывный п.с.)	$C_F(x), U_e(x), \overline{H(x)}, u(y), u^+(y^+), \overline{u'v'}(y)$
8	ТМ	Плоская поверхность, знакопеременный $\text{grad}P$	$C_F(x), U_e(x), H(x), u(y), u^+(y^+)$
9	0241	Плоская поверхность, вдув	$C_F(x), \delta^*(x), H(x), u(y), u^+(y^+)$
10	0242	Плоская поверхность, отсос	$C_F(x), U_e(x), H(x), u(y), u^+(y^+)$

11	HA	Плоская поверхность, $gradP=0$ скачкообразное изменение скорости на стенке	$C_F(x), u(y)$
12	DF	Цилиндрическая поверхность, $gradP>0$, сильный (предотрывный пограничный слой)	$C_F(x), U_e(x), H(x), u(y), \overline{u'v'}(y)$
13	DH	Цилиндрическая поверхность, $gradP=0$ (скачкообразное изменение скорости вращения цилиндра)	$C_F(x), u(y), w(y), \overline{u'v'}, \overline{v'w'}$
14	0231	Выпуклая поверхность со слабой кривизной	$C_F(x), \delta^*(x), u(y), \overline{u'v'}(y)$
15	0232	Выпуклая поверхность со слабой кривизной	$C_F(x), \delta^*(x), u(y), \overline{u'v'}(y)$
16	0233	Выпуклая поверхность с сильной кривизной	$C_F(x), H(x), u(y), \overline{u'v'}(y)$

На рис.10 тестируется модифицированная модель Гарбарука-Лапина-Стрельца (4.27) для ТПС на выпуклой поверхности. В качестве тестового опыта выбран вариант с сильной кривизной $\delta/R_{IV} = 0.09$ (Gillis J.C., Johnston J.P. // J. Fluid Mech., 1983.V.135.P.297-302). Представление профилей скорости во внутренней области ТПС вполне удовлетворительное, однако наблюдается некоторая «незаполненность» профиля во внешней части.

На рис.11 выполнено тестирование модифицированной модели Прандтля-Лойцянского-Клаузера-3 (4.28) на основе имеющихся экспериментальных данных (Shubauer G.B., Klebanoff P.S. // NACA TN.3489, 1955). Получено вполне удовлетворительное согласие с экспериментальными данными по интегральным характеристикам переходного пограничного слоя: коэффициенту трения c_f и формпараметру $H = \delta^*/\delta^{**}$.

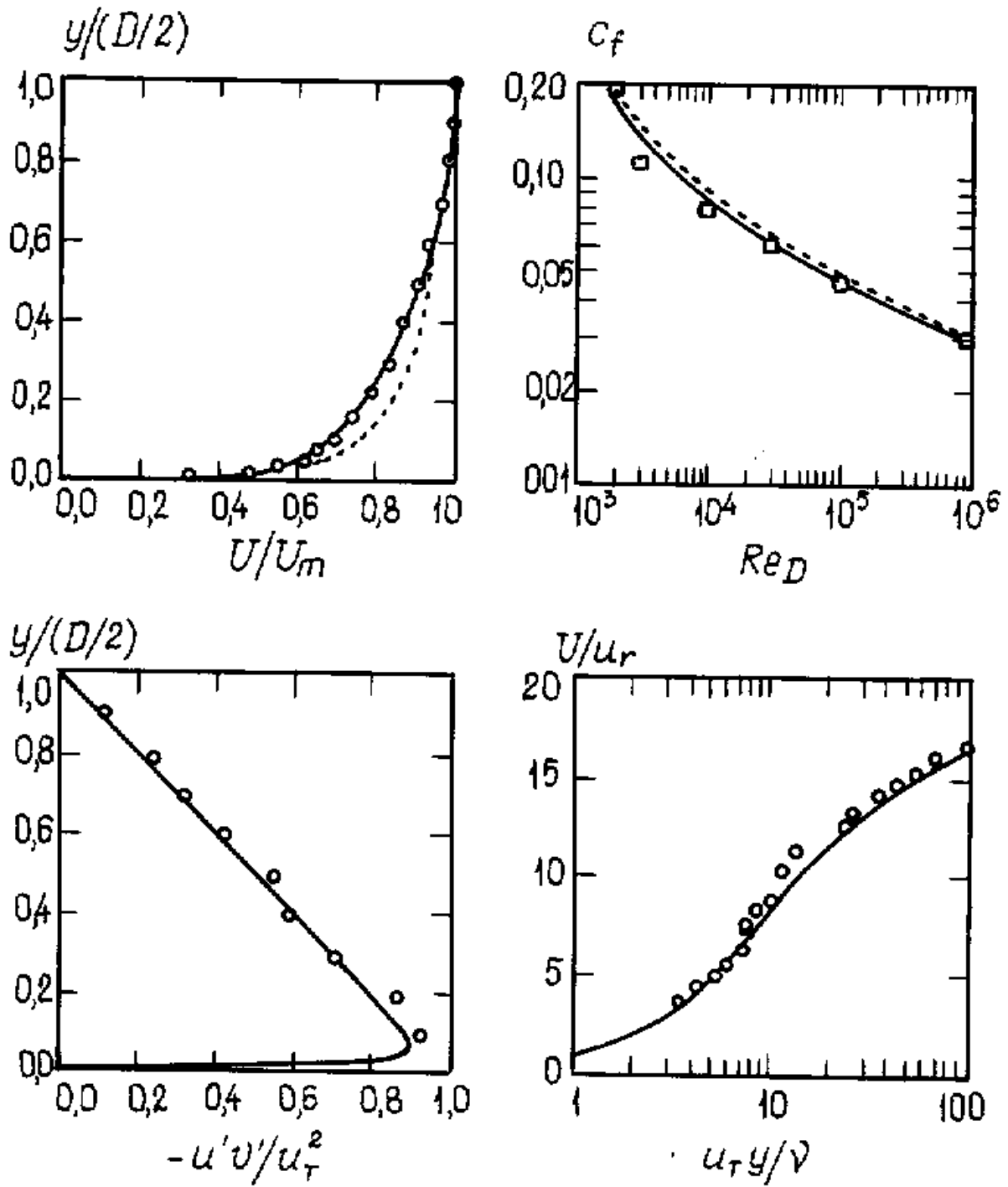


Рис.8

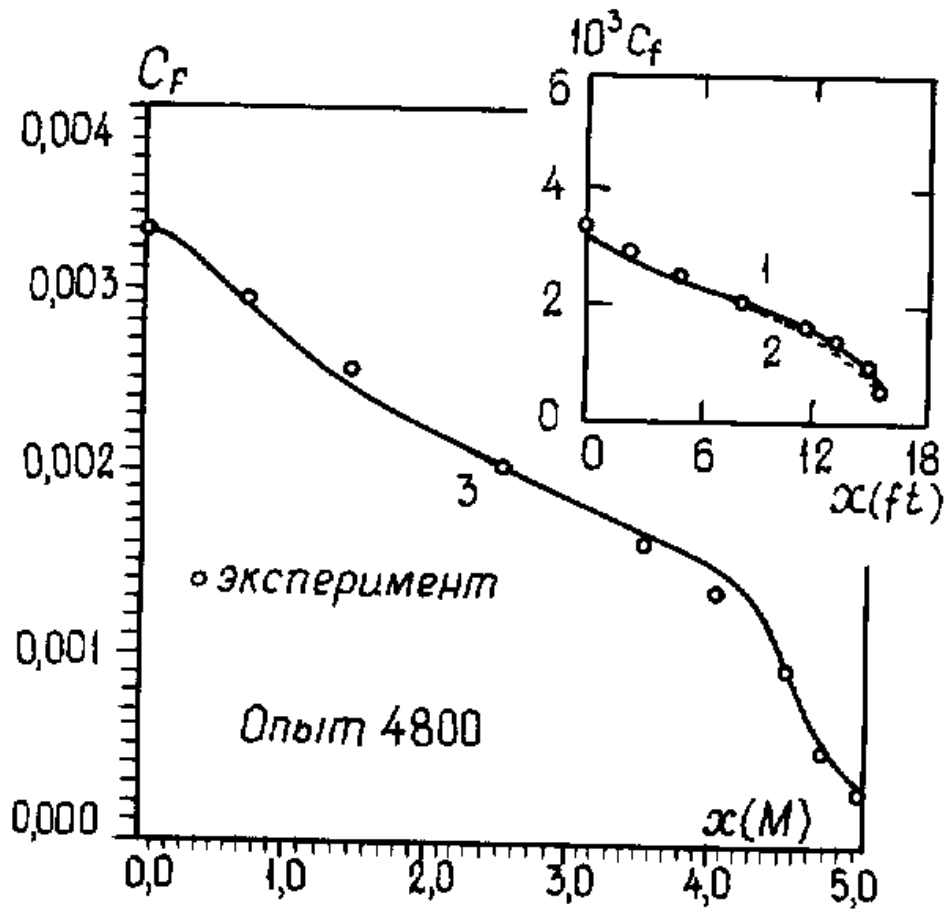


Рис.9

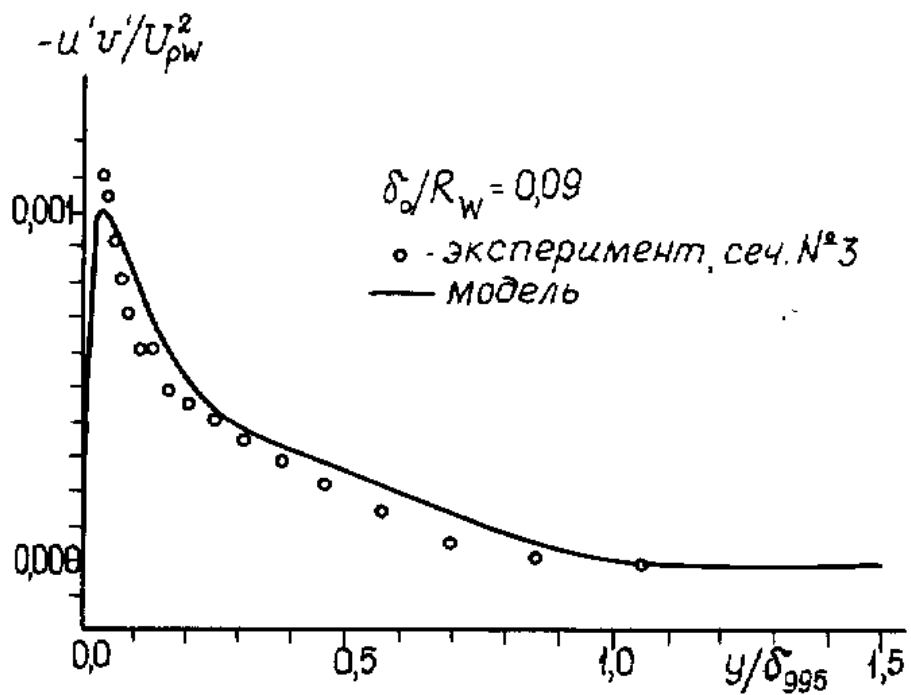


Рис.10

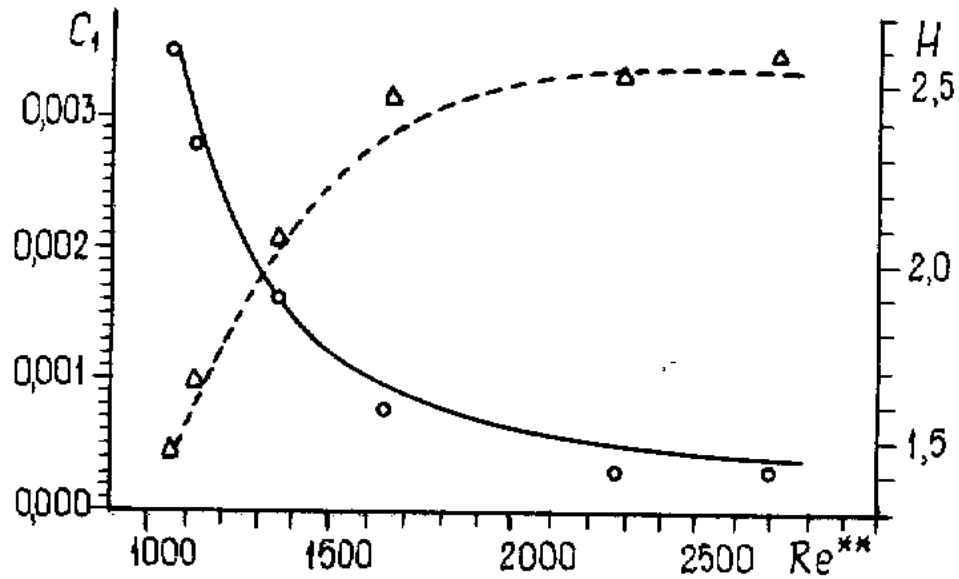


Рис.11

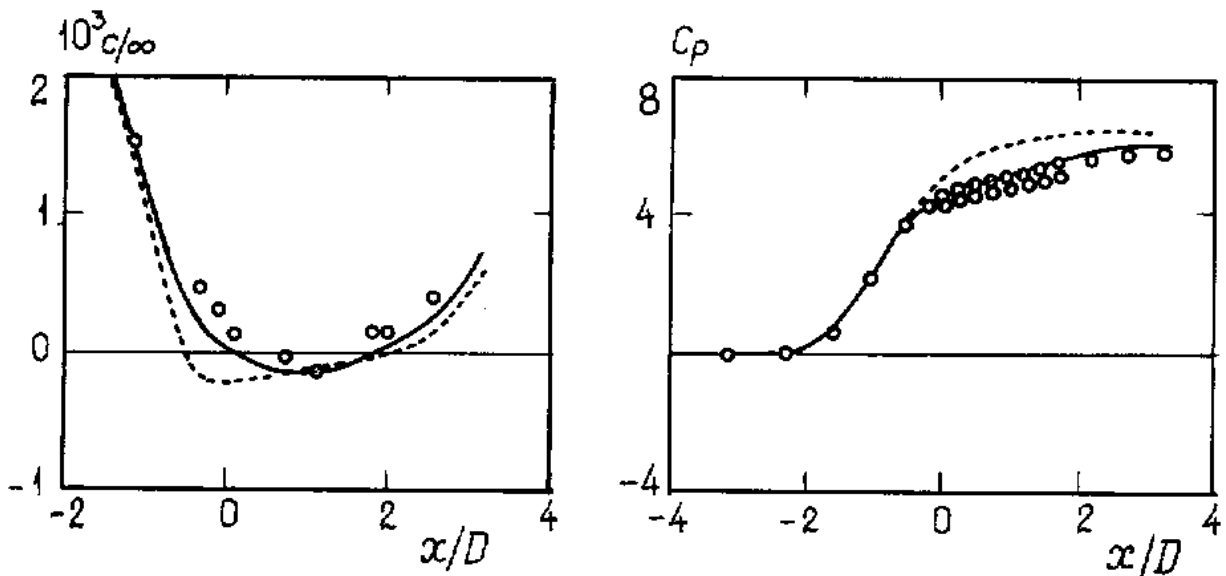


Рис.12

На рис.12 приводится сопоставительный анализ результатов расчета распределений коэффициентов поверхностного трения и давления по модели Джонсона-Кинга (сплошные линии) и Болдуина-Ломакса (пунктирные линии) с данными измерений характеристик отрывного течения, полученных Драйвером (1991). Показано, что прогнозы по модели Джонсона-Кинга довольно близки к измеренным характеристикам, в особенности к размерам отрывной зоны.

Оценка применимости алгебраических моделей турбулентности детально обсуждается в работах Вилкокса [5] и Роди [6].

Ограниченность моделей такого типа заключается в их природе – в локальном равновесии моделируемой турбулентности. Это означает, что в каждой точке пространства наблюдается баланс генерации и диссипации турбулентной энергии, на который не влияют ни перенос из соседних точек, ни предыдущее развитие процесса. Таким образом, алгебраические модели неприменимы в случаях с доминирующим влиянием конвективного и диффузионного переноса турбулентности или когда существенную роль играет предыстория процесса. Большие трудности для сложных типов течений представляет задание распределений длины смешения. Однако для

простых ситуаций, в частности при описании сдвиговых слоев, модель вполне пригодна.

Безусловно, что алгебраические модели самые доступные из всех турбулентных моделей. Они концептуально очень просты и редко вызывают неожиданные вычислительные трудности. Поскольку алгебраические модели исключительно удобны в использовании, от них нужно отказываться лишь в тех случаях, когда необходимость применения альтернативных подходов представляется очевидной.

Однако пользователь этих моделей должен всегда знать о проблеме неполноты получаемой с их помощью информации. Эти модели будут хорошо работать только при анализе тех потоков, на которые они были предварительно настроены. Имеются слабые надежды относительно их экстраполяции за пределы установленной базы данных, для которой рассматриваемые алгебраические модели были калиброваны.

Все рассмотренные здесь модели приемлемо воспроизводят трение и скоростные профили для несжимаемых ТПС при условии, если градиент давления не слишком значителен. Ни одна из моделей не имеет очевидного превосходства перед другими: уровень точности примерно одинаков для всех. Главное достоинство модели Болдуина – Ломакса над моделью Себеси-Смита - независимость от параметров типа δ_v^* , которые часто трудно определить в сложных потоках с высокой точностью. Однако ни одна из моделей не надежна для анализа отрывных течений. Несмотря на это известное ограничение, многие неосторожные исследователи применяют модель Болдуина-Ломакса к необычайно сложным потокам, где единственным ее достоинством является то, что расчетный процесс при этом не разваливается.

Модель Кинга-Джонсона представляет многообещающую модификацию, которая избегает многих несоответствий алгебраических моделей для отрывных течений. Однако, подобно другим алгебраическим моделям, она не обеспечивает информацию относительно масштаба турбулентности и, таким образом, является неполной. Следовательно, эта модель разделяет многие из недостатков любой алгебраической модели. Улучшенное согласование между теорией и экспериментом для отрывных течений было получено с потерей элегантности и простоты модели Себеси-Смита. Число коэффициентов замыкания увеличилось с трех до семи и модель неизбежно требует итерационной процедуры решения. Модель также сформулирована только для заблокированных стенками потоков, и ее применимость, таким образом, ограничена только канальными течениями, то есть модель является сильно зависимой от геометрии. С другой стороны, модель была применена к многим трансзвуковым потокам, которые очень трудно предсказать современными моделями турбулентности. В результате, она представляется полезным инженерным инструментом в пределах проверенного диапазона применимости.

4.6. Применение алгебраических моделей для расчета обтекания тел с передней срывной зоной (ПСЗ)

Разработка эффективных расчетных моделей для течений со сложной структурой, характеризующихся наличием разномасштабных элементов, может быть реализована в рамках так называемого зонального (по Катлеру) принципа конструирования многоблочного расчетного алгоритма при использовании концепции декомпозиции расчетной области течения в сочетании с введением в рассматриваемых подобластях моделей турбулентности соответствующего уровня, в том числе алгебраических моделей. Безусловно, при этом возникает важная и довольно не простая проблема сшивки решений при переходе от одной подобласти к другой. Однако такой подход с инженерной точки зрения является подчас весьма экономичным и оправданным.

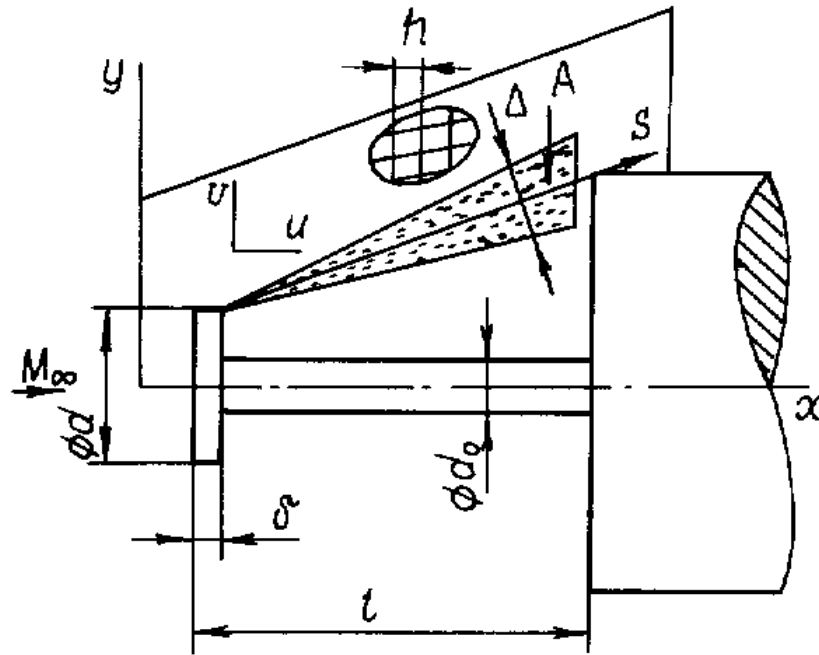


Рис.13

В качестве примера реализации такой концепции представляется решение задачи о сверхзвуковом осесимметричном турбулентном обтекании продольно расположенного цилиндра диаметром D с установленным перед ним на расстоянии l от переднего торца тонким (толщиной δ) диском диаметром d на игле диаметром d_o (размеры относятся к диаметру D). На рис.13 показана конфигурация тела с выделенной областью турбулентного сдвигового слоя.

В ряде работ по обтеканию такого типа тел с передней срывной зоной в условиях фиксированного (на диске) положения точки отрыва потока использован упрощенный подход к численному моделированию, основанный на идеализации течения во всей расчетной области, включая как ударный слой, так и циркуляционную зону. Механизм турбулентного переноса, реально существующий в сдвиговом слое, развивающемся вдоль поверхности раздела течения в ударном слое и в циркуляционной зоне, в этом случае предположительно воспроизводится с помощью вводимой при разностной аппроксимации исходной системы уравнений Эйлера схемной (аппроксимационной) вязкости. Примененный в ряде работ (см., например, [12]), такой подход для разностных схем первого порядка аппроксимации и прямоугольных, согласованных с контуром тела, расчетных сеток позволил правильно передать основные элементы рассматриваемого течения и с достаточной для инженерной практики точностью рассчитать интегральную силовую нагрузку на тело (его коэффициент волнового сопротивления C_x^b) в широком диапазоне изменения основных геометрических и режимных параметров (d, l, M_∞) при высоких числах Рейнольдса набегающего потока Re_∞ . Вместе с тем установлено, что для тел со сравнительно малыми (порядка 0.2) диаметрами диска, сопротивление которых близко по величине к минимальному для данного класса тел, имеет место большая (порядка 20-30%) погрешность в определении C_x^b (в сравнении с экспериментальными данными).

На рис.14 показаны зависимости коэффициента волнового сопротивления компоновки с геометрическими размерами $d = 0.23$, $\delta = 0.07$, $d_o = 0.1$ от высту-

пания диска l (а) и профили статического давления на торце цилиндра для $l = 1.45$ (б) при числе Маха $M_\infty = 4.15$. Цифрами 1,2 отмечены результаты расчетов на прямоугольной и на косоугольной сетках, 3 – экспериментальные данные трубных испытаний, 4 – результаты расчета с наложенным сдвиговым слоем.

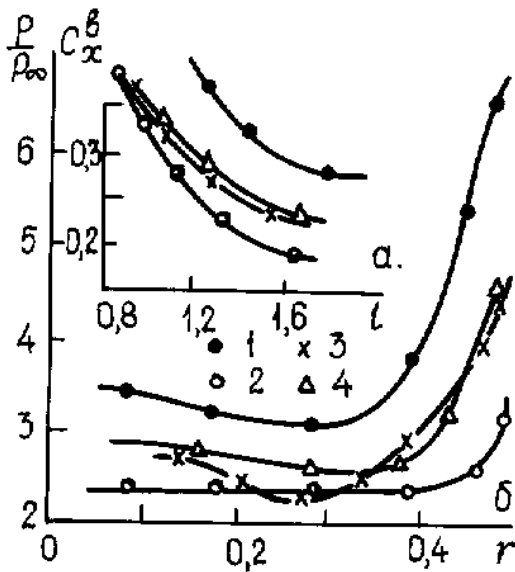


Рис.14

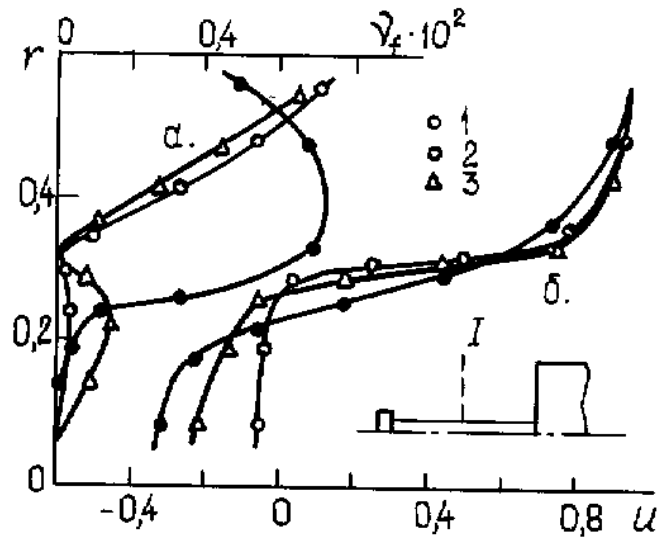


Рис.15

На рис. 15 продемонстрированы профили схемной вязкости ν_f (а) и осевой составляющей скорости u (б) в срединном сечении передней срывной зоны рассмотренной компоновки. Цифрами 1,2 отмечены результаты расчетов на прямоугольной и на косоугольной сетках, 3 – результаты расчета с наложенным сдвиговым слоем.

Причина такого значительного рассогласования расчетных и экспериментальных результатов, а также существенного влияния типа расчетной сетки на решение задачи заключается (рис.15) в чрезмерном утолщении сдвигового слоя, что вызвано неадекватностью в общем случае действий турбулентной и схемной вязкости. Проведенные методические исследования показали, что схемная вязкость ν_f , величина которой при использовании схем первого порядка аппроксимации пропорциональна местной скорости потока, шагу сетки h (см. рис.13) и синусу удвоенного угла скоса потока относительно граней ячейки, наиболее сильное влияние оказывает в областях больших градиентов, определяющих течение параметров и, в частности, в сдвиговом слое на границе циркуляционной зоны.

Уменьшить влияние схемной вязкости на решение задачи можно за счет повышения порядка аппроксимации используемой разностной схемы, либо за счет изменения структуры разностной сетки при ориентации расчетных ячеек, попадающих в область сдвигового слоя вдоль по потоку. В обоих случаях для описания турбулентного переноса в течениях с циркуляционными зонами требуется привлечение тех или иных моделей турбулентности полуэмпирического типа. Наиболее простой способ решения заключается в использовании классической конвективной (второй) модели Прандтля в априорно заданном сдвиговом слое на границе циркуляционной зоны в сочетании с алгоритмом, основанном на концепции идеальной жидкости для других участков расчетной области. Именно такой способ реализован в [13].

Течение газа вне сдвигового слоя считается невязким. В соответствии с конвективной моделью Прандтля коэффициент турбулентной вязкости определяется как

$$\nu_t = c_t(u_{max} - u_{min})\Delta,$$

где C_t — эмпирическая константа, u_{max}, u_{min} — значения скорости на границе сдвигового слоя со стороны внешнего потока и циркуляционной зоны соответственно. Толщина сдвигового слоя Δ задается зависимостью $\Delta = C_H s$, где C_H — эмпирическая константа, а s — координата, отсчитываемая от кромки диска вдоль опорной линии, соединяющей острые кромки диска и цилиндра (см. рис.13).

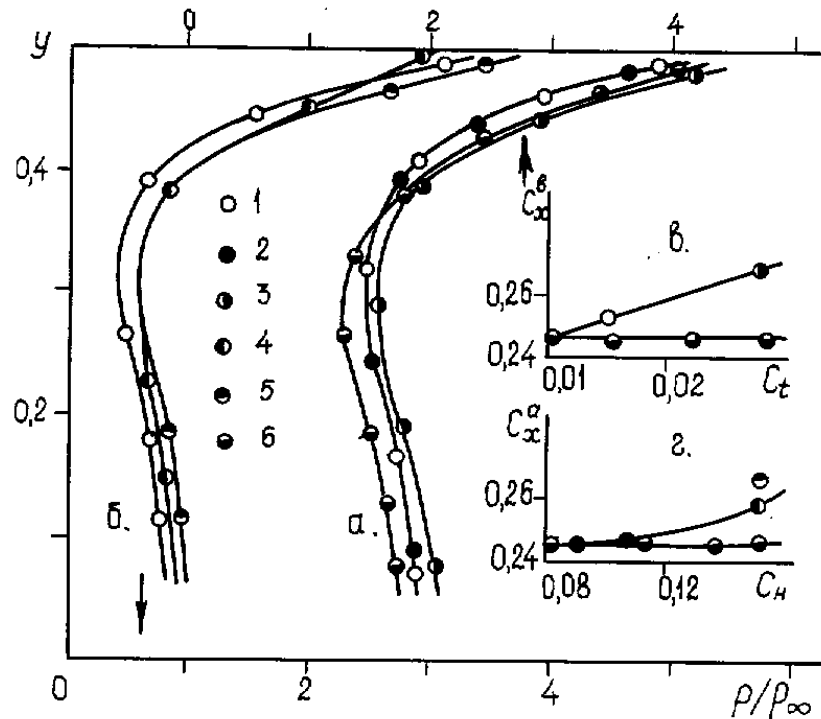


Рис.16

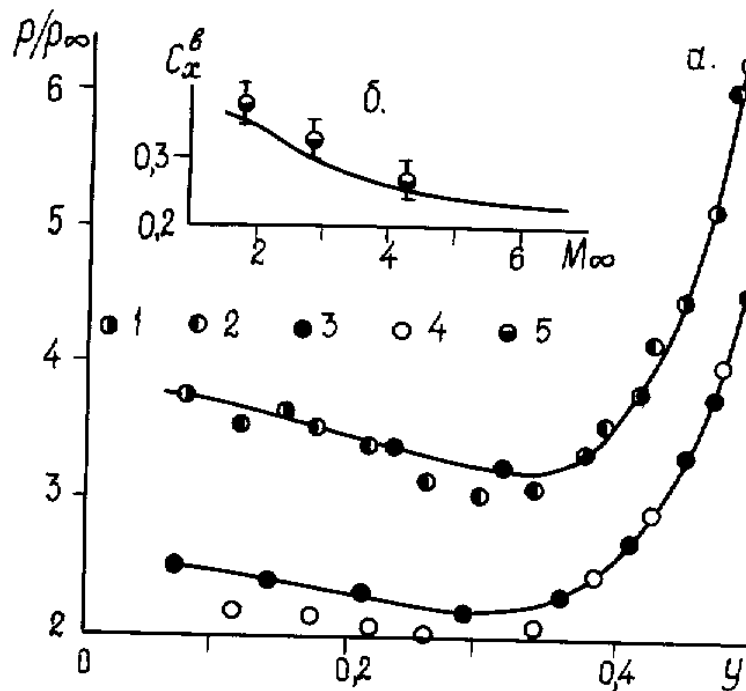


Рис.17

Расчетная область покрывается косоугольной сеткой, ячейки которой концентрируются в окрестности опорной линии и острых кромок. Внешние границы сдвигового слоя в этом случае являются ломаными линиями. Ячейка считается принадлежащей

сдвиговому слою, если ее геометрический центр попадает в пределы слоя. Классическое понятие сдвигового слоя предусматривает равенство нулю напряжения трения на его границах. Здесь же завихренность на границах сдвигового слоя отлична от нуля: с внешней стороны градиенты скорости определяются параметрами потока в ударном слое, а с внутренней стороны – характеристиками течения в циркуляционной зоне. Таким образом, строгое определение краевой задачи для расчета параметров потока в сдвиговом слое оказывается практически невозможным. По этой причине допускается разрыв составляющих тензора рейнольдсовых напряжений и турбулентного потока тепла на границах сдвигового слоя: для приграничных ячеек, принадлежащих слою, указанные характеристики определяются в соответствии с описанной процедурой, а для соседних с ним ячеек вне слоя считаются равными нулю. Такой подход в определенной степени представляется оправданным, поскольку позволяет учитывать влияние завихренности внешнего потока и эффекты турбулентности внутри выделенного слоя.

В принятой модели турбулентности использованы две эмпирические константы. Первоначально их выбор проведен на основе рекомендаций по расчету свободных турбулентных сдвиговых слоев (см., например, [14]): $c_H = 0.089$, $c_t = 0.015$. В ходе методического численного эксперимента величины констант варьировались в широких пределах и их значения уточнялись исходя из условия наилучшего согласования расчетных результатов с имеющимися экспериментальными данными при фиксированных значениях характерных параметров (d, l, M_∞). Последние изменялись в пределах: $d = 0.2 \div 0.4$; $l = 1.1 \div 1.8$; $M_\infty = 1.5 \div 6$ (диаметр иглы и толщина диска выбирались фиксированными и равными 0.1 и 0.04 соответственно).

На рис.16 представлены результаты методических исследований влияния констант модели турбулентности на распределение давления по переднему торцу цилиндра и величину коэффициента волнового сопротивления тела с размерами $l = 1.45$, $d = 0.23$, обтекаемого потоком с числом Маха $M_\infty = 4.15$. Здесь давление отнесено к давлению в набегающем потоке. Цифрами 1 - 5 обозначены расчетные результаты, соответствующие значениям констант: 1 – $c_H = 0.089$; $c_t = 0.015$; 2 – 0.089; 0.01; 3 – 0.089; 0.026; 4, 5 – 0.149; 0.01. Цифрой 6 на рисунке отмечены экспериментальные данные.

В большинстве численных расчетов (см. кривые, обозначенные цифрами 1-4) сдвиговой слой развивается симметрично относительно опорной линии. Расчетные результаты, отмеченные цифрой 5, соответствуют несимметричному развитию сдвигового слоя, когда с внешней стороны от опорной линии располагается треть толщины сдвигового слоя. На рис.16 группа кривых (а) отражает воздействие на профиль давления по торцу цилиндра константы c_t (при фиксированном значении константы $c_H = 0.089$), а группа кривых (б) иллюстрирует влияние константы c_H (при $c_t = 0.01$). Изменение C_x^b показано на рис.16,в и г соответственно для первого и второго случаев. При этом изменение C_t втрое, а C_H вдвое приводит к 10% -ному приращению C_x^b . Константы оказывают различное воздействие на форму профиля давления: C_t практически не влияет на скорость нарастания профиля смещения, поэтому профили давления смещаются эквидистантно (см.рис.16,а); напротив, увеличение C_H приводит к уменьшению давления на периферийной части торца и его возрастанию в окрестности иглы, т.е. к сглаживанию профиля и уменьшению градиента давления по торцу цилиндра. Несимметричное развитие сдвигового слоя обуславливает рост давления на периферийной части торца. При изменении C_H и C_t в

указанных пределах максимальная скорость течения в вихре изменяется в пределах 20% от скорости невозмущенного потока, а положение точки присоединения потока остается неизменным. На основании анализа результатов можно предложить следующий способ оценки констант. В диапазоне изменения $c_t = 0.01 \div 0.02$; $c_H = 0.07 \div 0.12$ значение одной из констант выбирается произвольно, а вторая константа находится из условия $c_H c_t = (1.3 \div 1.6) \times 10^{-4}$. При таком подходе погрешность в расчете C_x^b составляет примерно 4% по сравнению с соответствующим экспериментальным значением. В представленных ниже результатах расчетов $c_t = 0.015$; $c_H = 0.089$.

На рис.17 сравниваются экспериментальные и расчетные профили относительного давления по торцевой поверхности цилиндра для тел с различным выступанием диска: $l = 1.1$ (кривые 1,3) и 1.8 (кривые 2,4) – при фиксированных величинах $d = 0.23$ и $M_\infty = 4.15$. Цифрами 1,3 обозначены расчетные результаты, 2,4 – экспериментальные данные. На рис.17,б сопоставлены экспериментальная (кривая 5) и расчетная (кривая 6) зависимости $C_x^b(M_\infty)$ для тела с размерами $l = 1.45$, $d = 0.23$. Отмечается хорошее согласие результатов расчета и эксперимента при средних и высоких значениях числа Маха невозмущенного потока ($M_\infty > 3$). Некоторое рассогласование результатов при значениях числа Маха порядка 1.5-2.5 можно объяснить погрешностями методического характера, связанными, в частности, с криволинейностью реального сдвигового слоя. Таким образом, представленный алгоритм расчета организованных крупномасштабных вихревых структур, предполагающий выделение турбулентного сдвигового слоя, развивающегося вдоль границы циркуляционного течения, позволяет правильно прогнозировать локальные и интегральные характеристики тел с передней срывной зоной. Фактическая реализация зонального подхода к построению моделей в газовой динамике (см., например, [15]) дает возможность пролонгировать разработанный алгоритм для расчета других типов течений, в частности, ближнего следа за телом.

5. МОДЕЛИ С ОДНИМ УРАВНЕНИЕМ

Такие модели дают описание турбулентности с помощью одной переменной величины, для которой строится дифференциальное уравнение переноса. Другие турбулентные характеристики связываются

с ней с помощью алгебраических или иных соотношений.

5.1. Модель Колмогорова – Прандтля

Чтобы преодолеть ограниченность гипотезы пути смешения и алгебраических моделей вообще, были разработаны модели турбулентности, позволяющие учитывать перенос турбулентности путем решения дифференциального уравнения для этого переноса. По мнению Роди [6], в создании таких моделей был сделан важный шаг, когда, отказавшись от прямой связи между градиентами скоростей осредненного течения и характерным масштабом скорости \hat{v} в (3.2), последний стали определять из уравнения переноса. С физической точки зрения, для этой величины наиболее подходящим оказывается масштаб \sqrt{k} , где k – энергия турбулентных пульсаций (точнее ее плотность). Если такой масштаб использовать в (3.2) для коэффициента турбулентной вязкости, то получается выражение Колмогорова-Прандтля:

$$\nu_t = c'_\mu \sqrt{k} L, \quad (5.1)$$

где c'_μ – эмпирическая функция местного турбулентного числа Рейнольдса $Re_t = \sqrt{k} L / \nu$ или константа в режиме полностью развитой турбулентности при $Re_t \rightarrow \infty$.

Как известно, точное уравнение для энергии турбулентности можно вывести из уравнений Навье-Стокса. Для больших чисел Рейнольдса оно приобретает вид уравнения (1.16а):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j \frac{\partial k}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} D_s + P - \varepsilon_s,$$

$$\text{где } D_s = \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \delta_{jk} (\overline{u'_k p'}) - \overline{u'_j k'} = D_{kk}/2; \quad k' = u'_k u'_k / 2;$$

$$P = - \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} = P_{kk}/2; \quad \varepsilon_s = \nu \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}}.$$

Производная энергии турбулентности уравнивается членами, отвечающими за конвективный перенос за счет осредненного движения; диффузионный перенос, обусловленный пульсациями скорости и давления; за генерацию энергии, вызванную взаимодействием напряжений Рейнольдса и градиентов средней скорости, и вязкую диссипацию энергии в тепло. В случае равенства P и ε_s имеем частный случай локального равновесия турбулентности.

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, обычно вводят следующие соотношения для диффузионного и диссипативного членов:

$$- \frac{1}{\rho} \delta_{jk} (\overline{u'_k p'}) - \overline{u'_j k'} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_s = c_D k^{3/2} / L, \quad (5.3)$$

где σ_k и c_D – эмпирические константы. Соотношение (5.2) учитывает предположение о градиентном характере диффузионного переноса, а (5.3) – концепцию Колмогорова о том, что при больших числах Рейнольдса количество диссипированной турбулентной энергии определяется энергосодержащим движением. С учетом соотношений (5.2) и (5.3), а также выражения для $\overline{u'_j u'_k}$ (3.1) уравнения для k записываются в виде

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j \frac{\partial k}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} - c_D \frac{k^{3/2}}{L}. \quad (5.4)$$

Это одна из форм записи уравнения переноса турбулентной энергии, соответствующая большим числам Рейнольдса. Значения эмпирических констант выбраны равными $c'_\mu c_D \approx 0.09$ и $\sigma_k = 1$, используя данные исследований Эммонса (1954) и Глушко (1965). Следует отметить, что истинная скорость диссипации турбулентной энергии ε очень близка при больших числах Рейнольдса к рассчитываемой в (5.3) ε_s . Составляющие тензора рейнольдсовых напряжений определяются по формуле (3.1), а кинематическая вихревая вязкость выражается как

$$\nu_t = k^{1/2} L = c_D k^2 / \varepsilon. \quad (5.5)$$

Выражение Колмогорова-Прандтля (5.3) и диссипативный член уравнения для k (5.4) содержат линейный масштаб L , который должен быть задан для замыкания моделей турбулентности. В слоях со сдвигом масштаб L можно определить при помощи простых эмпирических соотношений, подобных выражениям для пути смешения l_m . Вольфштейн (1967) обнаружил, что с помощью введения демпфирующих множителей в диссипации и вихревой вязкости, подобных множителю Ван-Дрифта, можно улучшить прогнозирование характеристик низкорейнольдсовых течений.

Модель переноса турбулентной энергии позволяет учитывать конвективный и диффузионный перенос и предысторию процесса, и поэтому в случаях, когда эти факторы играют важную роль, она оказывается предпочтительной по сравнению с гипотезой пути смешения. Примерами могут служить течения, в которых перенос тепла или массы происходит через плоскость, где $\partial \bar{u} / \partial y = 0$, или неравновесные пограничные слои. В модели уравнения энергии турбулентная вязкость предполагается изотропной. Однако это приближение может быть довольно грубым. Оно не подходит для описания наблюдавшейся экспериментально турбулентности, порождаемой во вторичных течениях в некруговых каналах.

5.2. Уравнение для турбулентного трения

Брэдшоу, Феррис, Атвелл (1967) сформулировали модель с одним уравнением на основании предположения о том, что отношение рейнольдсовых напряжений τ_{xy} к энергии турбулентных пульсаций k есть величина постоянная. Измерения Таунсенда (1976) показали для пограничных слоев, следов и слоев смешения, что отношение указанных характеристик одинаково и задается как

$$\tau_{xy} \approx \beta_r k, \quad \beta_r = 0.3. \quad (5.6)$$

Константа β_r известна как константа Брэдшоу или, иногда, как константа Таунсенда (см. Вилкокса [5]). Сконструированное на основе соотношения (5.6) уравнение для турбулентного трения записывается как

$$\left(\bar{v}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \tau^t = 2a_1 \tau^t \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} [2a_1 \tau^t G \sqrt{\tau_{max}^t}] - 2a_1 \frac{(\tau^t)^{3/2}}{L}, \quad (5.7)$$

где $a_1 = 0.15$, $L = \delta \varphi(y/\delta)$, $G = G(y/\delta)$, φ и G — эмпирические функции, представленные графически на рис.18. При этом используется обозначение $\tau_{xy} = \tau^t = 2a_1 k$.

Приемлемость модели Брэдшоу-Атвелла-Ферриса для пограничных слоев без градиента давления оценивается выше (см. Вилкокса [5]), чем известных алгебраических моделей турбулентности. Для течений с положительным градиентом давления прогнозы близко соотносятся с результатами расчетов по другим тестируемым моделям на Стенфордской конференции 1968г.

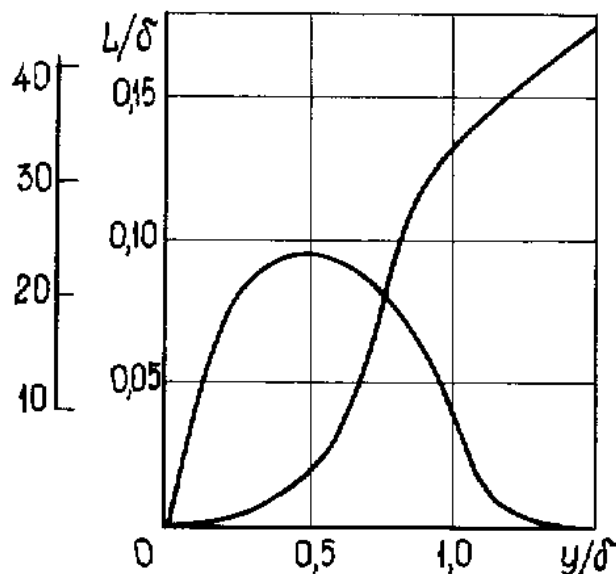


Рис.18

5.3. Уравнение для турбулентной вязкости

Модель с одним уравнением можно сформулировать, основываясь на других уравнениях, нежели уравнение для энергии турбулентных пульсаций. Ни и Коважный (1968), например, предложили феноменологическое уравнение переноса для кинематической турбулентной вязкости ν_t . Уравнение содержало члены, подобные членам уравнения (5.4). Модель имела четыре константы и требовала априорного задания масштаба турбулентности. Секундов (1971) развил подобную модель, которая в версии 1992г известна как модель Гуляева, Козлова и Секундова или модель ν_t -92. Эта модель обеспечивает вполне удовлетворительное описание не только большинства канонических сдвиговых течений (плоская и осесимметричная струя, слои смешения в несжимаемой и сжимаемой жидкости, пограничный слой на плоской пластине при отсутствии и при наличии шероховатости поверхности и др.), но и ряда более сложных течений, представляющих практический интерес.

Применительно к ТПС модель (1971) записывается в следующем виде:

$$\overline{v_x} \frac{\partial \nu_t}{\partial x} + \overline{v_y} \frac{\partial \nu_t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [(\chi \nu_t + \nu) \frac{\partial \nu_t}{\partial y}] + \alpha \nu_t \left| \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} \right| - \gamma \frac{\nu_t (\beta \nu_t + \nu)}{s^2}, \quad (5.8)$$

где $s^2 = s_o^2 + 0.4 s_o h_s + 0.004 h_s^2$, s_o – расстояние от стенки, h_s – размер шероховатости стенки, $\chi = 2$, $\gamma = 50$, $\beta = 0.06$, $\alpha = 0.2 \varphi(\nu_t/\nu)$, $\varphi = (\nu_t^2 + 11\nu_t\nu + 13\nu^2)/(\nu_t^2 - 11\nu_t\nu + 65\nu^2)$.

Сравнительно недавно Болдуин и Барч (1990), Спалларт и Аллмарес (1992) вывели более сложные модельные уравнения для вихревой вязкости. Модель Болдуина-Барча, например, включает семь коэффициентов замыкания и три эмпирических демпфирующих функции. Модель Спалларта-Аллмареса SA включает в себя восемь коэффициентов замыкания и три замыкающих функции. По своей форме SA близка к модели ν_t -92 и конструировалась прежде всего для задач внешней дозвуковой аэродинамики. В результате модельное уравнение переноса турбулентной вязкости оказалось заметно проще, чем в модели ν_t -92. Следуя Вилкоксу, имеем выражение для кинематической вихревой вязкости $\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}$. (5.9)

Уравнение для вихревой вязкости записывается как

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} - c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2 + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} [(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k}] + \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k}. \quad (5.10)$$

Коэффициенты замыкания и вспомогательные функции имеют вид:

$$c_{b1} = 0.1355, \quad c_{b2} = 0.622, \quad c_{v1} = 7.1, \quad \sigma = 2/3,$$

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1+c_{b2})}{\sigma}, \quad c_{w2} = 0.3, \quad c_{w3} = 2, \quad \kappa = 0.41,$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6},$$

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2},$$

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad S = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}.$$

Тензор $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial \overline{u_i} / \partial x_j - \partial \overline{u_j} / \partial x_i)$ – тензор вращения, а d – расстояние от ближайшей стенки. Следует обратить внимание на то, что источниковые члены в уравнении для турбулентной вязкости зависят от расстояния до ближайшей стенки,

а также от градиента турбулентной вязкости. При удалении от стенки модель предсказывает не распадающуюся турбулентную вязкость в невозмущенном потоке.

Опыт эксплуатации модели SA показал, что ее реальные возможности заметно шире, чем предполагалось при ее создании. Более того, после введения в нее поправок на кривизну линий тока и вращение, границы ее применимости модели заметно расширились.

В табл. 5.1 сведены результаты отклонений рассчитанных с помощью SA и измеренных коэффициентов трения в эталонных градиентных течениях.

Таблица 5.1

Градиент давления	Течения	Спалларт-Аллмарес
Отрицательный	1400, 1300, 2700, 6300	1.4%
Малый положительный	1100, 2100, 2500, 4800	9.9%
Умеренный положительный	2400, 2600, 3300, 4500	11.0%
Сильный положительный	0141, 1200, 4400	7.2%
В целом	-	7.4%

Обнаружено, что предсказанный с помощью SA коэффициент трения так же близко соответствует измеренным величинам, как и алгебраическая модель Болдуина-Ломакса.

Известно, что задача об обтекании обращенной назад ступеньки является весьма популярным тестом для анализа моделей турбулентности. На рис.19 показана схема одного из экспериментов, выполненных Драйвером и Сигмюллером (1985). Важным свойством рассматриваемого типа течения является то, что точка отрыва оказывается фиксированной в острой кромке ступенчатого канала. Гораздо сложнее прогнозировать течения с априори неизвестной точкой отрыва.

На рис. 20 сравниваются расчетные и измеренные коэффициенты трения вдоль нижней стенки канала при нулевом отклонении верхней стенки от направления потока. Модель SA предсказывает длину отрывной зоны, измеренную в долях высоты ступеньки, равной 6.1. Он лишь на 2% отличается от экспериментальной величины 6.2H. При угле отклонения 6° модель предсказывает длину циркуляционной зоны в 8.6H, что на 6% отличается от измеренной величины 8.1H.

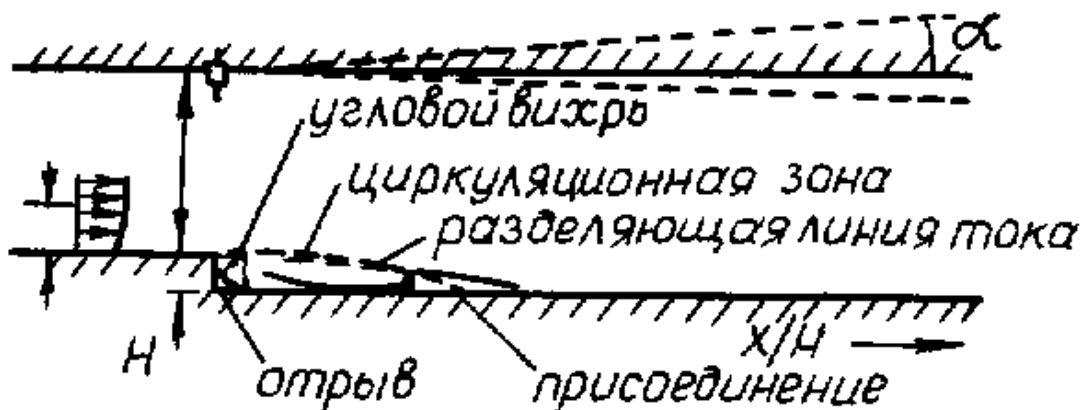


Рис.19

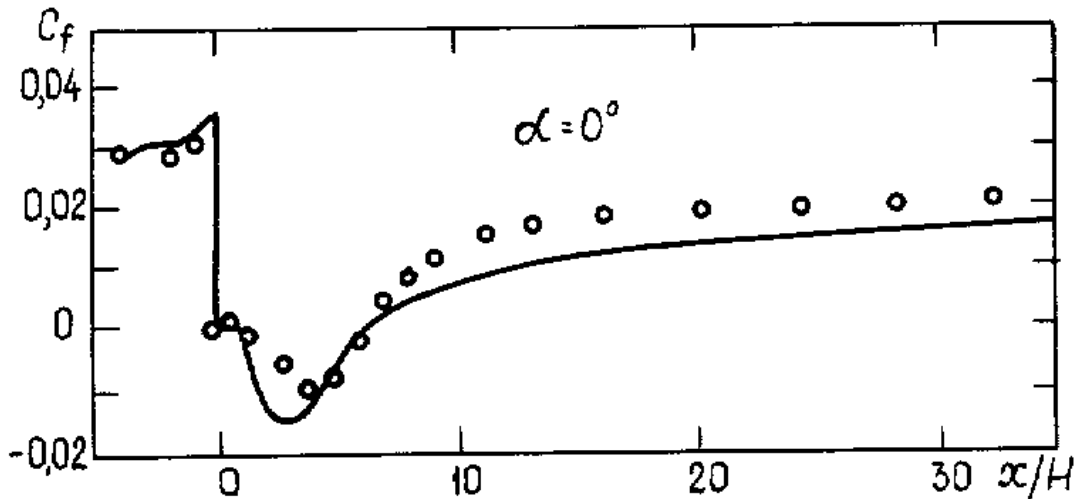


Рис.20

Таким образом, модель SA является удовлетворительной для многих инженерных приложений. В особенности она применима для расчета обтекания профилей и крыльев, для которых она была калибрована. В то же время, ее приемлемость для струйных задач менее убедительна. Показано (1997), что прогнозы коэффициента расширения осесимметричной затопленной струи по указанной модели вдвое отличаются от данных измерений.

Резюмируя, следует отметить, что рассмотренный класс моделей с одним дифференциальным уравнением обладает большей приемлемостью к описанию турбулентных течений с учетом сжимаемости, переходных явлений, кривизны линий тока и отрыва потока. Однако объектами их приложения, как правило, являются простые конфигурации потоков с минимальным набором структурных элементов. Как и в случае алгебраических моделей, сильна привязка к калибровочным типам течений. Снять указанные ограничения можно, например, при определении масштаба турбулентности как зависимой переменной, т.е. в рамках двух- и многопараметрических моделей турбулентности.

6. МОДЕЛИ С ДВУМЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Модели турбулентности с двумя дифференциальными уравнениями являются наиболее представительной группой дифференциальных моделей. Первая модель такого типа была предложена в классической работе Колмогорова (1942). Эта модель содержит уравнения переноса кинетической энергии турбулентности k и удельной (в единице объема) скорости диссипации энергии ω и, по современной терминологии, может быть отнесена к моделям типа k - ω . Иногда (см. Лаундера-Сполдинга (1974)) ω^2 определяют как осредненный квадрат пульсаций завихренности. Ее размерность – (время)⁻². Она связывается с k и ε соотношением

$$\omega = \varepsilon / (c_D k), \text{ где } \varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}.$$

Интенсивное развитие моделей с двумя уравнениями и их внедрение в расчетную практику началось гораздо позже: в конце 60-х – начале 70-х годов. При этом все развитые модели, так же как и модель Колмогорова, используют в качестве одного из уравнений уравнение переноса k . Причиной применения этого уравнения является то, что оно строго следует из уравнений Навье-Стокса, а также то, что для

его замыкания необходимо промоделировать только два члена: диффузионный и диссипативный. Выбор второго уравнения в модели с двумя дифференциальными уравнениями неоднозначен и обуславливается в конечном счете необходимостью определения дополнительной к k характеристики турбулентности для расчета турбулентной вязкости из алгебраических соотношений. Следует подчеркнуть, что наибольшее распространение получили два типа моделей: уже упоминавшиеся модели типа k - ω и модели типа k - ε .

6.1. Диссипативная двухпараметрическая модель турбулентности

Линейный масштаб L характеризует размеры больших энергосодержащих вихрей. На эту величину, как и на энергию турбулентных пульсаций k , влияют процессы переноса и предыстория явления. Например, при переносе вихрей, сгенерированных сеткой, вниз по потоку их локальные размеры во многом определяются начальными размерами. Линейные масштабы испытывают влияние и других процессов. Диссипация разрушает мелкие вихри, что приводит к увеличению их средних размеров. Растяжение вихревых трубок, связанное с энергетическим каскадом, напротив, уменьшает этот радиус. Баланс всех указанных процессов можно выразить модельным уравнением переноса масштаба L , которое позволяет установить распределение L . Использование этого уравнения стимулируется тем, что трудно подобрать универсальную формулу для оценки L . Однако вовсе необязательно, чтобы независимой переменной был сам линейный масштаб турбулентности. Возможна любая комбинация вида $Z = k^m L^n$, поскольку энергия турбулентности k определяется из решения уравнения для k .

Сконструированные на основе введенной переменной модели вихревой вязкости различаются значениями показателей степени m и n . Широкое распространение получила диссипативная модель, построенная для $m = 3/2$ и $n = -1$. Диссипативный член уравнения для k является неизвестной переменной, подлежащей определению из уравнения относительно комплекса $Z = k^{3/2}/L$ и представляющей скорость диссипации турбулентной энергии в предположении достаточно больших значений турбулентного числа Рейнольдса ($\varepsilon \approx \varepsilon_s$). Выражение для турбулентной вихревой вязкости, как следует из (5.5), имеет вид

$$\nu_t = c_\mu f_\mu k^2 / \varepsilon. \quad (6.1)$$

В (6.1) функция f_μ , учитывающая влияние турбулентного числа Рейнольдса, при $Re_t \rightarrow \infty$ полагается равной единице. Кроме того принимается, что $c_\mu = c_D = 0.09$. Также отмечается, что, используя условие локального равновесия энергии турбулентных пульсаций в пристеночном слое, можно связать длину пути смешения l , энергию турбулентности k и скорость ее диссипации ε с помощью соотношений:

$$\nu_t = l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right), \quad \nu_t = c_\mu k^2 / \varepsilon, \quad \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon.$$

Из них следует, что $\partial \bar{u} / \partial y = \varepsilon / (c_\mu^{1/2} k)$, откуда, используя первое соотношение, получаем

$$\partial \bar{u} / \partial y = \varepsilon / (c_\mu^{1/2} k) \quad \text{или} \quad \varepsilon = c_\mu^{3/4} k^{3/2} / l. \quad (6.2)$$

Так как $\varepsilon = c_D k^{3/2} / L$, где $c_\mu = c_D = 0.09$, из (6.2) следует, что $L = c_\mu^{3/4} l$.

Как отмечалось выше, $\nu_t = c_\mu k^2 / \varepsilon$, а $\partial \bar{u} / \partial y = \varepsilon / (c_\mu^{1/2} k)$. Тогда, если принять, что трение на стенке $\tau_w \approx \rho \nu_t \partial \bar{u} / \partial y$, получаем

$$\tau_w = \rho c_\mu^{1/2} k \quad \text{или} \quad k = \tau_w / (\rho c_\mu^{1/2}). \quad (6.2a)$$

Следует подчеркнуть, что выражения (6.2) и (6.2a) часто используются для определения энергии турбулентных пульсаций и скорости ее диссипации в пристеночном слое при условии, что течение в нем является полностью турбулентным.

6.2. Моделирование членов генерации, диссипации и диффузии в уравнении для изотропной диссипации

Исходное уравнение для изотропной диссипации ε_s (1.18) подвергается моделированию в случае больших значений турбулентного числа Рейнольдса, когда искомая величина ε_s примерно совпадает по величине со скоростью диссипации энергии турбулентности ε . Моделирование членов уравнения начинается с члена генерации диссипации P_ε :

$$P_\varepsilon = - 2\nu \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k}} - 2\nu \left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} + \right. \\ \left. + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} \right) - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}.$$

Известны работы, в которых при конструировании моделей рассматриваемого типа первым членом ($P_{\varepsilon 1}$) генерации диссипации пренебрегают, а второй член ($P_{\varepsilon 2}$) связывают с изотропной диссипацией ε_s соотношением вида [16]

$$- 2\nu \left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} \right) = - c_{\varepsilon 1} \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon_s \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad (6.3)$$

где $c_{\varepsilon 1}$ - постоянная.

Такое выражение использовано потому, что при $i = j$ выражение (6.3) принимает вид

$$- 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)} = - c_{\varepsilon 1} \frac{2k}{k} \varepsilon_s = - 2c_{\varepsilon 1} \varepsilon_s.$$

Так как $\overline{\nu (\partial u'_i / \partial x_k)^2} = \varepsilon_s$, то постоянная $c_{\varepsilon 1}$ имеет порядок единицы (второй член в левой части (6.3) равен нулю в силу уравнения неразрывности). Что касается третьего слагаемого $P_{\varepsilon 3}$ в P_ε , то имеются работы, в которых оно группируется с членом диссипации ε_s и моделируется следующим образом [16]:

$$P_{\varepsilon 3} + \varepsilon_s = 2\nu \left[\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{\left(\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \right] = c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_s^2}{k}, \quad (6.4)$$

где $c_{\varepsilon 2}$ - постоянная.

Такая форма обычно пригодна для описания состояния турбулентности, близкого к изотропному, при $Re_t \rightarrow \infty$ (в этом случае $\varepsilon_s \approx \varepsilon$). При малых величинах

Re_t часто вводится коррекция этой формы для учета возможного влияния Re_t . Так, в [17] и в других работах принимается, что

$$P_{\varepsilon 3} + \varepsilon_s = c_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 1} \varepsilon^2 / k, \quad (6.4a)$$

где $f_{\varepsilon 1}$ - функция, зависящая от Re_t (при $Re_t \rightarrow \infty$ $f_{\varepsilon 1} = 1$).

Более сложной является форма представления указанных членов, предложенная в [16, 18] для существенно неизотропной турбулентности:

$$P_{\varepsilon 3} + \varepsilon_s = (c_{\varepsilon 2} + c_{\varepsilon 3} a_{ij} a_{ji}) \varepsilon_s^2 / k. \quad (6.4б)$$

Здесь $c_{\varepsilon 3}$ - постоянная; $a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} / k - 2/3 \delta_{ij}$ - тензор анизотропии или девиатор тензора напряжений, определяющий степень анизотропии турбулентности (равен нулю для изотропного поля). Тогда $a_{ij} a_{ji}$ - второй инвариант анизотропии тензора рейнольдсовых напряжений. Известны модели, включающие не только члены второго порядка анизотропии ($a_{ij} a_{ji}$), но и третьего ($a_{ij} a_{jk} a_{ki}$) [6], однако такие модели весьма сложны и трудно реализуемы в практических расчетах. Отметим, что когда причиной анизотропии является деформация поля осредненным сдвигом, анизотропия $a_{ij} a_{ji}$ изменяется поперек сдвигового слоя примерно так же, как и Pk/ε_s , где $P = -\overline{u'_i u'_j \partial \bar{u}_i / \partial x_j}$ [16].

Отсутствие какого-либо влияния анизотропии в (6.3), (6.4) в сравнении с (6.4б) компенсируется различием в значениях постоянных, входящих в эти зависимости. Это послужило основанием в ряде работ (например, [6]) пренебречь не только первым ($P_{\varepsilon 1}$), но и вторым ($P_{\varepsilon 2}$) членом в выражении для генерации диссипации. Вместе с тем, при моделировании оставшегося члена $P_{\varepsilon 3}$ совместно с членом диссипации диссипации ε_s в [6] принята форма представления, обобщающая зависимости (6.3) и (6.4):

$$-2\nu \left[\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{\left(\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \right] = (c_{\varepsilon 1} \frac{P}{\varepsilon_s} - c_{\varepsilon 2}) \frac{\varepsilon_s^2}{k}. \quad (6.4в)$$

Рассмотрим основные зависимости, используемые при моделировании диффузионного члена уравнения (1.18):

$$D_{\varepsilon} = \nu \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_j} - \overline{u'_j \varepsilon'_s} - 2 \frac{\nu}{\rho} \delta_{ij} \overline{\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right)}.$$

В большинстве работ при моделировании корреляции $\overline{u'_j \varepsilon'_s}$ обычно используется предположение о градиентной зависимости этого члена от ε_s . Так, в работе [6] принимается, что

$$\overline{u'_j \varepsilon'_s} = -c_{\varepsilon 4} \frac{k}{\varepsilon_s} \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_k}, \quad (6.5)$$

где $c_{\varepsilon 4}$ - постоянная.

Иногда этот член группируется с членом, определяющим диффузию диссипации из-за пульсаций давления (впрочем, известны работы, в которых членом, определяющим диффузию диссипации из-за пульсаций давления, пренебрегают [6]):

$$\overline{u'_j \varepsilon'_s} + 2 \frac{\nu}{\rho} \delta_{ij} \overline{\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right)} = -c_{\varepsilon 4} \frac{k}{\varepsilon_s} \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_k}. \quad (6.5a)$$

Несколько отличное представление указанных членов используется в работе [19]:

$$\overline{u'_j \varepsilon'_s} + 2 \frac{\nu}{\rho} \delta_{ij} \left(\overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k}} \right) = - c'_{\varepsilon 4} \nu_t \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_k} = - c''_{\varepsilon 4} \frac{k^2}{\varepsilon_s} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_k},$$

где $c''_{\varepsilon 4} = c'_{\varepsilon 4} c_{\mu}$.

6.3. Модельная форма записи уравнения для изотропной диссипации. Постоянные диссипативной модели

С учетом проведенного моделирования выделенных членов уравнение для изотропной диссипации становится замкнутым. Известно несколько вариантов его записи в зависимости от представления моделируемых членов. Одной из достаточно общих форм ([16]) является следующая:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \overline{u_j \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_j}} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_j} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_s}{k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \times \\ &\times \left[\nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] - \frac{\varepsilon_s^2}{k} (c_{\varepsilon 2} + c_{\varepsilon 3} a_{ij} a_{ji}), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $\nu_t = c_{\mu} k^2 / \varepsilon$, $\sigma_\varepsilon = 1 / c'_{\varepsilon 4}$, $a_{ij} = c_{\mu} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{k}{\varepsilon}$.

Следует отметить, что в большинстве работ поправкой на анизотропию турбулентности в последнем члене в правой части (6.6) пренебрегают, т.е. полагают $c_{\varepsilon 3} = 0$. В этом случае уравнение (6.6) приводится к виду, обычно используемому для расчета турбулентных течений при больших значениях турбулентного числа Рейнольдса, когда изотропная диссипация равна скорости диссипации энергии турбулентности ($\varepsilon \approx \varepsilon_s$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \times \\ &\times \left[\nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \end{aligned} \quad (6.6a)$$

Известна и упрощенная форма записи (6.6a):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)^2 - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (6.6b)$$

Постоянные моделирования, входящие в последнюю группу уравнений (6.6), имеют следующие значения: $c_{\mu} = 0.09$, $c_{\varepsilon 1} = 1.44$, $c_{\varepsilon 2} = 1.9$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.47$, $c_{\varepsilon 3} = 0$ или $c_{\mu} = 0.09$, $c_{\varepsilon 1} = 1.59$, $c_{\varepsilon 2} = 2.0$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $c_{\varepsilon 3} = 0$ [4]. В ряде работ (например, в [6]) $c_{\mu} = 0.09$, $c_{\varepsilon 1} = 1.44$, $c_{\varepsilon 2} = 1.92$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$. Последний набор констант назван стандартным из-за частого употребления.

Эти константы, как отметили Лаундер и Сполдинг (1974), определены на основе решения задач о плоской струе и слое смешения. Небольшое отличие от них имеет место вблизи стенок, однако и для пристеночных течений приведенный набор констант является приемлемым.

Значение $c_{\mu} = 0.09$, как отмечает Роди, было выбрано на основании экспериментов для близких к равновесным турбулентных потоков. В течениях со слабым сдвигом (например, в струях и следах вдали от источника), где разность скоростей в поперечном сечении мала по сравнению со скоростью конвективного переноса (приблизительно равной скорости свободного течения), генерация турбулентности значительно ниже диссипации. В таких случаях предлагается использовать эмпирическую зави-

симось c_μ от осредненного по толщине слоя отношения $(\partial \bar{u}_i / \partial x_j)^2 / \varepsilon$, которая значительно улучшает прогнозирование течений со слабым сдвигом.

Из приведенных выше данных видно, что имеет место некоторый разброс значений постоянных модели $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, σ_ε . Исследование затухающей турбулентности за решеткой при высоких значениях турбулентного числа Рейнольдса (однородная изотропная турбулентность) дает $c_{\varepsilon 2} = 1.8$ [20]. В то же время на больших расстояниях от решетки $c_{\varepsilon 2}$ асимптотически приближается к значению ~ 1.4 , что является следствием уменьшения Re_t . Для совместимости результатов, получаемых с помощью рассматриваемой модели турбулентности, с логарифмическим законом стенки для пристеночных течений, турбулентность которых близка по состоянию к локально равновесной, постоянная σ_ε выражается через c_μ и разность $(c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1})$ следующим образом [4]. Полагая пристеночный слой полностью турбулентным, уравнение (6.6б) для ε , соответствующее условию локальной изотропности диссипирующих вихрей для пограничного слоя на стенке при $y = 0$, можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} = 0.$$

С учетом свойства локального равновесия энергии турбулентных пульсаций в рассматриваемом течении, а именно $\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon$, последнее уравнение переписывается так:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) = (c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1}) \frac{\varepsilon^2}{k}.$$

Приняв, что трение на стенке, в соответствии с зависимостью (6.2а), $\tau_w = \rho c_\mu^{1/2} k$ и используя при этом модель Прандтля пути смешения $\nu_t = l^2 \partial \bar{u} / \partial y = l^2 \tau_w / \nu_t$, определим ν_t как $\nu_t = l(\tau_w / \rho)^{1/2} = l c_\mu^{1/4} k^{1/2}$, где $l = \kappa y$, $\kappa = 0.4 \div 0.42$ - постоянная Кармана.

Принимая во внимание последнее выражение, исходное уравнение для ε может быть переписано в виде

$$y \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = (c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1}) \frac{\sigma_\varepsilon}{\kappa c_\mu^{1/4}} \frac{\varepsilon^2}{k^{3/2}}.$$

Отметим, что при выводе этого уравнения использовано свойство, вытекающее из зависимости (6.2а) для k , заключающееся в том, что для развитого турбулентного течения вблизи стенки $y = 0$ градиент $\partial k / \partial y = 0$. Решением полученного уравнения является зависимость $\varepsilon(y)$ вида, аналогичного ранее полученной (6.2), а именно:

$$\varepsilon = \kappa c_\mu^{1/4} k^{3/2} / [(c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1}) \sigma_\varepsilon y]. \quad (6.2б)$$

Сравним зависимости (6.2) и (6.2б). Их сопоставление при $l = \kappa y$ дает искомую связь постоянных модели σ_ε , c_μ , $c_{\varepsilon 1}$ и $c_{\varepsilon 2}$ с постоянной Кармана κ :

$$\sigma_\varepsilon = \kappa^2 / [c_\mu^{1/2} (c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1})]. \quad (6.7)$$

По данным [20], совместимость с законом стенки требует отношения $c_\mu / \sigma_\varepsilon = 0.069$, т.е. при $c_\mu = 0.09$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$. В то же время из (6.7) следует, что постоянная $\sigma_\varepsilon = 1.225$ при $c_\mu = 0.09$, $c_{\varepsilon 2} = 1.92$ и $c_{\varepsilon 1} = 1.44$. Используя стандартный набор констант, можно найти, что $\kappa = 0.433$.

Отметим, что учет анизотропии турбулентности приводит к существенному занижению $c_{\varepsilon 1}$ (при прочих равных значениях постоянных модели). Так, при $c_{\varepsilon 3} = 3.5$ постоянная $c_{\varepsilon 1} = 0.47$ вместо 1.44 при $c_{\varepsilon 3} = 0$ [16].

6.4. Семейство двухпараметрических диссипативных $k - \varepsilon$ -моделей турбулентности

Не так давно $k - \varepsilon$ - модель являлась наиболее популярной моделью турбулентности. Первые усилия по ее разработке были предприняты Чоу (1945), Давыдовым (1961), Харлоу и Накаямой (1968). Однако центральной работой в этом направлении была статья Лаундера – Джонса (1972), получившая дальнейшее развитие и обобщение в исследованиях Лаундера-Сполдинга и Лаундера-Шармы (1972, 1974). Сформировалось понятие стандартной $k - \varepsilon$ - модели, построенной в предположении о реализации полностью развитых турбулентных течений при больших турбулентных числах Рейнольдса $Re_t \rightarrow \infty$.

В 70-х - 80-х годах появилось целое семейство $k - \varepsilon$ - моделей (см., например, Лаундер-Приддин-Шарма (1977), Лэм-Бремхерст (1981), Чен (1982) и др.). В результате достигнут существенный прогресс в расчетах различных типов течений, в том числе сдвиговых турбулентных. Это послужило основанием для включения моделей типа $k - \varepsilon$ во все вычислительные программы, а также в коммерческие пакеты, предназначенные для решения широкого круга задач прикладной аэродинамики и теплообмена (PHOENICS, FIRE, FLUENT, FLOW3D, STAR CD и ряд других).

Суммируя уравнения для энергии турбулентных пульсаций (5.4), скорости диссипации турбулентной энергии (6.6), выражения для кинематической турбулентной вязкости (6.1) и записывая комплект стандартных констант, представим стандартную $k - \varepsilon$ -модель:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \varepsilon, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\nu_t = c_\mu k^2 / \varepsilon, \quad c_\mu = 0.09, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3.$$

Недавняя версия $k - \varepsilon$ -модели предложена Яхотом и Орзагом (1986) на основе техники, заимствованной из теории ренормализованных групп, и известна как *RNG* $k - \varepsilon$ -модель. Уравнения для характеристик турбулентности и выражения для вихревой вязкости берутся такими же, как для стандартной $k - \varepsilon$ -модели. Однако модельная константа $c_{\varepsilon 2}$ определяется как функция

$$c_{\varepsilon 2} \equiv \tilde{c}_{\varepsilon 2} + \frac{c_\mu \lambda^3 (1 - \lambda / \lambda_o)}{1 + \beta \lambda^3}, \quad \lambda \equiv \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2 S_{ij} S_{ji}}.$$

Константы замыкания для *RNG* $k - \varepsilon$ -модели:

$$\begin{aligned} c_\mu = 0.085, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.42, \quad \tilde{c}_{\varepsilon 2} = 1.68, \quad \sigma_k = 0.72, \quad \sigma_\varepsilon = 0.72, \\ \beta = 0.012, \quad \lambda_o = 4.38. \end{aligned}$$

6.5. Метод пристеночных функций

Форма развитой в 6.4 модели пригодна для полностью турбулентных течений. Однако, как известно, вблизи стенок местное турбулентное число Рейнольдса Re_t является столь малым, что вязкие эффекты преобладают над турбулентными. Один из наиболее распространенных подходов к моделированию пристеночных течений

связан с использованием метода пристеночных функций, который обладает двумя очевидными достоинствами: позволяет экономить вычислительные ресурсы и учитывать влияние различных факторов, в частности, шероховатости за счет введения эмпирической информации.

В развитие метода пристеночных функций большой вклад внесен работами коллектива Лондонского имперского колледжа, руководимого Д.Сполдингом. Известно, что пристеночная область течения может быть разбита на три зоны: 1) вязкий подслой, в котором вязкие напряжения доминируют над рейнольдсовыми и имеет место линейная зависимость скорости потока от расстояния от стенки: $u^+ = y^+$, где $u^+ \equiv \frac{\bar{u}}{u_\tau}$, $y^+ \equiv \frac{u_\tau y}{\nu}$, а $u_\tau = \sqrt{\tau_w}$ - динамическая скорость; 2) буферный слой, где вязкие и рейнольдсовы напряжения имеют один порядок. «Сшивая» профили скорости для вязкого подслоя и логарифмического слоя, приближенно получают: $u^+ = 5 \ln y^+ + 3.05$; 3) в логарифмическом слое рейнольдсовы напряжения на много превышают вязкие, а профиль скорости может быть представлен в форме логарифмического закона: $u^+ = (1/\kappa) \ln(Ey^+)$, где κ - постоянная Кармана, E - постоянная, определяющая степень шероховатости (для гладкой стенки экспериментально установлено $E = 8.8$). Описанные участки обычно объединяются в одну внутреннюю область, которая занимает порядка 20% толщины ТПС и в которой генерируется около 80% всей энергии турбулентности. Одно из важных свойств внутренней области заключается в том, что профиль скорости слабо зависит от числа Рейнольдса, продольного градиента давления и прочих внешних условий (которые, тем не менее, могут вызвать уменьшение толщины внутренней области или даже полное ее вырождение). Именно это свойство послужило основой для построения универсальных соотношений (пристеночных функций), связывающих параметры течения с расстоянием от стенки. Наряду с универсальностью профиля скорости во внутренней области, метод пристеночных функций опирается на использование гипотезы о локальном равновесии энергии турбулентных пульсаций, а также свойства локальной изотропности диссипирующих вихрей.

Рассмотрим основные положения этого метода. Пусть ближайший к стенке расчетный узел P находится в логарифмическом слое ТПС на расстоянии y_P . Тогда для значений энергии в этой точке турбулентных пульсаций k_P и скорости диссипации ε_P имеем

$$\varepsilon_P = (c_\mu^{1/2} k_P^{3/2}) / (\kappa y_P), \quad k_P = \tau_w / c_\mu^{1/2}, \quad (6.9)$$

где τ_w - трение на стенке.

Принимая приближенно трение на стенке $\tau_w = \nu_t \partial \bar{u} / \partial y$ и $\nu_t = l^2 \partial \bar{u} / \partial y = l^2 \tau_w / \nu_t$, определяют ν_t как $\nu_t = l c_\mu^{1/4} k^{1/2} = l u_\tau$, где l - длина пути смешения.

Из условия локального равновесия $(\partial \bar{u} / \partial y)_P = \varepsilon_P / (c_\mu^{1/2} k_P)$, тогда с учетом (6.9)

$$(\partial \bar{u} / \partial y)_P = c_\mu^{1/4} k_P^{1/2} / (\kappa y_P) = u_\tau / (\kappa y_P).$$

Отметим, что неизвестными являются k_P , ε_P и τ_w . Учитывая это, k_P определяют не из соотношения (6.9), а из соответствующего уравнения переноса, считая

градиент k на стенке в направлении нормали к ней равным нулю. Фактически это означает, что поток диффузии k через грань, совпадающую со стенкой, равен нулю.

Определив k_P , можно использовать (6.9) для расчета трения на стенке, комбинируя его с логарифмическим профилем скорости. Тогда получаем соотношение

$$\tau_w = \kappa c_\mu^{1/4} k_P^{1/2} \bar{u}_P / \ln(Ey_P^+), \quad (6.10)$$

которое явным образом определяет не только значение, но и знак τ_w . Отметим, что в практике расчетов используется двухслойная схема (без буферного слоя), когда формула (6.10) применяется при $y_P^+ \geq 11.6$. Ниже указанной границы $\tau_{wl} = \nu \bar{u}_P / y_P$.

Остановимся более подробно на расчете характеристик турбулентности в пристеночном узле [21]. Диффузионные и конвективные потоки k для всех граней пристеночного контрольного объема определяются обычным образом с учетом значений для конвективного и диффузионного потоков через грань, совпадающую со стенкой. Генеративный член в уравнении для k : $P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau_w \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$. При его интегрировании по контрольному объему в предположении о постоянстве τ_w в окрестности стенки получаем $\int P dx dy = \tau_w \Delta x u_n$, где Δx — продольный размер контрольного объема, u_n — продольная составляющая скорости на верхней границе контрольного объема.

Что касается определения среднего по контрольному объему диссипативного члена ε_m , то, как следует из (6.9), ввиду резкого нарастания скорости диссипации при приближении к стенке предположение $\varepsilon_m = \varepsilon_P$ может привести к необоснованному занижению скорости диссипации в пристеночной области. Чтобы избежать этого, поступают следующим образом. Выражение для ε_P имеет вид

$$\varepsilon_P = \tau_w^{3/2} / (\kappa y_P) = u_\tau^3 / (\kappa y_P) = u_\tau^4 / (\kappa \nu y_P^+).$$

Интегрируя по y^+ текущее значение ε и применяя теорему о среднем, в итоге устанавливаем связь средней по контрольному объему диссипации ε_m с ее значением в пристеночном узле ε_P :

$$\varepsilon_m = \varepsilon_P \ln Ey_P^+. \quad (6.11)$$

В ряде работ описанная выше процедура корректируется с целью учета влияния градиента давления в пристеночной области на величину τ_w . В [21], например, вместо (6.10) приводится следующая формула

$$\tau_w = \kappa c_\mu^{1/4} k_P^{1/2} \bar{u}_P / \ln[Ey_P^+(1 + H)], \quad (6.12)$$

где $H = (\partial p / \partial x)_P c_\mu^{1/2} y_P / k_P$, $E = 8.8$. Очевидно, что применимость (6.12) ограничена сравнительно небольшими пределами изменения градиента давления $\partial p / \partial x$. При больших градиентах давления профиль продольной составляющей скорости существенно отличается от логарифмического.

Учитывая, что $y^+ \equiv \frac{u_\tau y}{\nu} = \frac{y}{\nu} \sqrt{\tau_w} = \frac{y}{\nu} c_\mu^{1/4} k^{1/2}$, можно (6.10) переписать как $\tau_w = \nu \bar{u}_P / y_P \times \kappa y_P^+ / \ln(Ey_P^+) = \tau_{wl} \kappa y_P^+ / \ln(Ey_P^+)$.

В заключение, приведем формулу для расчета трения на стенке с учетом скорости вдува-отсоса с поверхности тела v_w :

$$\tau_w = \tau_{wl} \kappa y_P^+ / \ln(Ey_P^+) 2^{\frac{(1+\alpha)^{1/2}-1}{\alpha}}. \quad (6.13)$$

Здесь $\alpha = \bar{u}_P v_w / (c_\mu^{1/2} k_P)$ - параметр вдува-отсоса.

6.6. Влияние низкорейнольдсовых эффектов в $k - \varepsilon$ -моделях

Построенное для $\varepsilon(\varepsilon_s)$ уравнение справедливо при достаточно высоких значениях турбулентного числа Рейнольдса. В этой связи диссипативная модель турбулентности, предполагающая обращение к дифференциальным уравнениям относительно k и ε без учета поправок на турбулентное число Рейнольдса, является асимптотической по отношению к Re_t (инерционности турбулентности), по крайней мере для неизменных значений постоянных модели. В большинстве известных работ, посвященных однопараметрическим моделям турбулентности, с уравнением для энергии турбулентных пульсаций применена коррекция значений постоянной модели c_μ и c_D , учитывающая влияние Re_t (введены зависимости f_μ и f_ε от Re_t). По аналогии с использованным в этой модели подходом, с целью обобщения двухпараметрической диссипативной модели турбулентности на случай течений при малых величинах Re_t в [20,23] предложена модификация диссипативной модели, сущность которой заключается в следующем. Так как при приближении к стенке уменьшаются турбулентное число Рейнольдса и масштаб турбулентности, в уравнения для k и ε включаются описывающие молекулярный перенос члены, которые обычно не учитываются при больших значениях Re_t . При этом отчасти видоизменяется и модель турбулентности за счет замены некоторых постоянных функциональными зависимостями от Re_t . По данным [23],

$$f_\mu = \exp[-b_1/(1+b_2 Re_t)], f_\varepsilon = 1 - a_1 \exp(-Re_t^2), \quad (6.14)$$

где a_1, b_1, b_2 - постоянные ($b_1 = 2.51, b_2 = 0.02, a_1 = 0.3$).

Введение дополнительных членов в уравнения для k и ε по сравнению с исходными уравнениями в форме (6.8) обусловлено как потребностью более точного определения искомым функций в области малых значений Re_t в непосредственной близости от стенки, так и тем, что скорость диссипации $\varepsilon \approx \varepsilon_s$ принимает ненулевое значение на стенке, в то время как энергия пульсаций на стенке равна нулю. Это значит, что отношение ε^2/k на стенке стремится к бесконечности. Для устранения такого неприемлемого результата диссипативный член в уравнении для k при $Re_t \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 0$) представляется в виде $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial x_j)^2$. В этом случае для вязкого подслоя стенки из (6.8) следует, что

$$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} = \tilde{\varepsilon} + 2\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{k} \right)^2,$$

откуда при $k \rightarrow 0$ получаем, что $\tilde{\varepsilon} = 0$ на стенке. Этот член включен больше по вычислительным соображениям, нежели по физическим. Лаундеру и Джонсу не удалось подобрать граничное условие для ε на поверхности, и по этой причине она полагается равной нулю на стенке, а в уравнение для k включен дополнительный член, в точности равный скорости диссипации энергии в окрестности стенки.

Корректировка уравнения для ε заключается в том, что соотношение (6.4в) записывается в виде [24]

$$c_{\varepsilon 1} \frac{P}{k} \varepsilon - c_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon} \varepsilon}{k} = c_{\varepsilon 1} \frac{P}{k} \varepsilon - c_{\varepsilon 2} \left[\varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{k} \right)^2 \right] \frac{\varepsilon}{k}. \quad (6.4г)$$

В работе [20] соотношение (6.4в) с учетом выражения для $\tilde{\varepsilon}$ имеет вид

$$c_{\varepsilon 1} \frac{P}{k} \tilde{\varepsilon} - c_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} = c_{\varepsilon 1} \frac{P}{k} \left[\varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{k} \right)^2 \right] - c_{\varepsilon 2} \left[\varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{k} \right)^2 \right]^2 / k. \quad (6.4д)$$

В обоих случаях учитывается член генерации диссипации из-за перемешивания в осредненном движении – первый член P_ε в уравнении (1.18). Этот член моделируется в виде [20]

$$- 2\nu \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k}} = 2\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2$$

и вводится в уравнение (6.8) с целью уточнения ε в пристеночной области. Указанный член способствует корректному отображению поведения k вблизи стенки. Полученная модифицированная модель турбулентности справедлива как при $Re_t \rightarrow \infty$, так и при $Re_t \rightarrow 0$.

Как показано в [23], в уравнении (6.8) константы $c_{\varepsilon 1}$, σ_k , σ_ε неизменны, в то время как $c_{\varepsilon 2} = c_{\varepsilon 2\infty} f_\varepsilon$, $c_\mu = c_{\mu\infty} f_\mu$. Здесь величины в правой части с индексом ∞ представляют константы для полностью развитого турбулентного течения и слегка отличаются от стандартных: $c_{\varepsilon 2\infty} = 2.0$, $c_{\mu\infty} = 1.55$. Однако это отличие представляется несущественным.

В заключение по данному разделу низкорейнольдсовых диссипативных двухпараметрических моделей турбулентности приведем сравнение группы моделей такого типа, выполненное Чоу и Голдстейном, предложившими еще одну модель для расчета отрывных и присоединяющихся течений.

Система уравнений для произвольной модели турбулентности записывается в обобщенной форме:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \varepsilon, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} f_1 P - c_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon) + E,$$

где $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + D$, $\nu_t = c_\mu f_\mu k^2 / \varepsilon$. Члены D , E представляются в табл.6.1, а константы и корректировочные функции – в табл.6.2.

Таблица 6.1

Аббр.	D	E
HR	0	0
LS	$2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	$2\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2$
LB	0	0
NH	$2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	$(1 - f_\mu) \nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2$
CG	0	S_ε

Таблица 6.2

Модель	Аббр	ε_w	C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε	f_μ	f_1	f_2
Высокие Re	HR	прист. ф-ции	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	1.0	1.0	1.0
Лаундер-Шарма	LS	0	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$\exp[3.4/(1+Rt/50)]$	1.0	$1-0.3\exp(-Rt^2)$
Лэм-Бремхерст	LB	$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$[1-\exp(-0.0165Ry)]^2 (1+20.5/Rt)$	$1+(0.05/f_\mu)^3$	$1-\exp(-Rt^2)$
Нагано-Хишида	NH	0	0.09	1.45	1.9	1.0	1.3	$[1-\exp(-y^+/26.5)]^2$	1.0	$1-0.3\exp(-Rt^2)$
Чоу-Голдстейн	CG	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} \Big _w = 0$	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$1-0.95\exp(-510^{-5}Rt)$	1.0	$1-0.222\exp(-Rt^2/36)$

$$S_\varepsilon = 1.44(1 - f_\mu) \left[2\nu\nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \right) \frac{\varepsilon}{k} \right] + \max \left[0.83 \frac{\varepsilon^2}{k} \left(\frac{l}{C_l x_n} - 1 \right) \left(\frac{l}{C_l x_n} \right)^2, 0.0 \right],$$

где $l = k^{3/2}/\varepsilon$, $C_l = 2.44$, а x_n – нормаль к стенке. Rt , Ry – турбулентные числа Рейнольдса, построенные по энергии турбулентности и по расстоянию от стенки соответственно.

Как видно из представленных моделей, в некоторых из них вводятся дополнительные демпфирующие (экспоненциальные) функции, что создает определенные вычислительные трудности. Существенным недостатком, присущим низкорейнольдсовым диссипативным моделям турбулентности, является необходимость использования очень мелких сеток в окрестности стенок (как правило, величина y_P^+ не должна превышать величины порядка 0.1).

6.7. $k - \omega$ - модель Саффмена-Вилкокса

Как отмечалось выше, Колмогоров (1942) предложил первую двухпараметрическую дифференциальную модель турбулентности, выбрав в качестве первого параметра турбулентности кинетическую энергию турбулентных пульсаций. Вторым параметром была диссипация на единицу турбулентной энергии ω . В $k - \omega$ -модели ω удовлетворяет дифференциальному уравнению, подобному уравнению для k . Не зная о работе Колмогорова, Саффмен (1970) сформулировал $k - \omega$ -модель, которая представляется предпочтительной по отношению к колмогоровской модели. Сполдинг (1972) предложил улучшенную версию модели Колмогорова, в которой ему удалось убрать некоторые из их недостатков. В дальнейшем Вилкоккс, Саффмен, Рубезин и др. (1972-1988) развили и апробировали $k - \omega$ -модели. Коклей (1983) предложил $k^{1/2} - \omega$ -модель для расчета турбулентных сжимаемых течений. В последнее десятилетие Спезайл, Менгер и др. (1990-1997) изобрели несколько моделей турбулентности рассматриваемого типа. Робинсон, Харрис и Хасан (1995) развили $k - \omega^2$ -модель.

В своей формулировке Колмогоров относился к параметру ω как к скорости диссипации энергии в единице объема и времени. Чтобы подчеркнуть его физическое соотношение с внешним масштабом турбулентности l , он также называл его неко-

торой средней частотой, определяемой с помощью $\omega = ck^{1/2}/l$, где c - постоянная. С другой стороны, ω является временным масштабом, на котором имеет место диссипация турбулентной энергии. Хотя реальный процесс диссипации происходит в мельчайших вихрях, скорость диссипации является скоростью переноса кинетической энергии турбулентности к мельчайшим вихрям. Следовательно, она определяется свойствами крупных вихрей и, таким образом, масштабами k и l , из-за чего ω косвенно ассоциируется с диссипативными процессами. Следует отметить, что по аналогии с молекулярной турбулентная вязкость пропорциональна произведению турбулентных масштабов скорости и длины, которое согласуется с колмогоровским аргументом $\omega \approx k^{1/2}/l$. Конечно, при этом надо иметь в виду, что указанная аналогия не вполне правомочна, а аргумент Колмогорова скорее является примером из анализа размерностей, нежели выводом фундаментальной физики.

Хотя изложение модели Колмогорова было кратким, а константы замыкания установлены не полностью, по мнению Вилкокса [5], крайне удивительно, как этот великий исследователь турбулентности вывел модельные уравнения. При этом он не привел ссылок на какие-либо точные уравнения, которые бы символизировали, каким путем он замкнул уравнение для k или другим моментов. Однако легко представить себе мотивы, основанные на анализе размерностей:

- исходным моментом является пропорциональность ν_t и k ;
- размерность ν_t - [длина]²/[время], а k - [длина]²/[время]²;
- следовательно, ν_t/k имеет размерность [время];
- диссипация турбулентности ε имеет размерность [длина]²/[время]³;
- следовательно, размерность ε/k - 1/[время];
- можно замкнуть выражения для турбулентной вязкости и уравнение для ε , вводя переменную с размерностью [время] или 1/[время].

Следующим шагом является постулирование уравнения для ω . Во внимание приняты только некоторые из наблюдаемых физических процессов: нестационарность, конвекция (иногда трактуемая как адвекция), диффузия, диссипация, дисперсия и генерация. Комбинируя физические соображения с анализом размерностей, Колмогоров постулировал следующее уравнение для ω :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = -\beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma \nu_t \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]. \quad (6.16)$$

Здесь, по выражению Вилкокса, допущены некоторые вольности с обозначениями, а k и σ являются двумя новыми константами замыкания. Данное уравнение имеет четыре примечательные черты. 1. Отсутствует генеративный член, аналогичный такому же члену в уравнении для k . Это согласуется с мнением Колмогорова о том, что ω ассоциируется с мельчайшими масштабами турбулентности и напрямую не взаимодействует с осредненным движением. Его логика основывалась на предположении, согласно которому крупномасштабные энергоемкие вихри преимущественно ответственны за определение соответствующего временного масштаба турбулентности и самой скорости диссипации. 2. Запись уравнения в терминах ω выглядит предпочтительнее, чем в терминах ω^2 . Как показано Вилкоксом, решение Колмогорова записать уравнение именно для ω было воистину пророческим выбором. 3. В уравнении нет члена с молекулярной диффузией, так что оно оказывается приемлемым лишь для высокорейнольдсовых течений и не может проинтегрировано сквозь вязкий подслой. 4. Уравнение полностью эмпирическое, обусловленное физическими соображениями.

Еще несколько замечаний по трактовке ω . Саффмен (1970) определил этот параметр как частотную характеристику самопроизвольного процесса турбулентного

распада. Он установил, что «грубой» идеей является то, что ω^2 - осредненный квадрат завихренности энергосодержащих вихрей, а k - кинетическая энергия движения, индуцированного этой завихренностью. Сполдинг (1972), Вилкоккс и Албер (1972), Робинсон, Харрис и Хасан (1995) идентифицировали ω как флуктуирующую завихренность, так что ω^2 является дважды энстрофией. Вилкоккс и Рубезин (1980), Вилкоккс (1988) и Спезайл и др.(1990) просто определили ω как отношение ε к k .

Уравнение для ω видоизменялось по мере совершенствования k - ω -модели на протяжении последних 50 лет. Генеративный член был добавлен в модель всеми ее разработчиками. Подобно Колмогорову, Вилкоккс (1988), Спезайл и др.(1990), Пенг и др.(1997) записали уравнение для ω в терминах ω , в то время как в большинстве моделей этого типа уравнения записаны относительно ω^2 . Следующая версия k - ω -модели свободна от недостатка аналогичной модели Вилкоккса (1988), выявленного при прогнозировании характеристик свободных сдвиговых течений. Новая модель Вилкоккса (1998) формулируется как

$$\text{Кинематическая вихревая вязкость: } \nu_t = k/\omega. \quad (6.17)$$

Турбулентная кинетическая энергия:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\nu + \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j}]. \quad (6.18)$$

Удельная скорость диссипации:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\nu + \sigma \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j}]. \quad (6.19)$$

Коэффициенты замыкания и вспомогательные соотношения:

$$\alpha = \frac{13}{25}, \beta = \beta_o f_\beta, \beta^* = \beta_o^* f_{\beta^*}, \sigma = \frac{1}{2}, \sigma^* = \frac{1}{2}, \quad (6.20)$$

$$\beta_o = \frac{9}{125}, f_\beta = \frac{1+70\chi_\omega}{1+80\chi_\omega}, \chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}S_{ki}}{(\beta_o^*\omega)^3} \right|, \quad (6.21)$$

$$\beta_o^* = \frac{9}{100}, f_{\beta^*} = \begin{cases} 1, & \chi_k \leq 0 \\ \frac{1+680\chi_k^2}{1+400\chi_k^2}, & \chi_k > 0 \end{cases}, \chi_k \equiv \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \quad (6.22)$$

$$\varepsilon = \beta^* \omega k \quad \text{и} \quad l = k^{1/2} / \omega. \quad (6.23)$$

Составляющие тензоров Ω_{ij} и S_{ij} , появляющиеся в соотношении (6.21), являются составляющими осредненных тензоров вращения и скоростей деформации и определяются так:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right), \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right). \quad (6.24)$$

Как легко можно проверить, величина χ_ω равняется нулю для двумерных течений. Зависимость β от χ_ω , взятая из работы Поупа (1978), имеет существенное влияние для круглых и радиальных струй.

Наиболее важное различие между этой версией k - ω -модели и модели Вилкоккса (1988) состоит в коэффициентах диссипативных членов β^* и β . Функции f_β и f_{β^*} , которые зависят от χ_k и χ_ω , и определяются соотношениями (6.21) и (6.22), не присутствуют в модели Вилкоккса (1988). Также константы $\alpha = 0.52$ и $\beta_o = 0.072$ для новой модели Вилкоккса несколько отличаются от констант старой модели ($\alpha = 0.56$ и $\beta_o = 0.075$).

С одной стороны, новые диссипативные коэффициенты имеют очень малое влияние в пограничных слоях, поскольку величина ω вблизи стенки довольно вели-

ка, так что χ_k и χ_ω малы. Это очень важно, так как старая модель Вилкокса (1988) хорошо прогнозировала именно характеристики пограничных слоев. Новая модель в этом отношении практически идентична старой. С другой стороны, χ_k и χ_ω значительно больше для свободных сдвиговых течений. Следовательно, новая модель более диссипативна в сдвиговых слоях по сравнению со старой. Это существенно по той причине, что старая версия приводила к ускоренному расширению сдвиговых слоев по отношению к данным измерений. Новая модель свободна от этого недостатка. Функции f_β и f_{β^*} , как и величины α и β_o , калиброваны, чтобы прогнозируемые характеристики для дальних следов, слоев смешения, круговых и радиальных струй были согласованы с измеренными. Таким образом, предложенная Вилкоксом (1998) модель представляется более точной для расчета сложных типов течений, поскольку она точнее отображает их составные, характерные элементы (пограничные слои, следы, струи).

Отметим, что дефект старой модели Вилкокса фактически устраняется включением в правую часть уравнения для ω так называемого перекрестного диффузионного члена χ_ω .

6.8. Другие модели с двумя уравнениями

Два других типа моделей, основанные на турбулентных масштабах длины l и времени τ , заслуживают гораздо меньшего внимания, чем рассмотренные $k - \omega$ - и $k - \varepsilon$ -модели. Вообще говоря, уровень согласования между измерениями и прогнозами по другим моделям сопоставим с $k - \omega$ и $k - \varepsilon$ -прогнозами для простых течений, но эти модели менее продуктивны для каких-либо других течений.

$k - kl$ - модель, предложенная Ротта (1968), базируется на двухточечном, скоростном корреляционном тензоре

$$R_{ij}(\vec{x}, t, \vec{r}) = \overline{u'_i(\vec{x}, t)u'_j(\vec{x} + \vec{r}, t)}. \quad (6.25)$$

Легко видеть, что турбулентная кинетическая энергия - просто половина R_{ii} с нулевым смещением $\vec{r} = 0$. Вторая переменная Ротта - произведение k и интегрального масштаба длины l , который представляет интеграл R_{ii} по всем смещениям $r = |\vec{r}|$. Переменные Ротта

$$k = \frac{1}{2}R_{ii}(\vec{x}, t, 0), \quad kl = \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ii}(\vec{x}, t, r) dr. \quad (6.26)$$

Используя стандартные аппроксимации замыкания, основанные на анализе размерностей, точное уравнение для kl может быть приведено к следующему модельному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(kl) + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j}(kl) &= c_{L1} l \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - c_{L2} k^{3/2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial}{\partial x_j}(kl) + (\nu_t / \sigma_{L1}) l \frac{\partial k}{\partial x_j} + (\nu_t / \sigma_{L2}) k \frac{\partial l}{\partial x_j} \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Для этой модели k и ν_t задаются уравнениями (5.4) и (5.5). Роди и Сполдинг (1970), Нга и Сполдинг (1972) внесли дальнейший вклад в развитие модели. Совсем недавно Смит (1990) реанимировал интерес к ней, причем он разработал $k-l$ -модель (1994), для которой зависимая переменная l полагается предпочтительной по отношению к kl . Нга и Сполдинг нашли, что для пристеночных течений коэффи-

коэффициент замыкания c_{L2} должен изменяться с отходом от стенки. Предлагается следующая система коэффициентов замыкания:

$$c_{L1} = 0.98, c_{L2} = 0.059 + 702(l/y)^6, c_D = 0.09, \sigma_k = \sigma_{L1} = \sigma_{L2} = 1.$$

Аналогичным способом Зеерман и Вольфштейн (1986) основали свою модель на автокорреляционном тензоре

$$R_{ij}(\vec{x}, t, t') = \overline{u'_i(\vec{x}, t)u'_j(\vec{x}, t + t')}. \quad (6.28)$$

Турбулентная кинетическая энергия является половинным R_{ii} с $t' = 0$, в то время как интегральный временной масштаб пропорционален интегралу R_{ii} по всем возможным величинам t' . Таким образом,

$$k = \frac{1}{2}R_{ii}(\vec{x}, t, 0), \quad k\tau = \frac{1}{2} \int_0^\infty R_{ii}(\vec{x}, t, t') dt'. \quad (6.29)$$

Модель Зеермана-Вольфштейна $k - k\tau$ формулируется следующим образом:

$$\text{кинетическая вихревая вязкость} \quad \nu_t = c_\mu k\tau, \quad (6.30)$$

турбулентная кинетическая энергия

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{k}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\nu + \nu_t/\sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j}], \quad (6.31)$$

интегральный временной масштаб:

$$\frac{\partial}{\partial t}(k\tau) + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j}(k\tau) = c_{\tau 1} \tau \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - c_{\tau 2} k + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\nu + \nu_t/\sigma_\tau) \frac{\partial}{\partial x_j}(k\tau)], \quad (6.32)$$

коэффициенты замыкания и вспомогательные соотношения:

$$c_{\tau 1} = 0.173, c_{\tau 2} = 0.225, c_\mu = 0.09, \sigma_k = 1, \sigma_\tau = 10.8, \quad (6.33)$$

$$\omega = 1/(c_\mu \tau), \quad \varepsilon = k/\tau, \quad l = c_\mu k^{1/2} \tau. \quad (6.34)$$

Заметим, что поскольку вихревая вязкость пропорциональна $k\tau$, то уравнение (6.32) может трактоваться как уравнение для ν_t .

6.9. Двухслойная $k - \omega$ - модель Ментера

Среди последних работ, внесших существенный вклад в развитие полуэмпирических моделей турбулентности, следует особо отметить работу Ментера (1993) [25]. Основываясь на том, что модели турбулентности типа $k - \varepsilon$ лучше описывают свойства свободных сдвиговых течений, а модели типа $k - \omega$ имеют преимущество при моделировании пристеночных течений, Ментер предложил модель, сочетающую в себе указанные сильные стороны $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ -моделей. Для этого $k - \varepsilon$ -модель переформулировалась в терминах k и ω , а затем в полученные в результате модельные уравнения введена эмпирическая функция F_1 , обеспечивающая плавный переход от $k - \omega$ -модели в пристеночной области к $k - \varepsilon$ -модели вдали от твердых стенок. Отметим, что при этом перекрестный диффузионный член автоматически появляется в уравнении для ω вдали от стенок и, соответственно, модель Ментера оказывается свободной от недостатка, присущего «старой» модели Вилкокса и связанного с повышенной чувствительностью его модели к граничным условиям во внешнем потоке. Таким образом, модель Ментера записывается путем суперпозиции моделей $k - \omega$ и $k - \varepsilon$, помноженных соответственно на весовую функцию F_1 и $(1-F_1)$. Функция F_1 конструируется таким образом, чтобы быть рав-

ной единице на верхней границе пограничного слоя и стремиться к нулю при приближении к стенке. Сшивка предполагается в области следа пограничного слоя.

Второй важный шаг, сделанный Ментером, состоял в видоизменении стандартной связи между k , ω и турбулентной вязкостью ν_t . В эту связь был введен специальный ограничитель (MSST), обеспечивающий переход от нее к известной формуле Бредшоу (смотри Бредшоу-Ферриса-Атвелла), согласно которой турбулентное напряжение трения пропорционально кинетической энергии турбулентности $\overline{u'_i u'_j} = 0.31k$. Этот прием, получивший название SST (shear stress transport), в дальнейшем с успехом применялся и в других моделях турбулентности с двумя уравнениями, например, в модели Чена (1997).

Базовая модель.

Вводя полную производную, как $D/Dt = \partial/\partial t + \overline{u_j}\partial/\partial x_j$, запишем оригинальную $k - \omega$ -модель

$$\frac{D\rho k}{Dt} = \tau_{ij}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{k1} \mu_t \frac{\partial k}{\partial x_j}) \right], \quad (6.35)$$

$$\frac{D\rho \omega}{Dt} = \frac{\gamma_1}{\nu_t} \tau_{ij}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \beta_1 \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega 1} \mu_t \frac{\partial \omega}{\partial x_j}) \right], \quad (6.36)$$

трансформированная $k - \varepsilon$ - модель:

$$\frac{D\rho k}{Dt} = \tau_{ij}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{k2} \mu_t \frac{\partial k}{\partial x_j}) \right], \quad (6.37)$$

$$\frac{D\rho \omega}{Dt} = \frac{\gamma_2}{\nu_t} \tau_{ij}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \beta_2 \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega 2} \mu_t \frac{\partial \omega}{\partial x_j}) \right] + 2 \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \quad (6.38)$$

Уравнения (6.35) и (6.36) умножаются на F_1 , а (6.37) и (6.38) – на $(1 - F_1)$, и соответствующие уравнения складываются. В результате получается система исходных уравнений модели Ментера:

$$\frac{D\rho k}{Dt} = \tau_{ij}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t \frac{\partial k}{\partial x_j}) \right], \quad (6.39)$$

$$\frac{D\rho \omega}{Dt} = \frac{\gamma}{\nu_t} \tau_{ij}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega} \mu_t \frac{\partial \omega}{\partial x_j}) \right] + 2 (1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \quad (6.40)$$

Обозначая обобщенным параметром ϕ_1 набор констант оригинальной модели $k - \omega$ с индексами 1 и соответственно ϕ_2 аналогичный набор констант трансформированной модели $k - \varepsilon$ с индексами 2, имеем в уравнениях (6.39) и (6.40):

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_2) \phi_2. \quad (6.41)$$

Используется следующая система констант

1 - Вилкоккс (1988):

$$\sigma_{k1} = 0.5; \sigma_{\omega 1} = 0.5; \beta_1 = 0.0750; \beta^* = 0.09; \kappa = 0.41; \gamma_1 = \beta_1 / \beta^* - \sigma_{\omega 1} \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}. \quad (6.42)$$

2 - стандартная $k - \varepsilon$:

$$\sigma_{k2} = 1.0; \sigma_{\omega 2} = 0.856; \beta_2 = 0.0828; \beta^* = 0.09; \kappa = 0.41; \gamma_2 = \beta_2 / \beta^* - \sigma_{\omega 2} \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}. \quad (6.43)$$

Система (1) калибрована по пристеночным течениям, а система (2) обладает высокой приемлемостью для свободных сдвиговых слоев.

Модель замыкается выражением для вихревой вязкости:

$$\nu_t = \mu_t / \rho = k / \omega, \quad (6.44)$$

а составляющие тензора рейнольдсовых напряжений

$$\tau_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}. \quad (6.45)$$

Чтобы завершить вывод модели необходимо определить связующую функцию F_1 . Вблизи стенки функция должна быть близка к единице в значительной части пограничного слоя, чтобы сохранить желательные черты $k - \omega$ -модели, но по мере отхода от стенки и приближения к границе пограничного слоя функция стремится к нулю, чтобы обеспечить независимость от внешних условий, характерную для $k - \varepsilon$ -модели. Функция F_1 зависит от переменной

$$arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}; \frac{500\nu}{y^2\omega} \right); \frac{4\rho\sigma\omega_2 k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \quad (6.46)$$

следующим образом:

$$F_1 = \tanh(arg_1^4), \quad (6.47)$$

где y – расстояние до поверхности; $CD_{k\omega}$ – положительная часть перекрестных диффузионных членов в уравнении переноса ω :

$$CD_{k\omega} = \max \left\{ 2\rho\sigma\omega \frac{1}{2\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; 10^{-20} \right\}. \quad (6.48)$$

Член arg_1 с очевидностью стремится к нулю по мере удаления от твердой стенки, поскольку выражения типа $1/y$ и $1/y^2$ присутствуют во всех его составляющих. Внутри пограничного слоя первый член представляет отношение масштаба турбулентности к расстоянию от стенки y и равен 2.5 в логарифмическом слое и исчезает при приближении к границе слоя. Второй член нацелен на то, чтобы $F_1 = 1$ в пределах подслоя (т.е. исключал использование двухпараметрической диссипативной модели турбулентности), при этом ω ведет себя как $1/y^2$ около стенки и пропорционально $1/y$ в логарифмической зоне, так что $1/(y^2\omega)$ является константой вблизи стенки и стремится к нулю в логарифмической зоне. Третий аргумент гарантирует стремление к нулю arg_1 , блокируя зависимость решения от параметров внешнего потока. Поскольку $arg_1 \rightarrow 0$ на кромке пограничного слоя, то F_1 становится таким, что в этой зоне используется стандартная высокорейнольдсовая диссипативная двухпараметрическая модель.

Рекомендуется использовать следующие значения параметров в свободном потоке:

$$\omega_\infty = (1 \rightarrow 10) \frac{U_\infty}{L_\infty}; \nu_{t\infty} = 10^{-(2 \rightarrow 5)} \nu_\infty; k_\infty = \nu_{t\infty} \omega_\infty, \quad (6.49)$$

где L_∞ – ориентировочная длина расчетной области.

Граничное условие для ω на твердой стенке ($y=0$):

$$\omega = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 (\Delta y)^2}, \quad (6.50)$$

где Δy – пристеночный шаг. Это условие приемлемо для гладких стенок: $\Delta y^+ < 3$.

Модель переноса сдвиговых напряжений.

Одно из главных различий между моделями вихревой вязкости и рейнольдсовых напряжений с точки зрения аэродинамических приложений состоит в том, что в последних принимается во внимание важный эффект переноса турбулентных сдвиговых напряжений $\tau = \tau_{ij} = -\overline{u'_i u'_j}$ с помощью включения члена

$$\frac{D\tau}{Dt} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \tau}{\partial x_k}.$$

Важность этого члена ясно продемонстрирована успехом модели Джонсона-Кинга. Заметим, что главное отличие указанной модели от известной модели Себеси-Смита состоит во включении этого члена в формулу, ведущую к существенно лучшим результатам для течений с положительным градиентом давления. Модель Джонсона-Кинга характеризуется переносным уравнением для турбулентного сдвигового напряжения, базирующемся на предположении Бредшоу, согласно которому напряжение сдвига в пограничном слое пропорционально кинетической энергии: $\tau = \rho a_1 k$ с постоянной a_1 . С другой стороны, в моделях с двумя уравнениями напряжение сдвига рассчитывается из $\tau = \mu_t \Omega$ с $\Omega = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$. Для согласованной модели с двумя уравнениями это соотношение может быть переписано:

$$\tau = \rho \sqrt{\frac{P_k}{\varepsilon}} a_1 k, \quad (6.51)$$

где P_k/ε - отношение генерации турбулентной энергии к ее диссипации. В течениях с положительным градиентом давления это отношение может значительно превосходить единицу, как показано экспериментами Драйвера, и поэтому уравнение (6.51) ведет к переопределению τ . Чтобы удовлетворить уравнению Бредшоу в рамках концепции вихревой вязкости, коэффициент турбулентной вязкости следует переопределить следующим образом:

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\Omega}, \quad (6.52)$$

где Ω - абсолютная величина завихренности.

Рациональное обоснование этой модификации может быть таким: в согласованных моделях с двумя уравнениями турбулентные сдвиговые напряжения отвечают моментально на изменения в скоростях деформаций Ω , подобно алгебраическим моделям, принимая во внимание, что уравнение (6.52) гарантирует, что τ не может изменяться быстрее, чем $\rho a_1 k$. Очевидно, что уравнение (6.52) не желательно во всей расчетной области, так как приводит к бесконечной вихревой вязкости в местах, где Ω стремится к нулю. Заметим, однако, что в течениях с положительным градиентом давления (как указывалось) производство кинетической энергии турбулентности больше диссипации для подавляющей части слоя (или $\Omega > a_1 \omega$). Выражение

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega)} \quad (6.53)$$

гарантирует выбор уравнения (6.52) для большинства областей с положительным градиентом давления (область следа в пограничном слое), в то время как обычное соотношение (6.44) используется в остальной части пограничного слоя.

Чтобы расширить формулировку вихревой вязкости, приспособленную для свободных сдвиговых слоев, к ситуациям, где предположение Бредшоу не обязательно применимо, сделана модификация SST-модели для ограниченных стенками потоков. Для этого применяется смесительная функция F_2 :

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, \quad (6.54)$$

где F_2 определяется подобно (6.47):

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max\left[2 \sqrt{k} / (0.09 \omega y); \frac{500 \nu}{y^2 \omega}\right].$$

Так как модификации турбулентной вязкости наибольшее влияние оказывают в области следа пограничного слоя, необходимо, чтобы действие F_2 распространялось дальше от стенки, чем F_1 .

Сделанные модификации привели к необходимости корректировки констант во внутренней слое SST-модели:

$$\sigma_{k_1} = 0.85; \sigma_{\omega_1} = 0.5; \beta_1 = 0.0750; \beta^* = 0.09; \kappa = 0.41; a_1 = 0.31; \quad (6.55)$$

$$\gamma_1 = \beta_1 / \beta^* - \sigma_{\omega_1} \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}.$$

Во внешнем слое константы не изменялись.

6.10. Учет влияния кривизны линий тока на характеристики турбулентности

Достигнутый прогресс в решении практически важных задач турбулентного движения жидкости можно отнести за счет удачной разработки полуэмпирической диссипативной модели турбулентности, основанной на концепции турбулентной вязкости. В широко используемом высокорейнольдсовом варианте этой модели для определения коэффициента турбулентного переноса записываются два дифференциальных уравнения относительно энергии турбулентных пульсаций и скорости ее диссипации с набором стандартных эмпирических констант. Важно подчеркнуть, что $k - \varepsilon$ - модель создавалась для прогнозирования характеристик пристеночных течений. Однако она была успешно применена для расчета течений со сложной структурой, в том числе и отрывных течений (см., например, [16]).

На рубеже 80-х годов появились работы, в которых модели турбулентности усовершенствованы и прежде всего благодаря учету влияния на характеристики турбулентности кривизны линий тока. Модификации $k - \varepsilon$ - модели обычно заключаются в коррекции полуэмпирических констант путем их умножения на некоторые поправочные функции от турбулентного числа Ричардсона. Как правило, запись выражений для этих функций основана на эвристических соображениях. Два подхода из трех известных в литературе сводятся к изменению характеристик турбулентности корректировкой имеющего модельный характер уравнения для скорости диссипации турбулентной энергии. В первом из них влияние кривизны линий тока передается через изменение члена генерации турбулентной энергии, т.е. с помощью умножения константы $c_{\varepsilon 1}$ на поправочную функцию:

$$f_c = A_1 \{ 1 - \exp[A_2(F - A_3)] \}, \quad (6.56)$$

где $A_1 = 1.15$, $A_2 = 1.13$, $A_3 = 0.18$. Эта поправка основана на отмеченной в работе [16] хорошей корреляции рейнольдсовых напряжений $(-\overline{u'_i u'_j})$ и параметра кривизны F в криволинейной двумерной пристеночной струе.

Для двумерных течений с отрывными зонами параметр F в выражении (6.56) определяется равенством

$$F = q / (R_c \partial q / \partial R_c),$$

где $q = \sqrt{\overline{u^2} + \overline{v^2}}$ - модуль местной скорости потока и R_c - локальный радиус кривизны, который вычисляется по формуле

$$1/R_c = [\overline{u}\overline{v}(\partial\overline{v}/\partial y - \partial\overline{u}/\partial x) + \overline{u}^2 \partial\overline{v}/\partial x - \overline{v}^2 \partial\overline{u}/\partial y] / q^3.$$

Второй подход, связанный с модификацией диссипативного члена в уравнении для ε , хотя и кажется в значительной степени интуитивным, но основан на анализе устойчивости турбулентных вихрей на обтекаемой криволинейной поверхности. Он был применен для расчета течений в пограничном слое на криволинейной поверхности и на вращающихся телах. Указанная поправка реализуется с помощью умножения константы $c_{\varepsilon 2}$ на поправочную функцию:

$$f_c = 1 - c_c \text{Ri}_t, \quad (6.57)$$

где $c_c = 0.2$ - дополнительная полуэмпирическая константа;

$\text{Ri}_t = (k^2/\varepsilon^2)(q/R_c^2)\partial(R_c q)/\partial R_c$ - турбулентное число Ричардсона.

Как отмечается в работе [16], вторая поправка отличается от первой в том отношении, что она модифицирует в уравнении для ε член, который уже смоделирован, в то время как первая коррекция касается модификации точного члена в уравнении для k .

И, наконец, третий подход основывается на прямой коррекции коэффициента турбулентной вязкости, в соответствии с которой в его выражение вводится поправочный множитель, обратно пропорциональный линейной функции турбулентного числа Ричардсона (Лешцинер-Роди (1981)):

$$f_c = 1/(1 + c_c Ri_t). \quad (6.58)$$

Дополнительная полуэмпирическая константа c_c определяется из условия наилучшего согласования расчетных и экспериментальных результатов для коэффициента лобового сопротивления тел различной конфигурации с фиксированной точкой отрыва: диска, двух дисков, композиции диска и цилиндра [21]. В отличие от аналитической оценки Роди и Лешцинера ($c_c = 0.57$) принимается $c_c = 0.1$. При этом накладывается следующее ограничение на произведение $c_c c_\mu$: $0.02 \leq c_c c_\mu \leq 0.15$.

Проведем обобщение последнего подхода на случай трехмерных течений.

Определяем число Ричардсона Ri_t в виде $(k/\varepsilon)^2 q/R_c \vec{b} \cdot \vec{\Omega}$, где \vec{b} - вектор бинормали.

$1/R_c = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$ - кривизна, где $\ddot{x} = \partial^2 x / \partial s^2$, s - координата, отсчитываемая вдоль линии тока.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \partial / \partial s (\partial x / \partial s) = \partial / \partial s (u/q) = 1/q^2 (q \partial u / \partial s - u \partial q / \partial s) = \\ &= 1/q^2 (\nabla u - 1/q \nabla q) \cdot \vec{q}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\ddot{y} = 1/q^2 (\nabla v - 1/q \nabla q) \cdot \vec{q}, \quad \ddot{z} = 1/q^2 (\nabla w - 1/q \nabla q) \cdot \vec{q}.$$

Вектор нормали: $\vec{n} = \vec{r}' / |\vec{r}'| = (\vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z}) R_c$.

Вектор бинормали: $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \vec{q}/q \times \vec{n} = R_c/q (\vec{q} \times \vec{r}'')$.

В итоге получаем $Ri_t = k^2/\varepsilon^2 \cdot (\vec{q} \times \vec{r}'') \cdot \vec{\Omega}$.

В заключение, следуя Бредшоу, Лаундеру, Ламли (1996), подчеркнем, что даже высокого порядка модели замыкания (рейнольдсовых напряжений) не способны предсказывать влияние кривизны линий тока без эмпирических корректирующих факторов.

6.11. Нелинейная двухпараметрическая диссипативная модель

Как известно, для решения проблемы замыкания уравнений необходимо связать тензор рейнольдсовых напряжений с тензором скоростей деформаций осредненного движения. Упомянутая ранее форма связи формулируется как линейная $k - \varepsilon$ модель и для рейнольдсовых напряжений записывается (для несжимаемой жидкости) как

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3} \delta_{ij} k + 2c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} D_{ij}, \quad (6.59)$$

где $k = -\frac{1}{2} \tau_{ii}$, $D_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i})$ - энергия турбулентных пульсаций и тензор осредненных скоростей деформаций; $c_\mu = 0.09$.

При высоких числах Рейнольдса энергия турбулентности и скорость ее диссипации моделируются уравнениями переноса (форма, предложенная Лаундером и Ханьяликом (1972)):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + c_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{k}{\varepsilon} (\tau_{jk} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \tau_{ij} \frac{\partial k}{\partial x_j}) \right] - \varepsilon, \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = -c_2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k}{\varepsilon} \tau_{ij} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_3 \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - c_4 \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (6.61)$$

где $c_1 = 0.11$, $c_2 = 0.15$, $c_3 = 1.43$, $c_4 = 1.92$ - эмпирические постоянные.

Благодаря своей простой структуре $k - \varepsilon$ -модель может быть легко вставлена в любые коды, основанные на решении уравнений Рейнольдса, записанных в рамках концепции вихревой вязкости. Эта черта вместе с высокой точностью предсказания тонких сдвиговых турбулентных течений делает модель весьма привлекательной для инженеров и ученых. Тем не менее, несмотря на эти успехи, известно, что $k - \varepsilon$ -модель дает неточные прогнозы для разностей нормальных рейнольдсовых напряжений. Например, в полностью развитом турбулентном течении в канале линейная $k - \varepsilon$ -модель предсказывает все нормальные напряжения равными, т.е. $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz}$.

Однако, согласно экспериментальным данным Лауфера для турбулентного течения в канале при числе Рейнольдса 30800, получается, что

$$\frac{\|\tau_{yy} - \tau_{xx}\|}{\|\tau_{xx}\|} \approx 0.5, \quad \frac{\|\tau_{yy} - \tau_{xx}\|}{\|\tau_{xy}\|} \approx 2.5,$$

где $\|\cdot\|$ обозначает максимальную норму.

Спезайл (1987) вывел нелинейное обобщение $k - \varepsilon$ -модели, которое принимает форму:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + 2c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} D_{ij} + \\ & + 4c_D c_\mu^2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} (D_{ik} D_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij} D_{kl} D_{kl}) + \\ & + 4c_E c_\mu^2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} (\widetilde{D}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \widetilde{D}_{kk}) \end{aligned} \quad (6.62)$$

где $\widetilde{D}_{ij} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} D_{kj} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} D_{ki}$ - член производной Олдройда, $c_D = c_E = 1.68$.

Нелинейная $k - \varepsilon$ -модель способна описать эффекты турбулентной памяти и дать более точные прогнозы нормальных напряжений в турбулентных канальных течениях.

6.12. Двухпараметрическая диссипативная модель, учитывающая влияние сил плавучести

В качестве примера диссипативной двухпараметрической модели, учитывающей влияние сил плавучести, здесь представляется математическая модель, описывающая движение дыма, т.е. совокупности газообразных продуктов горения органических материалов, в которых рассеяны твердые и жидкие микрочастицы. Наличие микрочастиц, как и сам процесс горения с соответствующим тепловыделением, не рассматривается. Характерной чертой принятой модели является предположение о том, что плотность газа зависит от температуры и состава смеси, но не зависит от вариаций поля давления на фоне заданного уровня статического давления. Для достаточно низких чисел Маха такое предположение вполне оправдано, а в результате

отпадает необходимость весьма трудоемкого разрешения акустических процессов, не имеющих принципиального значения в рассматриваемых задачах. Расчет движения газовой смеси основывается на системе полных, осредненных по Рейнольдсу трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса, дополненных уравнениями для выражения законов сохранения отдельных газовых компонент и энергии с учетом как ламинарного, так и турбулентного характера течения смеси в целом.

Исходные уравнения. Искомые функциями являются три компоненты вектора скорости u_j , давление p , энтальпия смеси h , массовые доли газовых компонент Y_m , кинетическая энергия турбулентности k и скорость диссипации турбулентности ε . Предполагается, что газовая смесь состоит из N компонентов (таких как O_2 , N_2 , H_2O , CO_2 , CH_4 , CO и др.). Основные расчетные уравнения относительно осредненных по Фавру искомых функций имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho Y_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho Y_\alpha u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j} + \rho R_\alpha,$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i,$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial \rho h u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j^r}{\partial x_j}.$$

Здесь $Y_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\rho}$ - массовая доля компонентов, $\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha$ - плотность смеси,

$$\sigma_{ij} = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\rho k + (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right)$$

- тензор вязких и турбулентных напряжений,

$$h = \sum_\alpha Y_\alpha h_\alpha = \sum_\alpha Y_\alpha \left(h_\alpha^0 + \int_{T^0}^T C_{p\alpha}(T) dT \right)$$

- энтальпия единицы массы смеси. Зависимость удельной теплоемкости компонентов от температуры аппроксимирована полиномами второй степени в интервале температуры 298.15 – 2500 К:

$$C_{p\alpha}(T) = C_{p\alpha}^{(0)} + C_{p\alpha}^{(1)}(T - T^0) + C_{p\alpha}^{(2)}(T - T^0)^2,$$

где $T^0 = 298.15 \text{ K}$.

Для расчета *плотности газовой смеси* используется уравнение состояния

идеального газа $P = \frac{R}{M} \rho T$, где $M = \left(\sum_\alpha \frac{Y_\alpha}{M_\alpha} \right)^{-1}$ - молярная масса смеси. В приближении существенно дозвукового течения полагается, что $P = P_0 = \text{const}$ в уравнении состояния (но не в уравнении движения). В результате уравнение неразрывности трансформируется к виду

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right),$$

где правая часть вычисляется с использованием текущего поля температуры (low Mach number model).

Моделирование турбулентности осуществляется на основе стандартного или низкорейнольдсового вариантов $k - \varepsilon$ -модели, модифицированной для учета влияния подъемной силы и стратификации. Уравнения модели включают формулу Колмогорова-Прандтля для турбулентной вязкости и уравнения переноса кинетической энергии турбулентных пульсаций и скорости ее диссипации:

$$\mu_t = C_\mu f_0 \rho \frac{k^2}{\varepsilon},$$

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho k u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} + \mu_t (P + G) - \rho \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + (C_1 f_1 \mu_t (P + G) - C_2 f_2 \rho \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k},$$

где

$$P = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \left(k + \frac{\mu_t}{\rho} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right), \quad G = \frac{1}{\text{Pr}_T} \frac{g_j}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j},$$

$P + G$ - скорость генерации турбулентных пульсаций. Использован следующий набор констант:

$$C_\mu = 0.09, \quad C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad \text{Pr}_T = 0.7 - 0.9, \quad \text{Sc}_T = \text{Pr}_T.$$

При постановке *граничных условий* на твердых поверхностях в рамках стандартной $k - \varepsilon$ - модели предполагается, что в турбулентном пограничном слое имеет место универсальный логарифмический профиль скорости:

$$U^+ = \begin{cases} \eta^+, & \eta^+ < \eta_0 \\ \frac{1}{\kappa} \ln(E \eta^+), & \eta^+ \geq \eta_0 \end{cases}, \quad U^+ = \frac{|u|}{U_*}, \quad \eta^+ = \frac{\Delta x U_*}{\nu}, \quad \eta_0 = 11.5, \quad \kappa = 0.41.$$

Численное значение E определяется из условия сшивки линейного и логарифмического профиля при $\eta = \eta_0$: $E = 9.70$. После расчета динамической скорости U_* определяется касательное напряжение трения и характеристики турбулентности в пристеночных узлах:

$$\tau_w = -\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \rho U_*^2, \quad k = \frac{U_*^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{U_*^3}{\kappa \Delta x}.$$

При этом полагается $f_0 = f_1 = f_2 = 1.0$.

Напротив, при использовании низкорейнольдсового варианта $k - \varepsilon$ -модели вблизи твердой поверхности принимается

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0, \quad \varepsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{\kappa \Delta x},$$

в то время как

$$f_0 = \exp\left(-\frac{2.5}{1 + 0.02 \text{Re}_t}\right), \quad f_1 = 1.0, \quad f_2 = 1 - 0.3 \exp(\text{Re}_t^2),$$

где $\text{Re}_t = \rho k^2 / \mu \varepsilon$ - турбулентное число Рейнольдса.

Непосредственный очаг возгорания представляется упрощенно – как некий внешний стационарный (или нестационарный) по времени локальный источник дыма, имеющий заданную температуру. Например, дым имитируется смесью двух компонент (78% CO_2 и 22% CO), которые распространяются в воздухе (79% N_2 и 21% O_2). Задается расход дыма.

6.13. Методические численные эксперименты

А. Выбор граничных условий на стенке.

Обзор выполненных работ по численному моделированию турбулентных течений с отрывом потока показал [21], что вопрос о постановке корректных граничных условий на твердых поверхностях в них рассматривается подчас изолированно от проблемы влияния на решение задачи численной диффузии, обусловленной ошибками дискретизации исходных уравнений. Это приводило к ложным выводам, к недооценке влияния вида граничных условий на отображаемое течение. И только численные исследования, выполненные с использованием разностных схем с уменьшенной аппроксимационной вязкостью, позволили более корректно подойти к задаче условий на твердых стенках.

Долгое время необходимость постановки нетривиальных граничных условий на стенках в турбулентном режиме течения следовала из сложности технической реализации условия прилипания на компьютерах с ограниченными ресурсами, с одной стороны, и неприменимости стандартной $k - \varepsilon$ -модели, с другой стороны. Использование гипотезы о локальном равновесии в полностью развитом турбулентном течении у стенки позволило разработать метод пристеночных функций, получивший широкое распространение в практике инженерных расчетов. Однако следует признать, что для отрывных и предотрывных течений работоспособность этого метода, основанного на постулировании существования у стенки логарифмического закона скорости, справедливо подвергается сомнению. Поэтому в ряде работ был использован упрощенный подход в рамках предположения о пренебрежимо малом потоке диффузии от стенки, сводящийся к реализации условий скольжения. В исследованиях обтекания тел с нефиксированной точкой отрыва был предложен метод локального подобия [21], сочетающий элементы метода пристеночных функций и метода подобных решений для течений в пограничном слое. В сочетании с применением зональной модели Менгера представляет интерес сопоставить указанные способы задания граничных условий и дать им оценку.

На рис.21 и в табл. 6.3 сравниваются результаты расчетов и экспериментов Кармоди (4), Мореля и Бона (5) по интегральным характеристикам турбулентного обтекания диска и двух дисков при фиксированном зазоре $l = 0.5$ и переменном радиусе R (линейные размеры отнесены к радиусу большего диска) равномерным потоком несжимаемой вязкой жидкости (а), а также по распределениям коэффициента давления C_p на диске (б) и на двух дисках в случае $R = 0.8$ и $l = 0.5$ (в). При постановке граничных условий на твердых поверхностях используются метод пристеночных функций (1) и метод нулевой диффузии (2 – противоточная схема квадратичной интерполяции, 3 – гибридная схема, сочетающая односторонние противоточные разности и центральные разности). Также на рисунок нанесены данные для диск-цилиндра.

Как видно, учет диффузионного потока от стенки при использовании метода пристеночных функций позволяет добиться лучшего соответствия результатов расчета с имеющимися экспериментальными данными для двух дисков и качественного сходства по распределениям давления по торцовой поверхности заднего диска рассматриваемой компоновки и по торцу цилиндра при наличии перед ним выступающего диска точно такой же конфигурации [21]. Метод нулевой диффузии сглаживает распределение давления в передней срывной зоне между дисками, а также приводит к некоторому забросу давления в окрестности острой кромки со стороны донной части обтекаемого диска или двух дисков. Следствием этого является завышение лобового сопротивления компоновки двух дисков, обладающей минимальным сопротивлением, примерно на 60%. В целом, проведенные методические эксперименты указали на важность учета диффузии от стенки и на приемлемость стандарт-

ного метода пристеночных функций для прогнозирования развитых циркуляционных течений с фиксированной точкой отрыва.

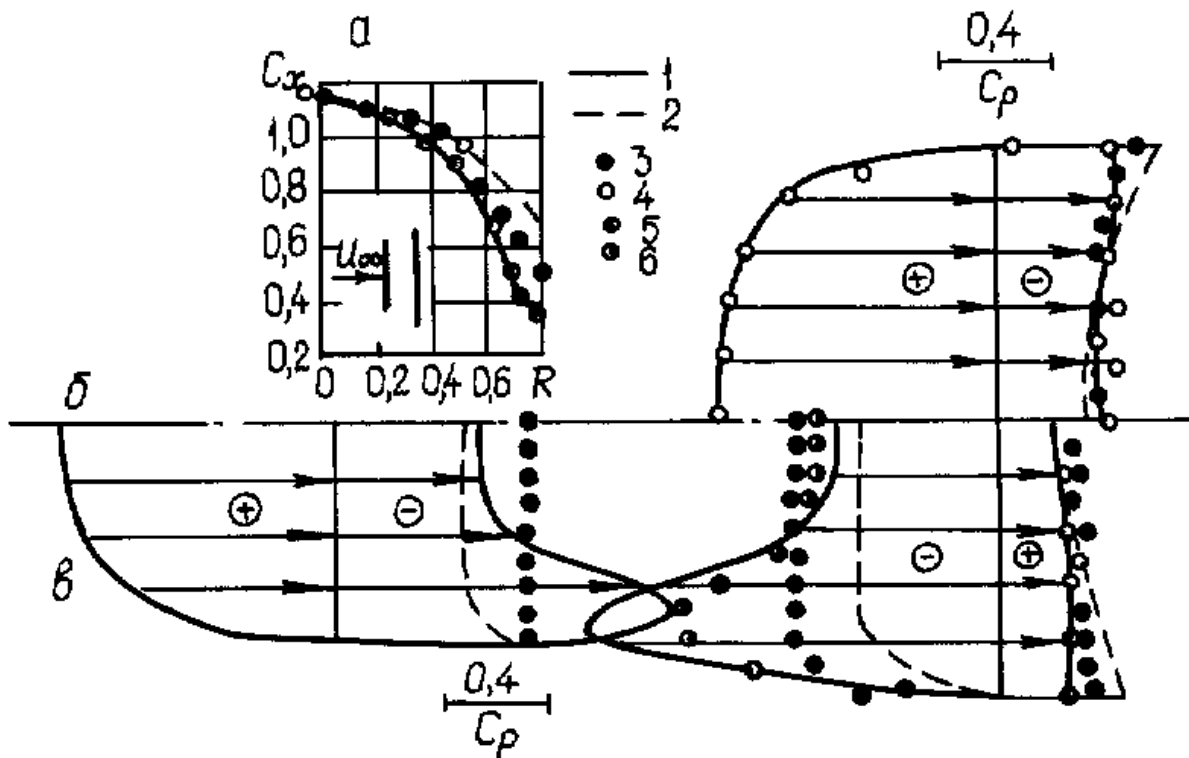


Рис.21

Таблица 6.3

Алгоритм		Геометрия		Расчет				Эксперимент	
Разностная схема	Граничные условия	R	l	C_{x1}	C_{xp2}	C_{xd}	C_x	C_x	C_{xd}
Гибридная схема	Метод нулевой диффузии	0.25	0.5	0.01	0.67	-0.42	1.12	1.09	-
		0.40	0.5	0.05	0.58	-0.41	1.04	1.00	-
		0.25	1.0	0.02	0.56	-0.42	1.00	0.98	-
		0.40	1.0	0.09	0.39	-0.40	0.88	0.90	-
	Метод пристеночных функций	0.8	0.5	0.79	-0.42	-0.33	0.70	0.33	-0.28
				0.92	-0.57	-0.28	0.63		
Схема Леонарда	Метод пристеночных функций	0.8	0.5	1.02	-0.96	-0.27	0.33	0.33	-0.28

При численном моделировании обтекания тел с нефиксированной точкой отрыва точность отображения пристеночного вязкого слоя оказывает существенное влияние на ее положение и, следовательно, на интегральные и локальные характеристики обтекания тела. Опыт решения тестовых задач поперечного обтекания цилиндра и отрывного течения в канале с обращенной назад ступенькой показывает, что максимальные погрешности при расчете течения, связанные с неадекватностью выбранных граничных условий, как правило, вносятся в зоне ускоряющегося течения, особенно в его ламинарной подобласти. Поэтому в работе Гурья, Уоткинса, Янга (1983)

предлагается двухслойная схема расчета турбулентного отрывного течения за ступенькой. По этой схеме для зоны циркуляционного течения используется метод пристеночных функций, а в области ускоряющегося течения за точкой присоединения – условия прилипания в сочетании с низкорейнольдсовой моделью турбулентности и очень подробными сетками. Как уже указывалось, альтернативный метод, не требующий применения низкорейнольдсовой модели и больших вычислительных ресурсов, основан на методе локального подобия.

На рис.22 сравниваются результаты расчетов поверхностного распределения коэффициента давления C_p при поперечном обтекании потоком несжимаемой жидкости с данными экспериментального исследования Рошко (1954). Число Рейнольдса при физическом и численном моделировании выбрано равным 1.5×10^4 . Для стабилизации отрывного течения в следе за цилиндром в эксперименте за ним располагалась разделительная пластина.

Сопоставляются результаты прогнозов на основе моделей турбулентности $k - \varepsilon$ и $k - \omega$, а также результаты, полученные при близком числе Рейнольдса (10^4) с использованием метода локального подобия в окрестности передней точки торможения и метода пристеночных функций в отрывной зоне. Переход от одного типа граничных условий к другому в последнем случае осуществлен вблизи точки отрыва на поверхности цилиндра.

Как видно, наиболее близкое согласие с экспериментальными данными Рошко получено при использовании метода локального подобия и по модели Ментера, хотя согласие с результатами по высокорейнольдсовой $k - \varepsilon$ -модели вполне удовлетворительное.

И, наконец, на рис.23 сравниваются картины течения в канале с круговой каверной, полученные при использовании высокорейнольдсовой $k - \varepsilon$ -модели (а) и модели Ментера (б), а также профили продольной составляющей скорости (в) в среднем сечении (1- расчет по модели Ментера, 2- расчет по $k - \varepsilon$ -модели). На рис.23,г сопоставляются расчетные и экспериментальные профили для толщины пограничного слоя в набегающем потоке 0.1. Экспериментальное исследование течения проведено в Институте механики МГУ при $Re = 1.3 \times 10^5$ [26].

Близость рассчитанных профилей, а также вполне удовлетворительное согласие расчетной и экспериментальной информации свидетельствует о приемлемости метода пристеночных функций для моделирования отрывных течений.

Б. Влияние кривизны линий тока.

Как было ранее отмечено, дополнительная полуэмпирическая константа C_c в выражении (6.58) $f_c = 1 / (1 + c_c Ri_t)$ определяется из условия наилучшего согласования расчетных результатов с имеющимися экспериментальными данными. Результаты расчета коэффициентов лобового и донного сопротивления диска при обтекании его равномерным потоком ($Re = 3.5 \times 10^4$) сравниваются с данными эксперимента Кармоди (1964) и представлены в табл. 6.4:

Таблица 6.4

c_c	Расчет		Эксперимент	
	C_x	C_{xd}	C_x	C_{xd}
0	1.166	0.439	1.12	0.39
0.1	1.124	0.386		

Как видно, лучшее согласование получается при выборе $c_c = 0.1$. При этом важно подчеркнуть, что при дискретизации конвективных членов уравнений переноса применяется одномерный вариант противопоточной схемы с квадратичной интерполяцией QUICK.

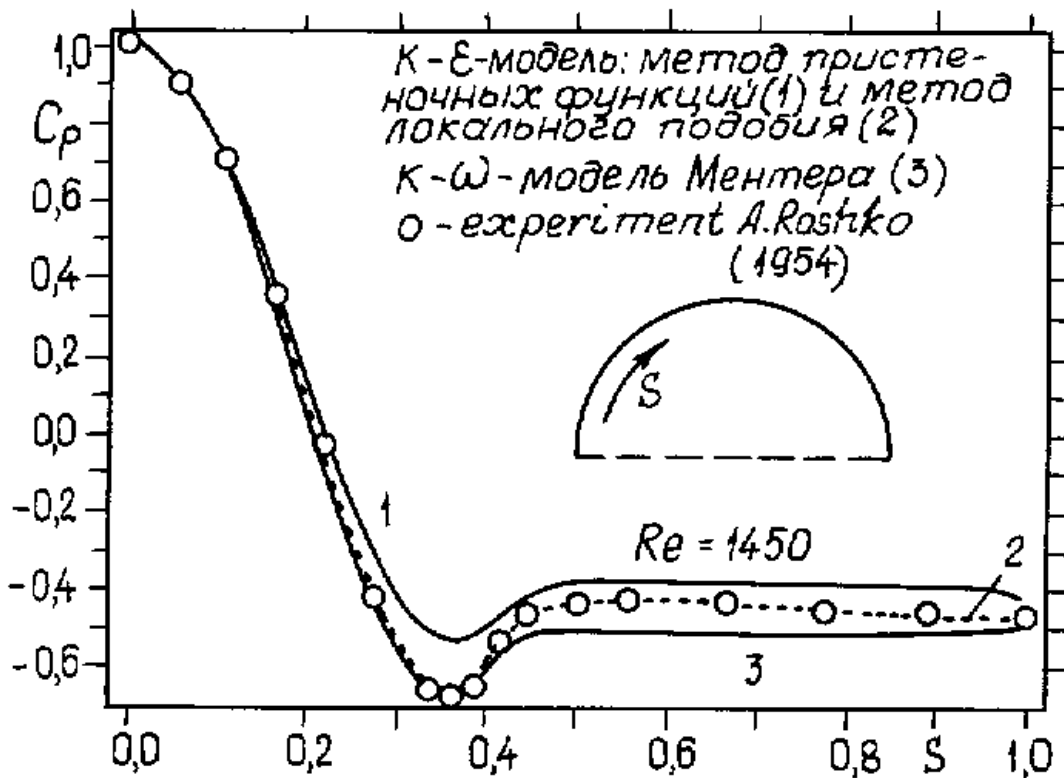


Рис.22

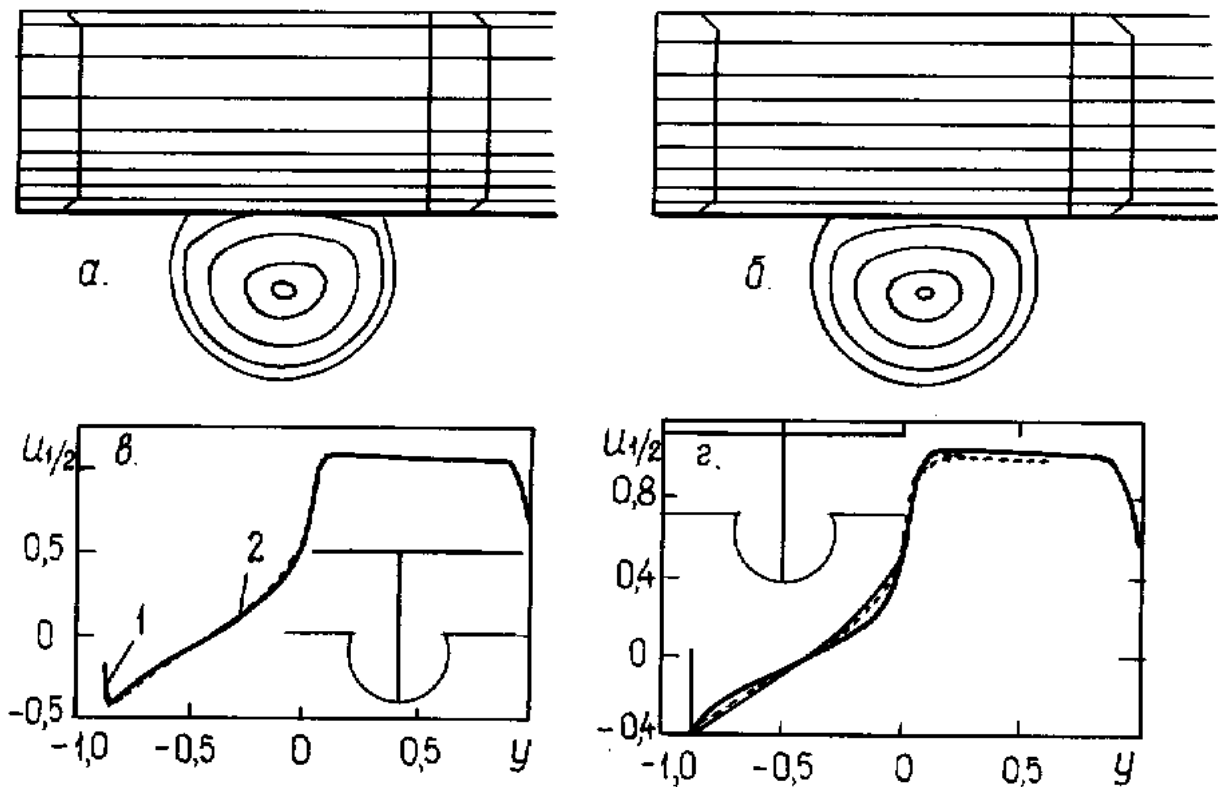


Рис.23

В. Влияние численной диффузии.

Как известно [21], вопрос о влиянии численной диффузии на решение задачи имеет важное значение, особенно в расчетах отрывных течений при высоких числах Рейнольдса. Указанное влияние связывается с ошибками дискретизации исходных уравнений и в преобладающей мере предопределяется аппроксимацией конвективных членов уравнений переноса. Долгое время в 70-х и начале 80-х годов анализу точности расчетных алгоритмов уделялось недостаточное внимание в противовес устойчивости вычислительной процедуры. Однако методические исследования отрывных течений (Сайд-Чиалпетта (1985), Сайред-Госмен (1985), Исаев (1985) и др.) выявили существенные ошибки в расчетах с использованием противопоточных, односторонних и гибридных схем, связанные с влиянием численной диффузии, а также рекомендовали для устранения затеняющего воздействия этой искусственной диффузии применение схем высокого порядка аппроксимации (например, противопоточной схемы с квадратичной интерполяцией Леонарда).

Обозначения к результатам

№	Экспериментальные исследования
1	Adams, Johnston (1988)
2	Driver, Seegmiller (1985)
3	Adams, Johnston, Eaton (1978)
4	Eaton, Johnston (1980)
5	Kim, Kline, Johnston (1977)

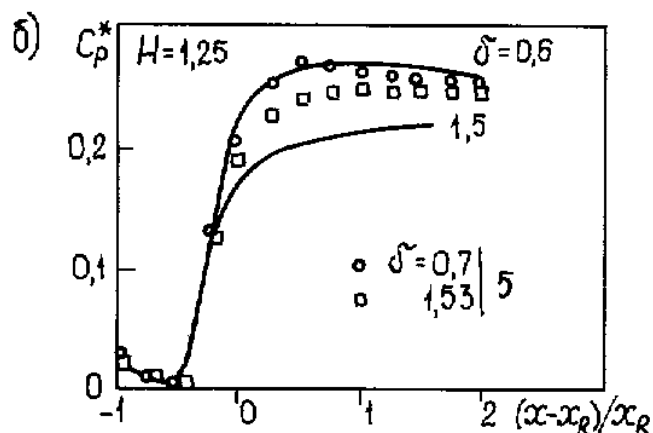
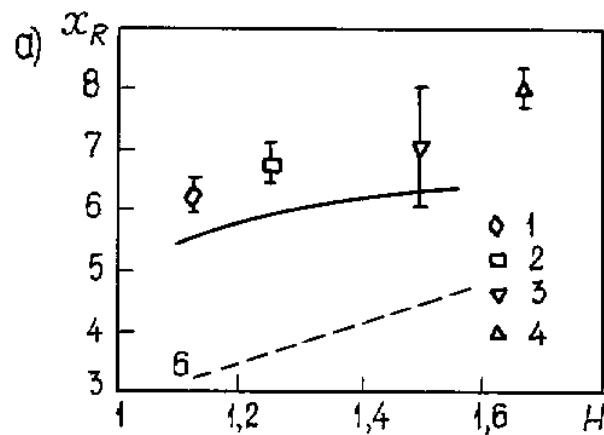


Рис.24

На рис.24 сопоставляются результаты расчета отрывного течения в ступенчатом канале за обращенной назад ступенькой с помощью схемы Леонарда с данными (1-5) различных экспериментальных исследований (см.таблицу к рис.24). Также иллюстрируется искажающее влияние численной диффузии при использовании основанных на гибридной схеме кодах TEACH (кривая 6). Оценка влияния на длину отрывной зоны за ступенькой x_R степени расширения $H(a)$, а также зависимость распределения коэффициента давления C_p на стенке за ступенькой от толщины пограничного слоя δ набегающего потока (б) показывает довольно высокую точность прогнозирования локальных и интегральных параметров потока рассматриваемого типа течения в рамках предложенного в [21] подхода, сочетающего использование высокорейнольдсовой $k - \varepsilon$ -модели турбулентности и метода пристеночных функций. Очевидно, что влияние численной диффузии при расчете турбулентного течения в ступенчатом канале по гибридной схеме значительно и приводит к существенному ослаблению вихревого течения за ступенькой аналогично воспроизводству ламинарного режима такого течения.

Интересно подчеркнуть, что долгое время дискретизация конвективных членов уравнений изменения количества движения считалась более важной, чем представление аналогичных членов уравнений переноса турбулентных характеристик. Для последних было вполне приемлемым использование схем низкого порядка точности и, в частности, гибридной схемы. В последнее время ситуация изменяется, поскольку, с одной стороны, получили распространение TVD-схемы с уменьшенной численной диффузией, а с другой стороны, широкое применение записи уравнений в вращениях позволяет существенно увеличить вычислительную устойчивость расчетных процедур, что избавляет от необходимости использовать грубые схемы дискретизации.

Г. Апробация на задачах, имеющих экспериментальные аналоги.

Несколько расчетных примеров для двумерных и пространственных вихревых течений различных типов призваны проиллюстрировать приемлемость двухпараметрических моделей турбулентности. В качестве тестовых задач, имеющих экспериментальные аналоги, рассматриваются задачи осесимметричного обтекания цилиндра с выступающим диском, двумерного обтекания модели автомобиля «Фольксваген», осесимметричного обтекания потоком сжимаемого вязкого газа цилиндра с диском, пространственного обтекания потоком несжимаемой жидкости тела Ахмеда и прямоугольного параллелепипеда, пространственного обтекания сферической лунки на плоскости и на стенке канала. Во всех примерах используется подход, описанный в [21] и основанный на использовании схемы Леонарда при дискретизации конвективных членов уравнений изменения количества движения.

На рис.25 показана картина линий тока при турбулентном обтекании цилиндра с диском ($R = 0.75, l = 0.375$ в долях диаметра цилиндра) при $Re = 1.25 \times 10^5$ (а); распределение осевой составляющей скорости в срединном сечении каверны между диском и цилиндром (б); профили коэффициента статического давления C_p на обтекаемых поверхностях (в); распределение коэффициента трения C_f на боковой поверхности цилиндра (г). Линии тока оцифрованы: 1- $\psi = -0.1$, 2-(-0.09), 3-(-0.06), 4-(-0.03), 5-(-0.01), 6-0, 7-0.005, 8--0.1, 9-0.5. Экспериментальные точки 9-11, а также сплошные линии соответствуют степени турбулентности набегающего потока $Tu = 0.5\%$, пунктирные линии - $Tu = 0.05\%$ (9,10 – данные Рошко-Кенига (1985), 11 – данные Бобышева-Исаева (1988)). На рис.25 представляются профили турбулентных характеристик $-\overline{u'v'}_{1/2}(a)$, $\sqrt{\overline{u'^2}}_{1/2}(b)$,

$\sqrt{v'^2}_{1/2}$ (в) и турбулентной вязкости ν_t (з) в срединном сечении каверны между диском и цилиндром для различной степени турбулентности набегающего потока: 1- $Tu = 0.5\%$, 2 - 0.05% , 3 - 1.0% , 4 – экспериментальные данные Рошко-Кенига, полученные при $Tu = 0.5\%$. Применяется высокорейнольдсовая модель $k - \varepsilon$ в сочетании с методом пристеночных функций. В табл. 6.5 сравниваются экспериментальные и расчетные результаты по составляющим лобового сопротивления компоновки диск-цилиндр с различным удлинением измерительного элемента λ и при разной степени загромождения моделью потока в рабочей части трубы.

Сильное разрежение в зоне между диском и цилиндром в совокупности с гладким характером обтекания боковой поверхности цилиндра, вызванное присоединением потока в его острой кромке, предопределяет возникновение со стороны торцевой поверхности цилиндра значительной по величине и направленной навстречу набегающему потоку тянущей силы, почти полностью компенсирующей силовую нагрузку на выступающий перед цилиндром диск. В результате профильное сопротивление компоновки становится почти на два порядка ниже, чем сопротивление составляющих ее тел, и приближается к сопротивлению тела удобообтекаемой формы. Так, для тела рассматриваемой геометрии $C_{xp} = 0.01$, что в 75 раз меньше, чем C_{xp} торца цилиндра.

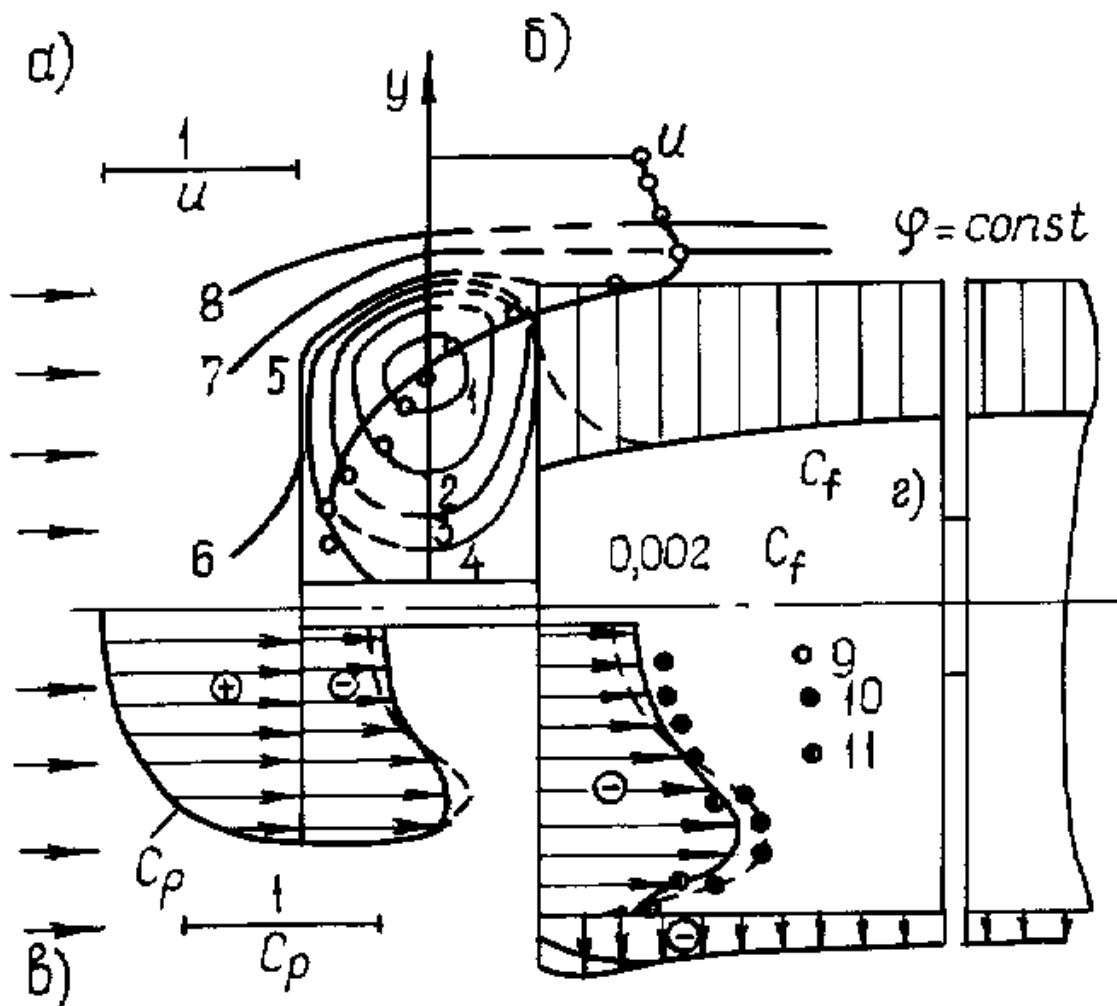


Рис.25

Таблица 6.5

	α	λ	C_{xp}	$C_{xp} + C_{xf}$	C_x
Эксперимент	0.03	1.25	0.03 ± 0.005	0.04 ± 0.005	-
	0.006	14	-	0.20	0.31
Расчет	0.003	1.25	0.03	0.05	-
	0.003	14	0.03	0.20	0.30

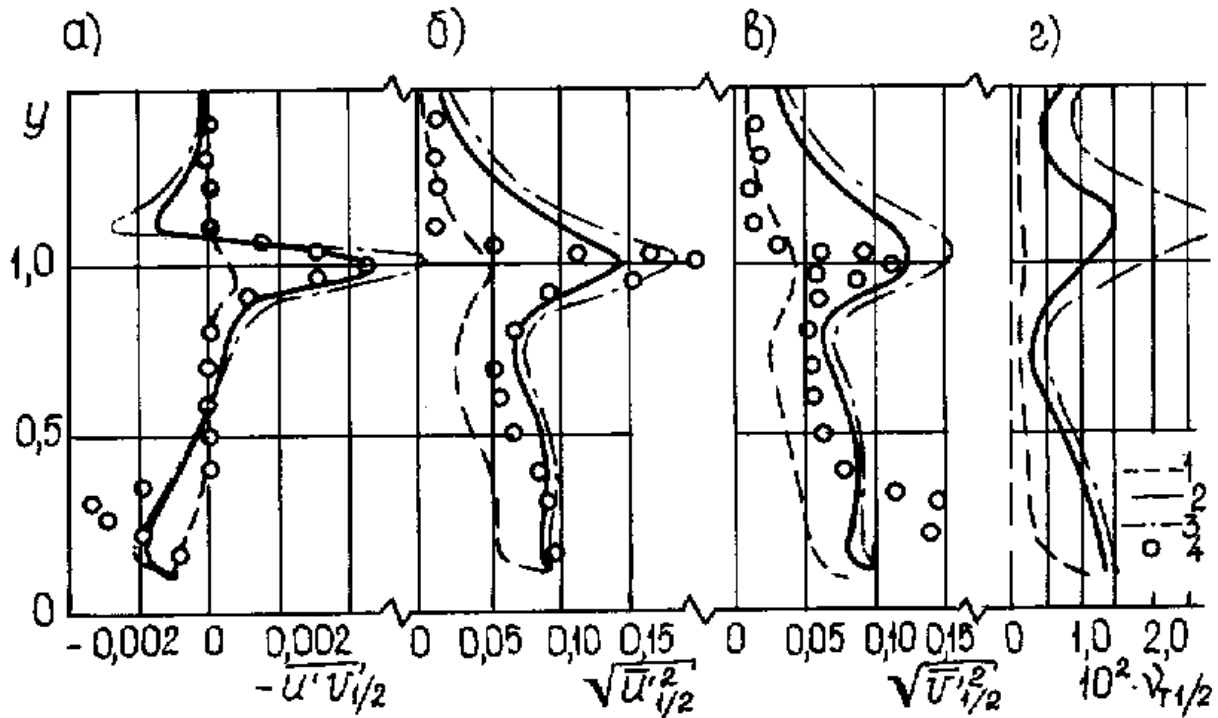


Рис.26

Характерными элементами структуры течения, обусловленными вязкими эффектами и играющими существенную роль в механизме снижения лобового сопротивления, являются турбулентные сдвиговые слои, развивающиеся вдоль границы области отрыва, на стенках каверны и на боковой поверхности цилиндра. Как видно из профиля напряжений трения $-\overline{u'v'}_{1/2}$ (рис.26,а), максимальные значения напряжения трения реализуются в зонах расположения сдвиговых слоев, в то же время в центре вихря и в области набегающего потока величины $-\overline{u'v'}_{1/2}$ пренебрежимо малы. Таким образом, есть основания полагать достаточно справедливой для рассматриваемого крупномасштабного вихревого течения предложенную Бэтчелором модель, согласно которой вихрь можно разбить на две зоны: невязкое ядро и окружающий его сравнительно тонкий сдвиговый слой. Максимальные значения пульсационных составляющих скорости также реализуются в сдвиговом слое на границе передней срывной зоны (ПСЗ), что приводит к локальному максимуму в этой же области кинематического коэффициента турбулентной вязкости ν_t . Интересно отметить, что средний уровень пульсационных составляющих скорости, определяющих интенсивность турбулентности в крупномасштабном вихре, составляет примерно 0.05-0.1 от скорости набегающего потока, что на порядок превышает аналогичные величины в набегающем потоке ($Tu = 0.5\%$). Таким образом, крупномасштабный вихрь в ПСЗ выступает в привычной роли генератора турбулентности, однако уро-

вень «накачки» турбулентности в случае оптимальной по профильному сопротивлению компоновки почти в три раза ниже по сравнению с уровнем турбулентности для течения в ближнем следе за затупленным телом.

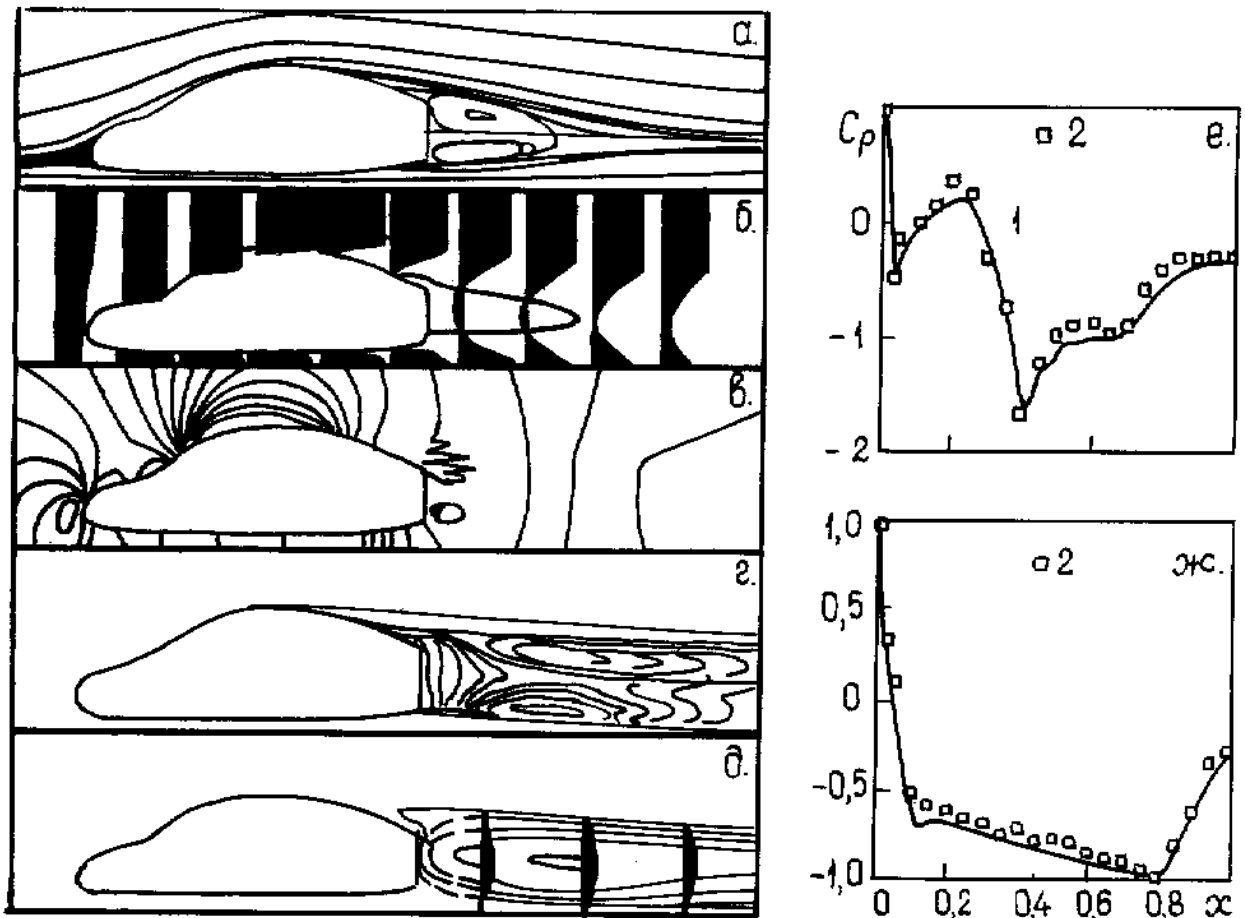


Рис.27

На рис.27 (а-д) показаны картины полей характеристик турбулентного обтекания профиля автомобиля «Фольксваген» вблизи подвижного экрана при $Re = 10^7$ и сопоставление расчетных и экспериментальных распределений вдоль хорды профиля коэффициента статического давления C_p : а – линии тока, соответствующие значениям функции тока: -0.03, -0.01, -0.005, -0.001, 0, 0.001, 0.005, 0.01, 0.03, 0.1, 0.2, 0.3; б – профили продольной составляющей скорости; в – изобары с шагом 0.05 от -0.75 до 0.5; г – картины изолиний кинетической энергии турбулентных пульсаций k , нанесенных с шагом 0.005 от 0.005 до 0.05; д – то же для вихревой вязкости ν_t , нанесенных с шагом 0.0005 от фонового значения 0.0015 до 0.0025; построенные вдоль хорды профиля рассчитанные значения C_p (кривые 1 на рис.27,е,ж) относятся к верхней и нижней сторонам профиля соответственно, экспериментальные данные (точки 2) для сравнения взяты из работ Бушхейма-Роха-Вюстберга (1989) и Китохакобаяши-Моруока (1986). Как и на рис.25-26, в расчетах применяется модель $k - \varepsilon$ с пристеночными функциями.

Как подчеркивается в работе Грабарника-Исаева (1998), для рассматриваемого течения характерно развитие двух сдвиговых потоков: пристеночной струи вдоль экрана и отрывного течения в криволинейном канале за обращенной назад ступенькой. Поле давления сильно неоднородно с высоким разрежением в выпуклой части профиля. Правильно воспроизводится зона повышенного давления в окрестности лобового стекла. Там возникает тонкая и непротяженная отрывная зона. В просвете

между экраном и автомобилем реализуется разгонное течение канального типа с падением давления по длине канала. Область следа, напротив, характеризуется изобаричностью, свойственной струйным течениям. Вихревая вязкость максимальна в центральной части струи, набегающей на заднюю часть автомобиля. Весьма близкое согласие приведенных расчетных и экспериментальных распределений давления по контуру свидетельствует о приемлемости данного подхода для моделирования обтекания тел с нефиксированной точкой отрыва.

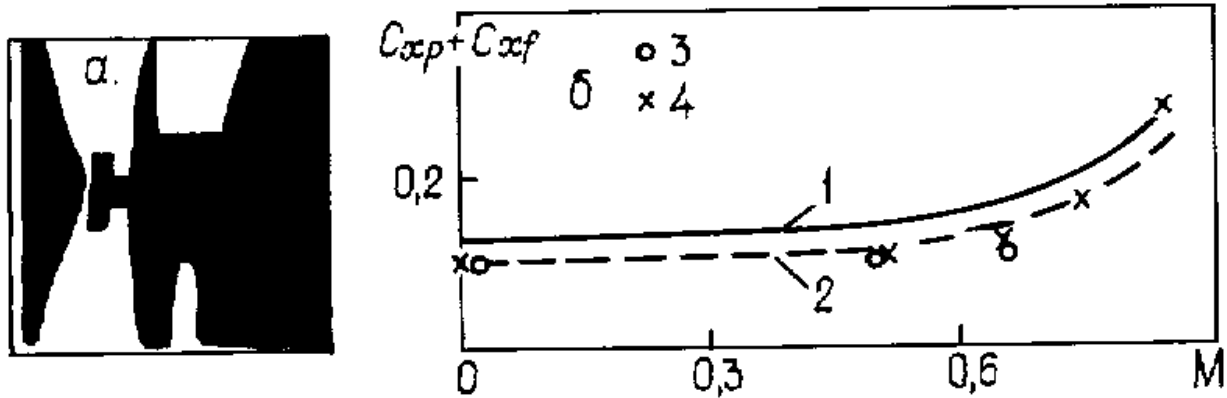


Рис.28

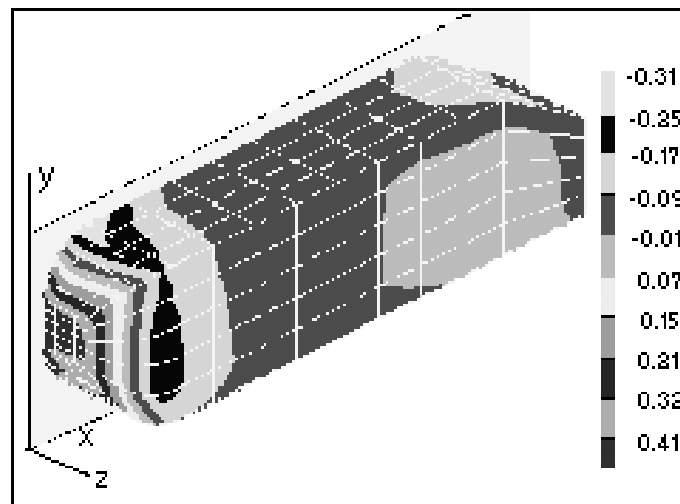


Рис.29

На рис.28 демонстрируется теневая картина обтекания носовой части цилиндра с выступающим диском ($R = 0.6$, $l = 0.4$) трансзвуковым ($M=0.9$) воздушным потоком (а) и сопоставительный анализ экспериментальных (1,2) и расчетных (3,4) результатов по лобовому сопротивлению удлиненных ($\lambda = 4$) цилиндрических тел с дисковыми насадками без учета донного сопротивления (б) в широком диапазоне изменения чисел Маха: 1 - $R = 0.8$, $l = 0.33$, 2 - 0.8 , 0.47 , 3 - 0.75 , 0.375 , 4 - 0.62 , 0.5 . Число Рейнольдса выбрано равным 10^5 . Турбулентность в набегающем потоке считается пренебрежимо малой. Работоспособность вычислительного комплекса для прогнозирования характеристик сжимаемого турбулентного течения, основанного на $k - \varepsilon$ - модели и пристеночных функциях, проверяется при сопоставлении расчетных результатов и экспериментальных данных (Бобышев-Исаев (1998)), полученных для компоновок диск-цилиндр большого удлинения с близкими геометрическими размерами дисков и зазоров между ними и торцами цилиндра.

Вполне удовлетворительное согласование результатов имеет место во всем диапазоне изменения числа Маха (от 0 до 0.85). Профильное сопротивление тел в широком диапазоне чисел Маха практически постоянно (до $M < 0.6$) для близких к оптимальным по C_x (для $M=0$) компоновок.

Представленный подход к моделированию отрывных турбулентных течений несжимаемой вязкой жидкости, основанный на использовании неявных факторизованных алгоритмов решения уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью высокорейнольдсовой модели $k - \varepsilon$, был апробирован на ряде трехмерных задач.

На рис.29 показаны изобарические зоны оцифрованного избыточного давления, отнесенного к удвоенному скоростному напору, на поверхности обтекаемого низкоскоростным потоком тела Ахмеда.

Тело Ахмеда представляет собой параллелепипед со скругленными острыми кромками в передней части и скошенной клиновидной хвостовой частью, располагающийся вблизи подвижного экрана (имитирующего дорожное полотно). Результаты проведенных расчетов при соответствующих условиях испытаний в аэродинамической трубе числе Рейнольдса 3.6×10^6 иллюстрируют ярко выраженное асимметричное распределение локальных силовых нагрузок на рассматриваемый объект. Согласно экспериментальным данным Сумантрана-Хаммонда (1988), коэффициент лобового сопротивления тела лежит в диапазоне $0.15 \div 0.17$. На сетке, содержащей порядка 10^4 ячеек, получен коэффициент сопротивления 0.17, что дает представление о приемлемости численных прогнозов пространственных течений на сравнительно экономичных сетках. Интересно отметить, что полученные данные хорошо коррелируют с результатами расчетов обтекания тела Ахмеда на более подробных сетках с помощью известного пакета FLOW3D.

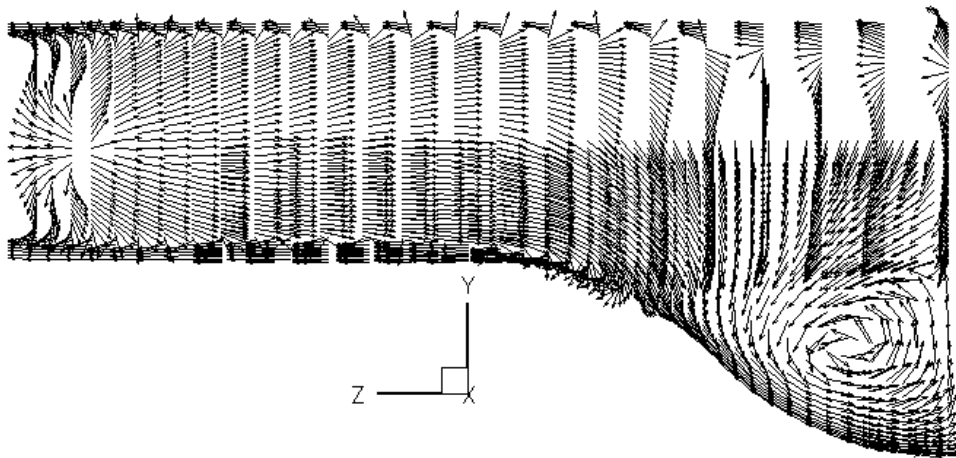


Рис.30

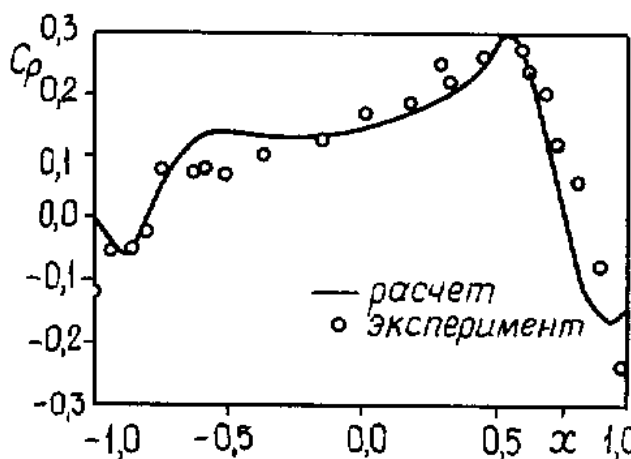


Рис.31

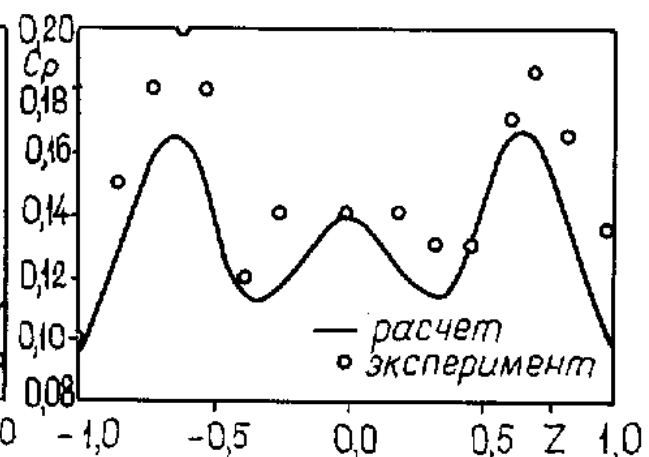


Рис.32

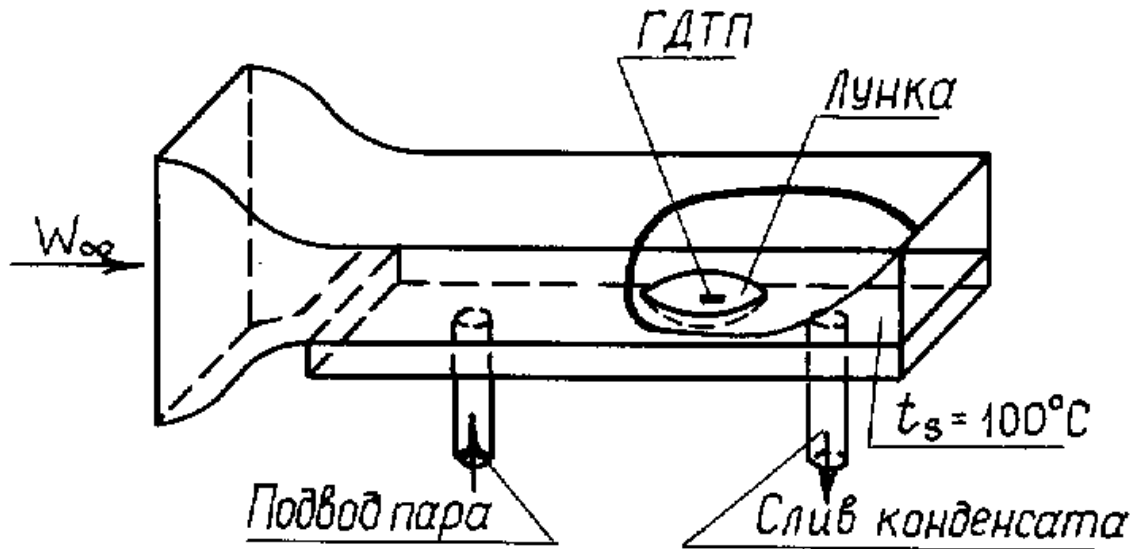


Рис.33

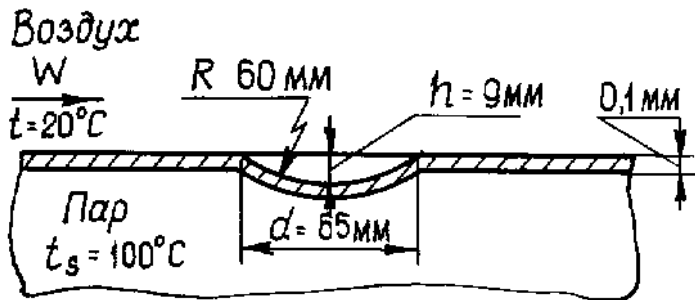


Рис.34

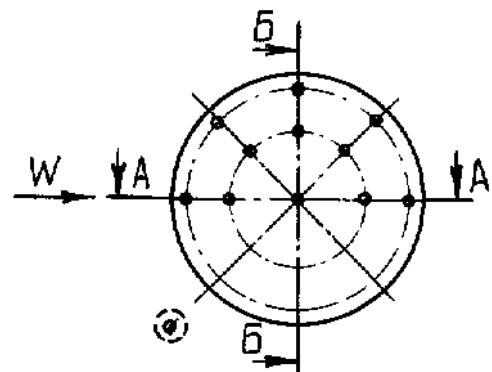


Рис.35

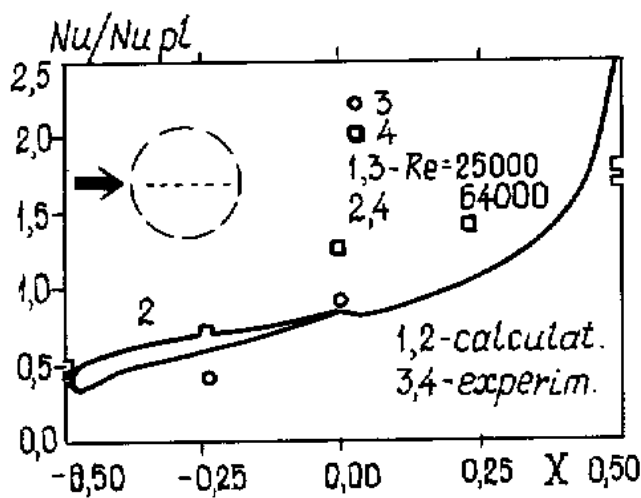


Рис.36

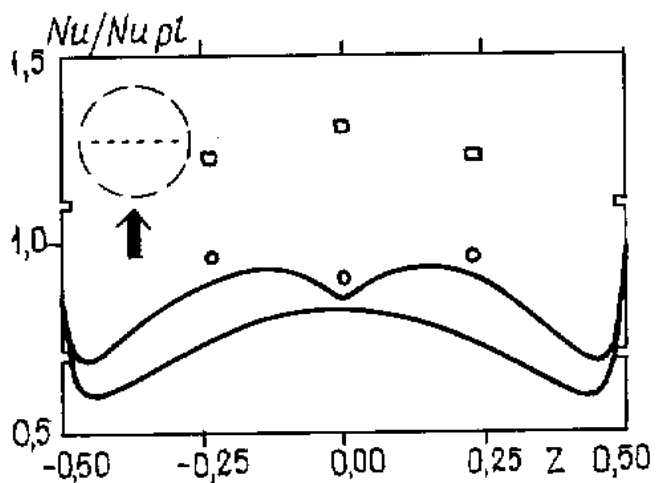


Рис.37

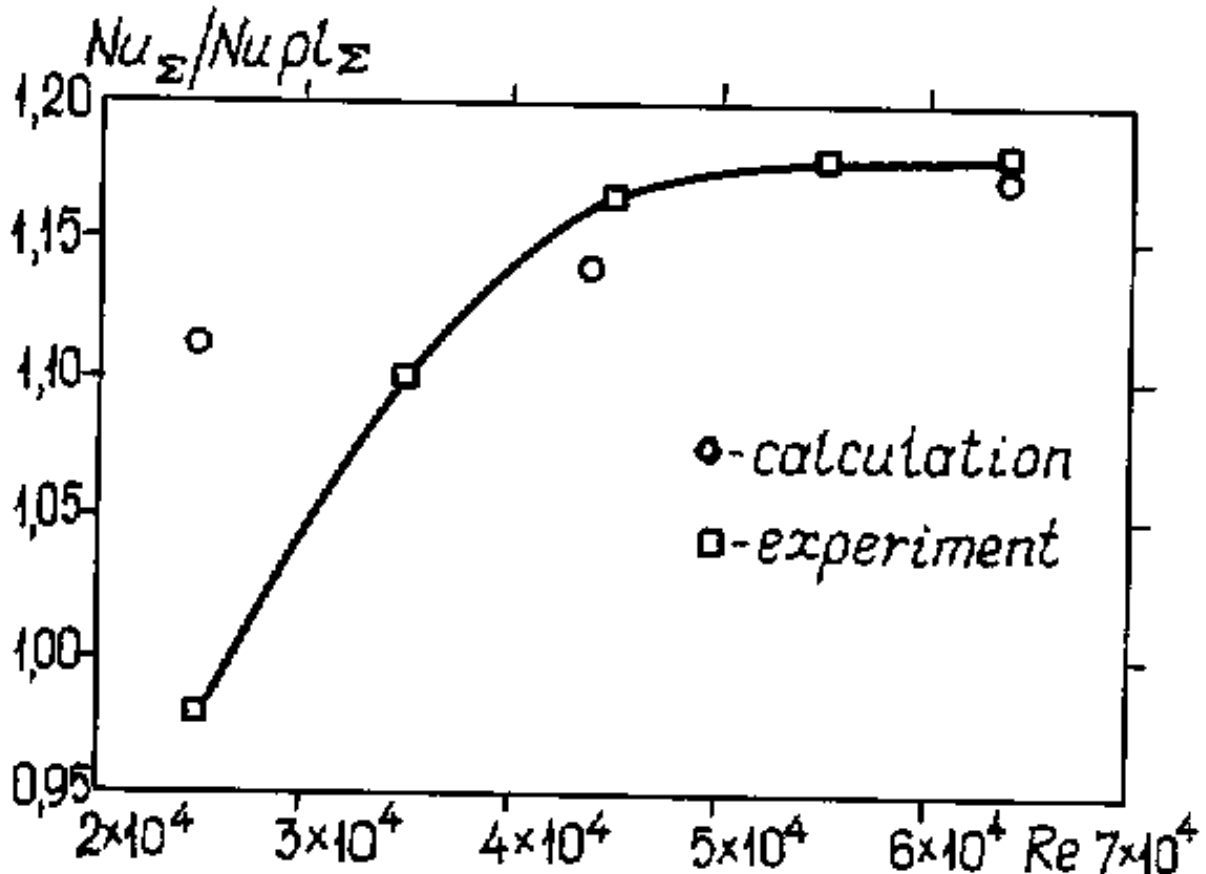


Рис.38

На рис.30 - 32 показаны соответственно картина векторов скорости вторичного течения в поперечной срединной плоскости лунки на стенке канала, а также графики распределений коэффициента поверхностного давления в продольной и поперечной сечениях лунки. Продемонстрирована приемлемость расчетной методологии при сопоставительном анализе численных результатов и данных экспериментальных измерений (В.И.Терехов и др.(1995)) характеристик турбулентного течения в канале со сферической лункой.

На рис.33 и 34 показаны схема экспериментальной установки и форма сферической лунки, а на рис.35 - предделение точек замера тепловых потоков в лунке (Сапожников С.З., Митяков М.Ю., Митяков А.В.(2000)).

На рис.36 и 37 демонстрируются профили локальных тепловых нагрузок в двух сечениях лунки, отнесенных к тепловым нагрузкам в случае обтекания поверхности без лунки. Сопоставляются рассчитанные с использованием зональной модели Менгера характеристики теплообмена с данными измерений относительных тепловых потоков при числах Рейнольдса 2.5×10^4 и 6.4×10^4 . Также на рис.38 сравниваются расчетные и экспериментальные коэффициенты теплоотдачи от поверхности лунки в зависимости от Re .

Удовлетворительное согласие результатов по относительным тепловым нагрузкам свидетельствует о приемлемости зональной модели Менгера для расчета вихревой динамики и вихревого теплообмена при обтекании поверхности с лункой.

На рис.39 представляются расчетные и экспериментальные данные (СПб филиал ВНИИ ПО) эволюции температуры при обтекании горящего вагона при его движении в тоннеле. Расчетная методика рассмотрена в п. 6.12.

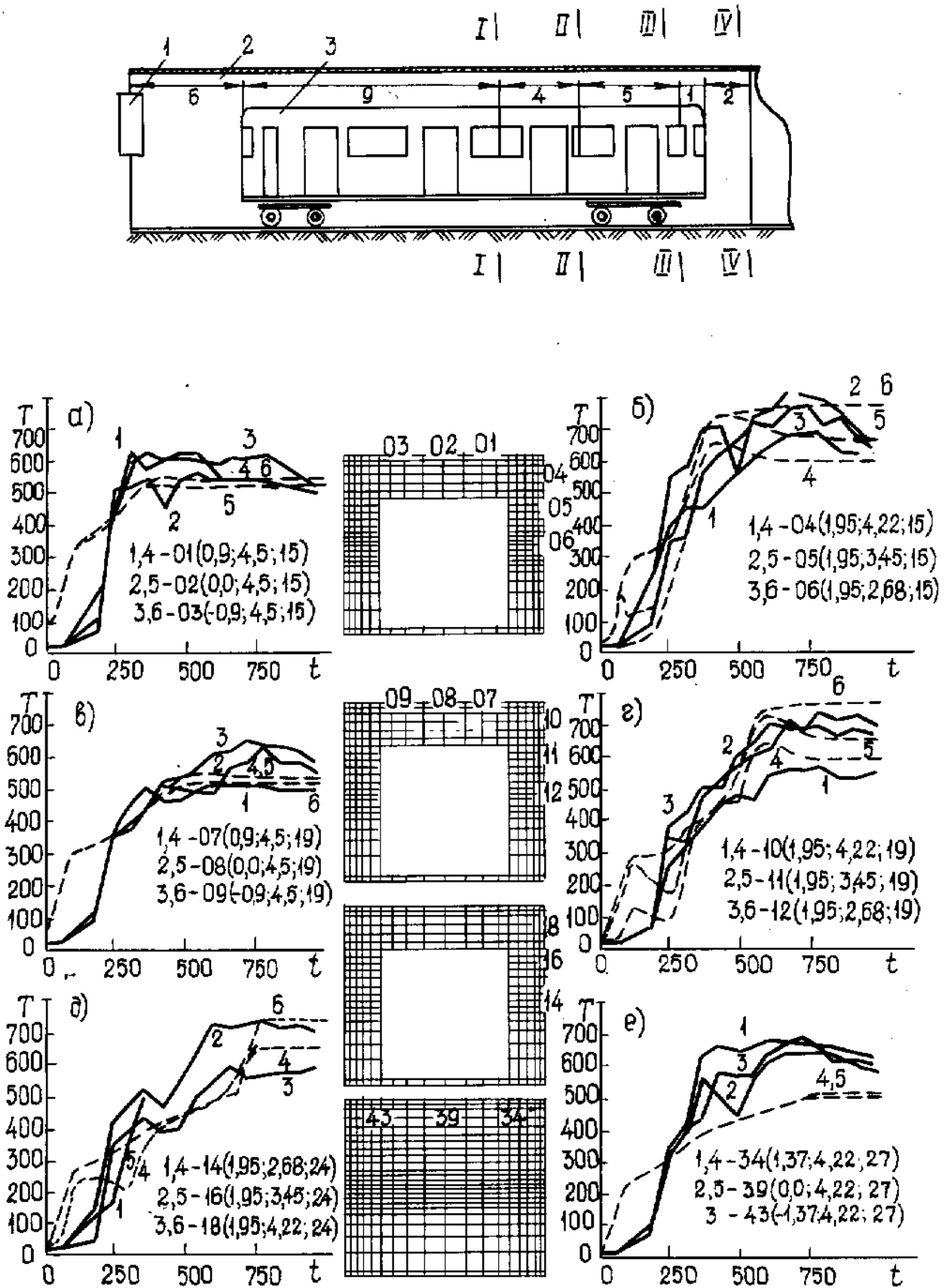


Рис.39

В начальный момент времени задается равномерный поток газа через входное сечение тоннеля со средней скоростью 1.2 м/с. В это же время начинается вдув газа

через боковые стенки вагона, представляющего продукты горения. Вдув осуществляется через щель высотой 0.4 м, расположенную на расстоянии 0.58 м от верха вагона, что примерно соответствует уровню верха окон. Одновременно задается отсос воздуха через щель той же высоты, расположенной непосредственно под первой. Принимается, что процесс горения начинается с передней части вагона. Начальная длина щели задавалась равной нулю. Скорость распространения фронта пламени принята равной 0.025 м/с. Параметры истекающего газа: температура 1123° К, массовый расход на единицу длины щели 2.73 м³/(м · с), состав: O₂ - 23%, С - 0.285%, СО - 0.1423%, остальное азот. Скорость истечения при этом составляет 6.825 м/с. Скорость отсоса рассчитывается в каждый момент времени таким образом, чтобы отношение массовых расходов через выходную и входную щели было равным 0.93 (соответствует физическому эксперименту). Принимается, что параметры истекающего газа по времени не изменяются. На выходной границе задается постоянное давление (истечение в атмосферу). Стенки тоннеля рассматриваются теплоизолированными.

Сопоставительный анализ временных процессов изменения расчетных и экспериментальных распределений температуры в выбранных сечениях тоннеля демонстрирует их вполне приемлемое согласие, в частности, по темпу изменения и по максимальному уровню температуры, что свидетельствует об адекватности разработанного вычислительного комплекса. Следует отметить, что имеющие место отличия в начальный период развития процесса связаны с игнорированием в рассматриваемой модели реальной фазы возгорания, характеризующейся прежде всего некоторой временной задержкой в установлении заданного удельного расхода истекающих продуктов сгорания. В расчетной модели реализуется взрывное развитие процесса. Однако обнаруженное согласование расчетных и экспериментальных темпов роста температуры свидетельствует о независимости от начальной фазы процесса и о преобладании расходного механизма в формировании температурного режима в путевом тоннеле метрополитена. Небольшое несоответствие в поведении расчетных и экспериментальных кривых зависимости температуры от времени при $t > 700\text{с}$ (падение в экспериментах и выход на асимптотику в расчетах) можно объяснить уменьшением реального удельного расхода продуктов сгорания в передней части вагона.

7. МОДЕЛИ РЕЙНОЛЬДСОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

7.1. Моделирование членов диссипации, диффузии и перераспределения в уравнениях переноса рейнольдсовых напряжений

Рассмотренные выше модели турбулентности, в том числе двухпараметрические модели, оказываются в ряде случаев малопригодными. Так, в экспериментах со сложными течениями отмечается существенная разница в эволюции отдельных составляющих напряжений Рейнольдса, которая не может быть адекватно отражена с помощью введения изотропной по сути турбулентной вязкости. Примером дефектов моделей турбулентности, использующих концепцию турбулентной вязкости, является известный в практике факт, который заключается в том, что для положительных значений турбулентной вязкости, в соответствии с зависимостью (3.1) для $\overline{u'_i u'_k}$, оказывается возможным получить для $\overline{u'^2_i}$ как положительные, так и отрицательные значения. Перспективной моделью, позволяющей отказаться от применения турбулентной вязкости и учесть при этом, в той или иной степени, анизотропию турбулентности, является модель, использующая уравнения переноса рейнольдсовых на-

пряжений $\overline{u'_i u'_k}$ в форме (1.15) или (1.15а). В этих уравнениях искомой функцией является член генерации рейнольдсовых напряжений P_{ik} , поэтому моделированию подлежат члены диффузии, перераспределения и диссипации этих напряжений (D_{ik} , R_{ik} и ε_{ik} соответственно).

При моделировании функции ε_{ik} используются по крайней мере два подхода. Так, в работах Коловандина (1982), Брэдшоу-Сибеси-Уайтлоу (1981,[20]), Ха-Минх-Хиеу (1976) и др. принимается, что член ε_{ik} , определяющий диссипацию или распад рейнольдсовых напряжений, пропорционален $\overline{u'_i u'_k}$ с коэффициентом пропорциональности, связанным с характерным временным масштабом \mathcal{T} , построенным в виде отношения k/ε , где ε - скорость диссипации турбулентных пульсаций:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon. \quad (7.1)$$

Обычно принято считать, что зависимость (7.1) справедлива для течений при достаточно малых значениях турбулентного числа Рейнольдса ($Re_t \rightarrow 0$). Иной подход использован в работах Ханьялика-Лаундера (1972,[26]) и др., где в соответствии с гипотезой о локальной изотропности принимается, что скорости диссипации всех трех нормальных составляющих напряжений совпадают и, следовательно, составляют 2/3 полной скорости диссипации:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{2}{3} \delta_{ik} \varepsilon. \quad (7.2)$$

Зависимость (7.2) предполагает, что вязкая диссипация касательных напряжений равна нулю, что действительно имеет место при $Re_t \rightarrow \infty$.

Обобщением зависимостей (7.1) и (7.2) является соотношение для ε_{ik} , приведенное в ряде работ (Коловандин (1982), Ханьялик-Лаундер(1972)):

$$\varepsilon_{ik} = \frac{2}{3} \varepsilon \left[(1 - f_s) \delta_{ik} + \frac{3}{2} \frac{\overline{u'_i u'_k}}{k} f_s \right], \quad (7.3)$$

где $f_s \rightarrow 0$ при $Re_t \rightarrow \infty$; $f_s \rightarrow 1$ при $Re_t \rightarrow 0$.

Тройная корреляция в диффузионном члене D_{ik} обычно выражается через двойную корреляцию $\overline{u'_i u'_k}$. Известен ряд зависимостей $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ от $\overline{u'_i u'_k}$. Часто употребляется градиентная модель [16]:

$$\overline{u'_i u'_j u'_k} = -c_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_l}, \quad (7.4)$$

где c_s - постоянная.

По данным работ Коловандина (1982), Лаундера-Риса-Роди (1975 [27]),

$$\overline{u'_i u'_j u'_k} = c'_s \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u'_l u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} + \overline{u'_l u'_i} \frac{\partial \overline{u'_j u'_k}}{\partial x_l} + \overline{u'_l u'_j} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_l} \right), \quad (7.5)$$

где, как и c_s , c'_s - постоянная.

Следует отметить, что зависимость (7.4) имеет недостаток, который заключается в отсутствии симметрии для индексов i, j, k , т.е. она является тензорно не инвариантной.

Второй член D_{ik} , подлежащий моделированию, определяет диффузию, создаваемую пульсациями давления. В большинстве работ этим членом пренебрегают. Объяснением этому служит, до некоторой степени, тот экспериментальный факт, что условие баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций для ряда течений достигается лишь в пренебрежении диффузией, вызванной пульсациями давления. Этот результат, характерный для уравнения энергии турбулентных пульсаций, переносится на уравнение для рейнольдсовых напряжений. Известны, однако, работы (см. Ламли (1975)), в которых принимается, что $\overline{u'_i p'}/\rho = -c_{s1} \overline{u'_i u_j'^2}$, где c_{s1} - постоянная.

Член перераспределения R_{ik} , описывающий обмен энергией между отдельными составляющими рейнольдсовых напряжений $\overline{u'_i u'_k}$ вследствие корреляций давления и напряжений трения, в ряде работ представляется в виде [6]

$$R_{ik} = R_{ik,1} + R_{ik,2} + R_{ik,1W} + R_{ik,2W}, \quad (7.6)$$

где $R_{ik,1}$ и $R_{ik,2}$ определяют взаимодействие пульсационных составляющих скорости между собой и взаимодействие осредненного напряжения трения с пульсационными составляющими скорости соответственно; $R_{ik,1W}$ и $R_{ik,2W}$ определяют влияние стенки.

Вид функций $R_{ik,1}$ и $R_{ik,2}$ следует из решения уравнения Пуассона для пульсаций давления. Обычно $R_{ik,1}$ называется «анизотропной» составляющей корреляции R_{ik} , а $R_{ik,2}$ - ее «деформационной» составляющей. Функция $R_{ik,1}$ для изотропного поля равна нулю. Она отличается от нуля, когда не равен нулю тензор анизотропии $a_{ik} = \frac{3}{2} \frac{\overline{u'_i u'_k}}{k} - \delta_{ik}$. Отметим, что в работе [6] для $R_{ik,1}$ используется название «тенденция к изотропности», а член $R_{ik,2}$ называется «членом быстрых изменений». Таким образом, член $R_{ik,1}$ может рассматриваться как некий фактор в R_{ik} , позволяющий анизотропное поле турбулентности привести к изотропному состоянию. Указанное свойство функции $R_{ik,1}$ послужило основой для ее определения в зависимости от a_{ik} . Так, в работах [16,28] используется линейная зависимость вида

$$R_{ik,1} = -c_{R1} \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u'_i u'_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} k) = -c_{R1} \frac{2}{3} \varepsilon a_{ik} \quad (7.7)$$

$$\text{или} \quad R_{ik,1} = -c_{R10} \varepsilon a_{ik}, \quad (7.7a)$$

где $c_{R10} = \frac{2}{3} c_{R1}$.

Известны и более сложные зависимости. Так, для $R_{ik,1}$ предлагается зависимость, включающая члены второго и третьего порядков a_{ik} (Ламли (1974)):

$$R_{ik,1} = - (c_{R10} + c'_{R10} a_{ik} a_{ki}) \varepsilon a_{ik} + c''_{R10} (3a_{ij} a_{kj} - \delta_{ik} a_{ik} a_{ki}),$$

где c'_{R10} и c''_{R10} - постоянные.

Следует отметить, что включение в последнее соотношение членов высокого порядка анизотропии не всегда приводит к улучшению результатов расчетов по сравнению со случаем использования более простых (линейных) зависимостей [6].

Функция $R_{ik,2}$ отражает реакцию однородного поля скорости на его деформацию за счет осредненного во времени сдвига. Таким образом, если функция

$R_{ik,1}$ отлична от нуля в турбулентном поле скорости любой формы при условии его анизотропности, то $R_{ik,2}$ не равна нулю только для поля скорости с осредненным сдвигом. Так же как и для функции $R_{ik,1}$, известно несколько вариантов моделирования $R_{ik,2}$. Так, например, в [28] принимается, что

$$R_{ik,2} = -\frac{c_{R2}+8}{11}(P_{ik} - \frac{2}{3}\delta_{ik}P) - \frac{30c_{R2}-2}{55}k(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i}) - \frac{8c_{R2}-2}{11}(P_{ik}^* - \frac{2}{3}\delta_{ik}P), \quad (7.8)$$

где $P_{ik} = -(\overline{u'_i u'_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} + \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j}})$, $P = P_{ii}/2$,

$$P_{ik}^* = -(\overline{u'_i u'_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}),$$

где c_{R2} - постоянная.

Более простое выражение для $R_{ik,2}$ получается, если пренебречь в (7.8) вторым и третьим членами [27,28]:

$$R_{ik,2} = -c'_{R2}(P_{ik} - \frac{2}{3}\delta_{ik}P). \quad (7.8a)$$

В работе [6] указывается, что (7.8a) является прямым аналогом зависимости (7.7) или (7.7a). Для частичной компенсации отброшенных членов постоянная c'_{R2} в (8.8a) может несколько отличаться от коэффициента $(c_{R2} + 8)/11$. Наконец, отметим еще один тип зависимости (7.8), предложенный Ротта (1967). В случае изотропной турбулентности, подвергнутой внезапному искажению [6], зависимость (7.8) принимает вид

$$R_{ik,2} = -c''_{R2}k(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i}), \quad (7.8b)$$

где c''_{R2} - постоянная, несколько отличающаяся от коэффициента $(30c_{R2} - 2)/55$ в (7.8).

Влияние стенки определяется функциями $R_{ik,1W}$ и $R_{ik,2W}$. Хотя известны работы (см., например, [27]), в которых этими функциями пренебрегают, по крайней мере для тонких сдвиговых слоев, влияние стенки в большинстве случаев является существенным даже при высоких значениях турбулентного числа Рейнольдса Re_t , ибо размер турбулентных вихрей, переносящих энергию турбулентности, обычно соизмерим с расстоянием от стенки. В работах (например, [6]) для $R_{ik,1W}$ и $R_{ik,2W}$ приведены зависимости вида

$$R_{ik,1W} = c_{R1,W} \frac{\varepsilon}{k} [\overline{u_n'^2} \delta_{ik} - \frac{3}{2}(\overline{u'_n u'_i} \delta_{nk} + \overline{u'_n u'_k} \delta_{ni})] f_1 \left(\frac{L}{x_n} \right), \quad (7.9)$$

$$R_{ik,2W} = c_{R2,W} [R_{nn,2} \delta_{ik} - \frac{3}{2}(R_{ni,2} \delta_{nk} + R_{nk,2} \delta_{ni})] f_1(L/x_n), \quad (7.10)$$

где n определяет направление нормали к стенке, $c_{R1,W}$ и $c_{R2,W}$ - постоянные.

В (7.9) и (7.10) функция $f_1(L/x_n)$ введена для того, чтобы учесть уменьшение влияния стенки с возрастанием x_n . В [6,28] для $f_1(L/x_n)$ использована линейная зависимость от x_n вида

$$f_1(L/x_n) = k^{3/2}/(c_W \varepsilon x_n), \quad (7.11)$$

где c_W - постоянная, значение которой подбирается так, чтобы $f_1 \rightarrow 1$ вблизи стенки, когда $x_n \rightarrow 0$ и $f_1 \rightarrow 0$ вдали от стенки при $x_n \rightarrow \infty$ (в работе [4] $c_W \sim 2$).

Следует отметить, что член перераспределения R_{ik} в уравнении для реynoльд-совых напряжений является одним из наиболее неопределенных, так как измерить его непосредственную величину экспериментально не представляется возможным. Поэтому предложения, касающиеся моделирования R_{ik} , весьма многочисленны.

7.2. Модельная форма записи уравнений для реynoльдсовых напряжений. Постоянные многопараметрической модели

Одной из наиболее общих форм записи уравнения (1.15а) для реynoльдсовых напряжений является форма, полученная с учетом моделирования D_{ik} , R_{ik} и ε_{ik} с помощью зависимостей (7.3), (7.5), (7.7-7.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j} &= \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j^2} + \\ &+ c'_s \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u'_l u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} + \overline{u'_l u'_i} \frac{\partial \overline{u'_j u'_k}}{\partial x_l} + \overline{u'_l u'_j} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_l} \right) \right] + \\ &+ P_{ik} - c_{R1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_i u'_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} k \right) + \\ &+ c_{R1,W} \frac{\varepsilon}{k} \left[\overline{u_n'^2} \delta_{ik} - \frac{3}{2} \left(\overline{u'_n u'_i} \delta_{nk} + \overline{u'_n u'_k} \delta_{ni} \right) \right] f_1 + R_{ik,2} + \\ &+ c_{R2,W} \left[R_{nn,2} \delta_{ik} - \frac{3}{2} \left(R_{ni,2} \delta_{nk} + R_{nk,2} \delta_{ni} \right) \right] f_1 - \\ &- \frac{2\varepsilon}{3k} \left[(1 - f_s) k \delta_{ik} + \frac{3}{2} \overline{u'_i u'_k} f_s \right], \end{aligned} \quad (7.12)$$

где $P_{ik} = - \left(\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)$,

$$\begin{aligned} R_{ik,2} &= - \frac{c_{R2} + 8}{11} \left(P_{ik} - \frac{2}{3} \delta_{ik} P \right) - \frac{30c_{R2} - 2}{55} k \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} \right) - \\ &- \frac{8c_{R2} - 2}{11} \left(P_{ik}^* - \frac{2}{3} \delta_{ik} P \right), \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{2} P_{ii} = - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}, \quad P_{ik}^* = - \left(\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} \right).$$

Постоянные, входящие в уравнение (7.12) или другую его форму, построенную с учетом зависимостей (7.4) и (7.8а), обычно принимаются равными: $c_s = 0.22$ ($c'_s = 0.11$), $c_{R1} = 1.5$, $c_{R2} = 0.4$ ($c'_{R2} = 0.6$), $c_{R1,W} = 0.5$, $c_{R2,W} = 0.3$ (см., например, [16]). Имеются работы, в которых постоянные несколько отличаются по величине от указанных. Наиболее противоречивыми кажутся сведения о постоянной c_{R1} в линейной зависимости (7.7). По данным [6], значение c_{R1} находится в диапазоне между 1.5 и 2.2; известны работы, в которых этот диапазон расширен и доведен до предельных значений 1.3 и 2.6. Также имеются отличия в значениях постоянной c_s , рекомендуемых в различных работах. По данным [6], $c_s = 0.25$, в отличие от обычно используемого значения $c_s = 0.22$.

В уравнении (7.12) также присутствуют две эмпирические функции f_1 и f_s . Функция f_1 может быть определена из (7.11), при этом постоянная c_W принимается равной 2. Что касается f_s , то данные о ней весьма немногочисленны. Так, в [27] приведена зависимость $f_s(Re_t)$, где $Re_t = k^2/(\nu\varepsilon)$, вида

$$f_s = 1/(1 + a_s Re_t), \quad (7.13)$$

где a_s - постоянная ($a_s = 0.1$).

Наиболее простой формой уравнения для рейнольдсовых напряжений, которая справедлива при высоких значениях Re_t , является форма, при построении которой использованы зависимости (7.2), (7.4), (7.7) и (7.8а). В связи с применением последней зависимости следует сказать, что хотя предпочтительней с физической точки зрения использование (7.8), в результате численного эксперимента установлено, что зависимость (7.8а) также дает в равной мере удовлетворительные результаты. Полагая при этом функции f_1 и f_s равными нулю ($Re_t \rightarrow \infty$), уравнение (7.12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j^2} + c'_s \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_l} \right) + \\ + P_{ik} - c_{R1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_i u'_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} k \right) - c'_{R2} \left(P_{ik} - \frac{2}{3} \delta_{ik} P \right) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \varepsilon. \end{aligned} \quad (7.12a)$$

Отметим, что в уравнении (7.12а) часто пренебрегают диффузией, обусловленной молекулярной вязкостью (первый член в правой части). Также отметим, что набор постоянных в (7.12а) включает только три коэффициента: c_s , c_{R1} и c'_{R2} .

7.3. Замыкание уравнений для рейнольдсовых напряжений

Вне зависимости от формы записи уравнения для рейнольдсовых напряжений, неизвестной величиной в (7.12) или (7.12а) является скорость диссипации энергии пульсаций ε . Для ее определения используют либо эмпирические соотношения типа $\varepsilon = c_D k^{3/2} / L$, либо такое же дифференциальное уравнение, как построенное ранее для двухпараметрической диссипативной модели турбулентности. В первом случае для течений вблизи стенки

$$\varepsilon = c_D k^{3/2} / L = c_D k^2 c_\mu / \nu_t = c_D c_\mu k^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) / \left(- \overline{u'_j u'_i} \right), \quad (7.14)$$

где $c_\mu = 1$, $c_D = 0.09$.

В упрощенном виде зависимость (7.14) записывается так:

$$\varepsilon = c_D c_\mu k^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} / \left(- \overline{u'v'} \right), \quad (7.14a)$$

где y - координата, нормальная к стенке, u , v - составляющие скорости в направлении вдоль стенки и по нормали к ней.

Вне пристеночного слоя масштаб турбулентности L в выражении для ε (7.14) задается эмпирически, поэтому в моделях турбулентности, использующих уравнения для рейнольдсовых напряжений, более распространен подход, согласно которому скорость диссипации полагается приближенно равной изотропной диссипации ε_s ($Re_t \rightarrow \infty$) и определяется из соответствующего уравнения. При этом моделирование диффузионного члена в уравнении для ε осуществляется с помощью зависимостей (6.5) или (6.5а), что, в принципе, дает один и тот же результат, ввиду предположения о роли члена, определяющего диффузию диссипации из-за пульсаций давления. Таким образом, уравнение для ε имеет вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = c_{\varepsilon 4} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u'_j u'_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] - c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_i u'_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (7.15)$$

Это одна из наиболее употребительных форм записи уравнения для ε в моделях турбулентности с дифференциальными уравнениями для рейнольдсовых напряжений (здесь пренебрегли членом диффузии диссипации из-за молекулярной вязкости и членом, определяющим анизотропию турбулентности в члене диссипации диссипации). Постоянная $c_{\varepsilon 4}$ в (7.15) в большинстве работ принимается равной 0.15, хотя известны работы, в которых $c_{\varepsilon 4} = 0.25$ [6,16]. Прочие постоянные, как в

двухпараметрической диссипативной модели турбулентности, равны: $c_{\varepsilon 1} = 1.44$, $c_{\varepsilon 2} = 1.92$ [6].

При малых величинах Re_t уравнение для ε модифицируется аналогично тому, как это было сделано в двухпараметрической диссипативной модели турбулентности. В этом случае член генерации диссипации в осредненном движении полагается равным [27]:

$$- 2\nu \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_k}} = c_{\varepsilon 5} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_l} \left(\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) \left(\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_k \partial x_l} \right),$$

где $c_{\varepsilon 5}$ — постоянная, имеющая порядок 2.

Также вводится коррекция постоянной $c_{\varepsilon 5}$ за счет функции $f_{\varepsilon 2}(Re_t)$ [27]:

$$f_{\varepsilon 2} = 1 - 0.22 \exp(-0.028 Re_t).$$

При этом член, описывающий диссипацию совместно с членом $P_{\varepsilon 3}$ в выражении для генерации диссипации, представляется в виде

$$c_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\hat{\varepsilon} \varepsilon}{k} = c_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} \left[\varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{k} \right)^2 \right].$$

Уравнение для ε с учетом сделанных преобразований принимает форму, пригодную для малых ($Re_t \rightarrow 0$) и больших ($Re_t \rightarrow \infty$) значений турбулентного числа Рейнольдса (здесь учтен член диффузии из-за молекулярной вязкости):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} + c_{\varepsilon 4} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u'_j u'_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] - c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_i u'_j} \right) \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \\ & - c_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\hat{\varepsilon} \varepsilon}{k} + c_{\varepsilon 5} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_l} \left(\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) \left(\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_k \partial x_l} \right), \end{aligned} \quad (7.156)$$

где $\hat{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu (\partial \sqrt{k} / \partial x_j)^2$, $c_{\varepsilon 5} = 2$ (прочие постоянные сохраняют свои значения неизменными).

Следует отметить, что в значительной мере сложность многопараметрических моделей турбулентности вызвана трудностью учета влияния стенки при расчете пристеночных течений. В работе [27] указывается, что пристеночные функции $R_{ik,1W}$ и $R_{ik,2W}$ члена перераспределения рейнольдсовых напряжений вызывают почти 30%-ный перенос энергии от составляющей, нормальной к стенке ($\overline{u_2'^2}$), к составляющей, параллельной стенке ($\overline{u_1'^2}$). Влияние их на касательную составляющую $\overline{u_1' u_2'}$ значительно слабее (оно проявляется косвенно посредством $\overline{u_1'^2}$ и $\overline{u_2'^2}$ в уравнении для $\overline{u_1' u_2'}$). Так как именно $\overline{u_1' u_2'}$ определяет поле осредненной скорости в пристеночной области, в [27] сделано предположение о возможности исключения из анализа функций $R_{ik,1W}$ и $R_{ik,2W}$ с компенсацией их влияния в рамках рассматриваемой модели за счет изменения постоянных модели. Вместо постоянной c_{R1} в выражении (7.7) для $R_{ik,1}$ и постоянных $(c_{R2} + 8)/11$, $(8c_{R2} - 2)/11$ и $(30c_{R2} - 2)/55$ в выражении (7.8) используются функциональные зависимости от расстояния до стенки:

$$\begin{aligned} R_{ik} = R_{ik,1} + R_{ik,2} = & - c_{R1}^* \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_i u'_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} k \right) - \alpha \left(P_{ik} - \frac{2}{3} \delta_{ik} P \right) - \\ & - \beta \left(P_{ik}^* - \frac{2}{3} \delta_{ik} P \right) - \gamma \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \right) k, \end{aligned} \quad (7.16)$$

где $c_{R1}^* = c_{R1} - 0.5f_2$, $\alpha = (c_{R2} + 8)/11 - 0.06f_2$,
 $\beta = 8(c_{R2} - 2)/11 + 0.06f_2$, $\gamma = (30c_{R2} - 2)/55$, $c_{R1} = 1.5$, $c_{R2} = 0.4$,
 f_2 - функция безразмерного расстояния от стенки ($f_2 \rightarrow 1$ в пристеночной области
и $f_2 \rightarrow 0$ вдали от стенки).

Отметим, что зависимости для c_{R1}^* , α , β и γ получены исходя из требования, чтобы при $f_2 = 0$ модель давала правильные значения реynoльдсовых напряжений для почти однородной турбулентности в течениях со сдвигом, а при $f_2 = 1$ - соответствующие величины реynoльдсовых напряжений для пристеночных течений. В [28] принято, что $f_2 = L/x_n$, где L - масштаб турбулентности, n - направление по нормали от стенки. Следует отметить, что вместо линейного закона изменения f_2 иногда предлагается использовать квадратичный закон $f_2 = (L/x_n)^2$. Масштаб турбулентности может быть рассчитан по формуле $L = c_\mu^{3/4} k^{3/2} / (\kappa \varepsilon)$, где κ - постоянная Кармана (0.42), здесь при $c_\mu = 0.09$ $f_2 \rightarrow 1$ в пристеночной области, где справедлив логарифмический закон стенки для продольной составляющей скорости и турбулентность по состоянию близка к локально равновесной.

Использование данного подхода позволяет существенно упростить форму записи уравнения для реynoльдсовых напряжений. Последнее в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j} = c_s \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{k}{\varepsilon} (\overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_l}) \right] + P_{ik} - \\ - c_{R1}^* \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u'_i u'_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} k) - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{k} [(1 - f_s) k \delta_{ij} + \frac{3}{2} \overline{u'_i u'_k} f_s] - \\ - \alpha (P_{ik} - \frac{2}{3} \delta_{ik} P) - \beta (P_{ik}^* - \frac{2}{3} \delta_{ik} P) - \gamma (\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i}) k + \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j^2}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\text{где } P_{ik} = - (\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}), \quad P = \frac{1}{2} P_{ii},$$

$$P_{ik}^* = - (\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}).$$

Коэффициенты модели c_{R1}^* , α , β , γ приведены в (7.16); $c_s = 0.22$; функция f_s находится из (7.13).

8. МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С УМЕНЬШЕННЫМ ЧИСЛОМ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕЙНОЛЬДСОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

8.1. Основные способы упрощения моделей турбулентности, использующих уравнения для реynoльдсовых напряжений

Решение исходной системы дифференциальных уравнений для переноса составляющих тензора реynoльдсовых напряжений сопряжено с немалыми вычислительными трудностями и определяет их ограниченную применимость. В немалой степени это связано также с их недостаточной универсальностью.

Известны работы, в которых число уравнений для реynoльдсовых напряжений сокращено за счет предположения о локальном равновесии $\overline{u'_i u'_k}$ в поле течения и

о том, что перенос $\overline{u'_i u'_k}$ пропорционален переносу энергии турбулентных пульсаций k .

8.2. Локальное равновесие рейнольдсовых напряжений

Предположение о локальном равновесии рейнольдсовых напряжений существенно упрощает уравнения для $\overline{u'_i u'_k}$ и сводит их к виду

$$R_{ik} + P_{ik} - \varepsilon_{ik} = 0. \quad (8.1)$$

Полагая $f_s = 0$ и исключая из рассмотрения составляющие члена перераспределения $R_{ik,1W}$ и $R_{ik,2W}$ - см. зависимости (7.9) и (7.10), уравнение (8.1) перепишем так:

$$R_{ik,1} + R_{ik,2} - \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{u'_j u'_i \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \varepsilon = 0, \quad (8.1a)$$

где $R_{ik} = R_{ik,1} + R_{ik,2}$ находится из (7.16) для учета возможного влияния стенки на результаты расчета пристеночных течений.

Такой подход дает возможность не решать дифференциальные уравнения для рейнольдсовых напряжений (они упрощены до алгебраической формы), а использовать их в качестве корректирующих соотношений, позволяющих снять некоторые ограничения, присущие более простым моделям. Как отмечено в [6], такие ограничения, главным образом, относятся к допущению об изотропности коэффициента турбулентной вязкости в моделях вплоть до двухпараметрических. Следует отметить, что предположение об изотропности ν_t , исключаящееся при таком подходе, заменяется предположением о локальном равновесии $\overline{u'_i u'_k}$, достоверность которого вполне очевидна для значительного числа течений, представляющих практический интерес.

8.3. Пропорциональность переноса составляющих рейнольдсовых напряжений и энергии турбулентных пульсаций

Более общим, по сравнению со случаем локального равновесия, представляется предположение [6] о пропорциональности переноса рейнольдсовых напряжений $\overline{u'_i u'_k}$ и энергии турбулентных пульсаций k . Оно означает, что изменение отношения $\overline{u'_i u'_k} / k$ значительно менее выражено, нежели изменение k , что в действительности имеет место в различных течениях (исключение, по-видимому, составляет область вблизи оси или плоскости симметрии для таких течений, как струи, следы, а также для течений в каналах). В отличие от предположения о локальном равновесии $\overline{u'_i u'_k}$, в данном случае конвекцией и диффузией $\overline{u'_i u'_k}$ не пренебрегают, а связывают их с конвекцией и диффузией k :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_k} + \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i u'_k} - \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ik} = \frac{\overline{u'_i u'_k}}{k} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j \frac{\partial k}{\partial x_j}} - \frac{\partial}{\partial x_j} D \right). \quad (8.2)$$

Уравнение (8.2) с учетом соответствующих уравнений для $\overline{u'_i u'_k}$ и k может быть переписано в виде

$$(R_{ik} + P_{ik} - \varepsilon_{ik}) = \overline{\frac{u'_i u'_k}{k}}(P - \varepsilon), \quad (8.2a)$$

где P_{ik} и P выражены через искомые рейнольдсовы напряжения; ε_{ik} находится из (7.3), а R_{ik} - из (7.6)-(7.10) или из (7.16), при исключении в последнем случае пристеночных функций $R_{ik,1W}$ и $R_{ik,2W}$. Из (8.2a) следует, что при известных величинах k и ε нахождение рейнольдсовых напряжений сведено, как и в модели, использующей предположение о локальном равновесии $\overline{u'_i u'_k}$, к простым алгебраическим действиям.

Уравнения (8.2a) по виду существенно упрощаются, если для R_{ik} применить зависимость (7.16). Используя в этом случае соотношение (7.2) для ε_{ik} , получим

$$P_{ik} + R_{ik,1} + R_{ik,2} - \frac{2}{3}\varepsilon[(1 - f_s)\delta_{ik} + \frac{3}{2}\overline{\frac{u'_i u'_k}{k}} f_s] = \overline{\frac{u'_i u'_k}{k}}(P - \varepsilon). \quad (8.2б)$$

Из сопоставления (8.2б) с (8.1a) видно, что в модели, предполагающей пропорциональность переноса $\overline{u'_i u'_k}$ и k , правая часть $\overline{\frac{u'_i u'_k}{k}}(P - \varepsilon)$ становится равной нулю, если использовать предположение о локальном равновесии $\overline{u'_i u'_k}(P = \varepsilon)$. Отметим, что коэффициенты модели c_{R1}^* , α , β и γ определены в (7.16) с целью учета влияния стенки при расчете пристеночных течений. Если для $R_{ik,2}$ использовать зависимость (7.8a) и принять, что $c_{R1}^* = c_{R1}$, то (8.2б) переписется в виде

$$\overline{\frac{u'_i u'_k}{k}} = \frac{2}{3}\delta_{ik} + (1 - c'_{R2})(P_{ik}/\varepsilon - \frac{2}{3}\delta_{ik}P/\varepsilon)/(c_{R1} + P/\varepsilon - 1 + f_s), \quad (8.2в)$$

где c'_{R2} - постоянная в зависимости (7.8a).

Формально решение задачи о турбулентном течении при использовании упрощенной модели турбулентности с алгебраическими уравнениями для рейнольдсовых напряжений, независимо от того, использовано предположение о пропорциональности $\overline{u'_i u'_k}$ и k или предположение о локальном равновесии $\overline{u'_i u'_k}$ (в последнем случае $P/\varepsilon = 1$), не отличается от аналогичного решения в рамках двухпараметрической диссипативной модели турбулентности. Однако при этом полученная модель является более общей, чем стандартная диссипативная модель, в которой турбулентная вязкость полагается изотропной. По числу используемых уравнений данный способ упрощения моделей турбулентности с уравнениями для рейнольдсовых напряжений наиболее оптимален из всех вышерассмотренных. Здесь, так же как и для диссипативной модели турбулентности, общее число уравнений равно шести, включая два уравнения относительно характеристик турбулентности k и ε .

Проанализируем в заключение вопрос о преимуществах значений постоянных диссипативной модели турбулентности и модели с алгебраическими уравнениями для рейнольдсовых напряжений. Рассматривается плоское полностью развитое турбулентное течение в пограничном слое на стенке. Используется уравнение для рейнольдсовых напряжений в форме (8.2в). Для рассматриваемого течения из (8.2в) следует, что ($f_s = 0$):

$$\overline{u'v'}/k = (1 - c'_{R2})P_{12}/[\varepsilon(c_{R1} + P/\varepsilon - 1)],$$

где $P_{12} = -\overline{v'^2}\partial\bar{u}/\partial y$ (в рамках приближения пограничного слоя).

Квадрат пульсационной составляющей скорости $\overline{v'^2}$ также находится из (8.2в):

$$\overline{v'^2}/k = \frac{2}{3} + (1 - c'_{R2})(P_{22}/\varepsilon - \frac{2}{3}P/\varepsilon)/(c_{R1} + P/\varepsilon - 1).$$

Так как $P_{11} + P_{22} + P_{33} = 2P$, где $P \approx -\overline{u'v'}\partial\bar{u}/\partial y$, для рассматриваемого течения значащий член содержится лишь в P_{11} , т.е. приближенно можно принять, что $P_{22} = P_{33} = 0$. Отсюда следует, что [6]

$$-\overline{u'v'} = \frac{2k^2}{3\varepsilon}(1 - c'_{R2})(c_{R1} - 1 + c'_{R2}P/\varepsilon)\partial\bar{u}/\partial y / (c_{R1} - 1 + P/\varepsilon)^2. \quad (8.3)$$

Переходя к обозначениям постоянных в диссипативной модели, из (8.3) получим

$$c_\mu = \frac{2}{3}(1 - c'_{R2})(c_{R1} - 1 + c'_{R2}P/\varepsilon)/(c_{R1} + P/\varepsilon - 1)^2. \quad (8.4)$$

Если воспользоваться гипотезой о локальном равновесии энергии турбулентных пульсаций ($P = \varepsilon$), для значений постоянных $c_{R1} = 1.5$ и $c'_{R2} = 0.6$ получим, что $c_\mu = 0.13$ вместо 0.09 в диссипативной модели. Так как менее достоверные сведения имеются в литературе о выборе значения постоянной c_{R1} , оценим ее исходя из требования получения $c_\mu = 0.09$ при $c'_{R2} = 0.6$. Из (8.4) следует, что $c_{R1} = 2.48$. На факт существенной зависимости c_{R1} от отношения генерации и диссипации энергии турбулентности P/ε обращается внимание в [6]. По данным [20], c_{R1} изменяется от 0.7 до 5.0. В [29] проведено тестирование алгебраической модели рейнольдсовых напряжений AMRN, основанной на гипотезе пропорциональности составляющих тензора рейнольдсовых напряжений и энергии турбулентности, на задаче турбулентного обтекания диска при $Re = 3.5 \times 10^4$. Полученные данные по лобовому и донному сопротивлению диска для различных значений c_{R1} сравниваются между собой и с данными физического эксперимента Кармоди (1964).

Таблица 8.1

Расчет			Эксперимент	
c_{R1}	C_x	C_{xd}	C_x	C_{xd}
1.5	1.181	0.457	1.12	0.39
2.5	1.121	0.390		

На рис.40 показаны распределения скорости на оси симметрии (а) и профили коэффициента давления C_p (б) при обтекании диска турбулентным потоком. Расчет: 1,2 – стандартная и модифицированная ($C_c = 0.1$) $k - \varepsilon$ - модель соответственно; 3 – AMRN ($c_{R1} = 1.5$); 4 – AMRN ($c_{R1} = 2.5$). Эксперимент – 5.

Лучшее согласие для профиля осевой скорости потока в ближнем следе за диском с экспериментальными данными получается при $c_{R1} = 2.5$, хотя и результаты расчета по модифицированной с учетом влияния кривизны линий тока на характеристики турбулентности модели $k - \varepsilon$ тоже близки к экспериментальным.

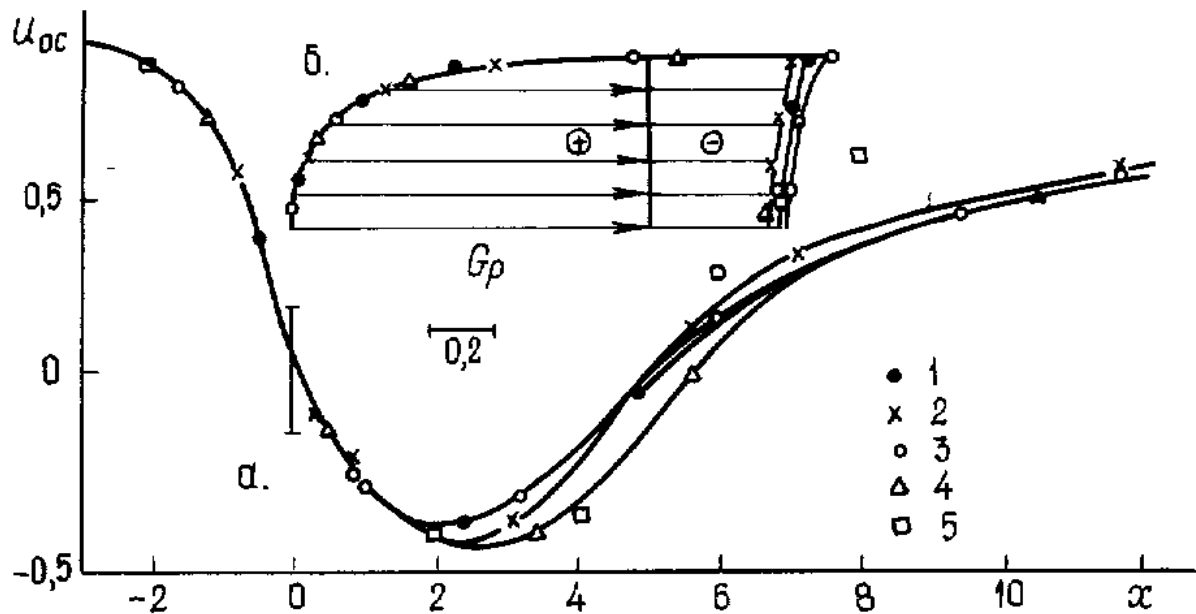


Рис.40

9. НОВЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В предыдущих разделах курса рассматривались приближенные, основанные на концепции осреднения по Рейнольдсу модели турбулентности, широко используемые в инженерных приложениях. Везде подчеркивалось достоинство такого подхода, обладающего при минимальной сложности способностью схватывать физическую суть рассматриваемых процессов.

Однако никаких предпочтений среди моделей, по существу, не было сделано, поскольку не существует «универсальной» модели турбулентности. Нет никаких гарантий в том, что модели в рамках приближения Рейнольдса остаются корректными за пределами калибровочной базы данных. К тому же, очевидно, что указанный подход был предложен его основоположником для интерпретации полностью развитых турбулентных течений, а в дальнейшем лишь скорректирован на случаи переходных процессов. Это свидетельствует о том, что он, так же как и моделирование турбулентности в целом, обладает определенными границами применимости.

Свободными от предположения Рейнольдса представляются два рассматриваемых здесь подхода: а) прямое численное моделирование (DNS), базирующееся на решении уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности; б) моделирование крупных вихрей (LES), в котором используются так называемые модели подсеточного масштаба (SGS) для преодоления вычислительных проблем, связанных с представлением очень мелких вихрей на выбранной расчетной сетке. Следует подчеркнуть, что трактовка излагаемых здесь подходов принадлежит Вилкоксу [5].

9.1. Сравнение способов моделирования на базе спектрального анализа

Важно подчеркнуть, что указанные способы моделирования турбулентности, в отличие от ранее изученного подхода Рейнольдса, должны учитывать физические аспекты турбулентности. В противном случае было бы затруднительно дать оценку степени адекватности численных прогнозов, выделенных как полезный сигнал из фоновой расчетной информации.

Первое, чему здесь уделяется внимание, это минимальные масштабы турбулентности. Ранее, в процессе замыкания модели реинольдсовых напряжений пре-

имущественный интерес проявлялся к динамике крупномасштабных вихрей, ответственных за переносные свойства турбулентных течений. Используя анализ размерности в пренебрежении молекулярной вязкостью, показано, что при замыкании рассматриваются масштабы длины, типичные для энергосодержащих вихрей, в которых число Рейнольдса много больше единицы за исключением пристеночных областей. По этой причине вблизи границ необходимо использование демпфирующих функций, чтобы учесть пристеночное влияние диссипирующих вихрей и даже энергосодержащих вихрей при числах Рейнольдса порядка единицы. Предполагается, что DNS отображает весь диапазон размеров вихрей, в то время как LES представляет наиболее важные (крупные) вихри, причем SGS-модель для мелких вихрей не имеет критического влияния на результаты в целом. В обоих случаях необходимо знать типичные масштабы мельчайших вихрей.

Известно, что наименьшие масштабы турбулентности – это колмогоровские масштабы длины, времени и скорости:

$$\eta \equiv (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}, \quad \tau \equiv (\nu/\varepsilon)^{1/2}, \quad v \equiv (\nu\varepsilon)^{1/4}, \quad (9.1)$$

где ν - кинематическая вязкость, а ε - скорость диссипации. Заметим, что число Рейнольдса $v\eta/\nu$ равно единице, а значит, необходим баланс инерционных и вязких эффектов в мельчайших вихрях.

Рассмотрим связь колмогоровского масштаба длины с масштабом длины, с которым сталкивались в стандартных моделях турбулентности. Масштаб длины l , соответствующий размеру энергосодержащих вихрей и известный как интегральный масштаб длины в статистической теории турбулентности, соотносится с ε , как

$$\eta/l \sim \text{Re}_t^{-3/4}, \quad (9.2)$$

где $\text{Re}_t = k^{1/2}l/\nu$ - турбулентное число Рейнольдса. Так как величины Re_t более 10^4 являются типичными для полностью развитых пограничных слоев и $l \sim 0.1\delta$, где δ - толщина пограничного слоя, то колмогоровский масштаб длины η вне вязкой пристеночной зоны оказывается меньше, чем одна десятитысячная толщины пограничного слоя.

DNS и LES используют другой масштаб длины из статистической теории турбулентности: тейлоровский микромасштаб λ (см. Хинце [1]). Базовое определение

$$\lambda^2 = \frac{\overline{u'^3}}{(\overline{\partial u'/\partial x})^2}. \quad (9.3)$$

Для локально изотропной турбулентности (т.е. турбулентности, в которой малые вихри статистически изотропны, даже если крупные вихри не являются таковыми) точное выражение для скорости диссипации ε приводит к

$$\varepsilon = 15\nu(\overline{\partial u'/\partial x})^2 \equiv 15\nu u'^2 / \lambda^2. \quad (9.4)$$

Другие определения λ можно сконструировать, используя различные составляющие скорости и градиенты в базовом определении, но в локально-изотропной турбулентности они просто соотносятся. Предполагая $k \sim u'^2$, заключаем что

$$\lambda/l \sim \text{Re}_t^{-1/2} \quad \text{или} \quad \lambda \sim (l\eta^2)^{1/3}. \quad (9.5)$$

Таким образом, можно заключить, что для высокорейнольдсовой турбулентности имеется четкое разделение масштабов:

$$\eta \ll \lambda \ll l. \quad (9.6)$$

Сейчас базовое определение показывает, что λ есть композитная характеристика, зависящая от свойств как крупномасштабных, так и мелкомасштабных вихрей. В отличие от l и η , она не может быть идентифицирована любым значащим диапазоном

размеров вихрей. Однако результаты численного моделирования часто характеризуются в терминах микромасштабного числа Рейнольдса, определенного с помощью

$$\text{Re}_\lambda = k^{1/2}\lambda/\nu. \quad (9.7)$$

Подстановка для λ из (9.4) ведет к

$$\text{Re}_\lambda \sim (k^{1/2}L_\varepsilon/\nu)^{1/2}, \quad (9.8)$$

где $L_\varepsilon \equiv k^{3/2}/\varepsilon$ - масштаб длины диссипации, действительно типичный масштаб длины сдвигодержущего движения, используемый неявно во всех двухпараметрических моделях. L_ε одного порядка с l , что следует из уравнения (9.8). Тогда

$$\text{Re}_\lambda \sim \text{Re}_t^{-1/2}. \quad (9.9)$$

Таким образом, хотя λ и не является очень значимым масштабом длины, Re_λ представляется альтернативным числу Рейнольдса для энергосодержащих вихрей. Окончательно время обращения вихря является отношением макромасштабов длины l или L_ε к скорости $k^{1/2}$ и задается с помощью

$$\tau_t \sim l/k^{1/2} \sim L_\varepsilon/k^{1/2}. \quad (9.10)$$

Время обращения вихря измеряется временем, которое требуется вихрю, чтобы провзаимодействовать с окружающей его средой. Как можно видеть из определения L_ε , этот параметр является также обратной величиной скорости удельной диссипации: $\omega \sim \varepsilon/k$.

Второе важное обстоятельство – это спектральное представление турбулентных свойств, которое заменяет идею «размера вихря» (см. введение). Если κ обозначает волновое число, определяемое как $2\pi/\tilde{\lambda}$ ($\tilde{\lambda}$ – длина волны), а $E(\kappa)d\kappa$ – турбулентная кинетическая энергия, содержащаяся между волновыми числами κ и $\kappa + d\kappa$, можно записать

$$k \equiv \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa. \quad (9.11)$$

Вспомним, что k является половиной от суммы диагональных членов автокорреляционного тензора R_{ij} при нулевом времени задержки (6.28). Следовательно, спектральная плотность энергии или спектральная функция энергии $E(\kappa)$ относится к преобразованию Фурье от половины суммы диагональных членов R_{ij} . Вообще спектральное представление рассматривается как разложение по волновым числам κ . В качестве «размера вихря» рассматривается обратная величина κ , причем малые величины κ ассоциируются с размерами крупных вихрей, и наоборот. Конечно, турбулентность не является суперпозицией простых волн; любое определение «вихря», основанное на картине течения, будет охватывать весь диапазон волновых чисел и поэтому приблизительно. Однако определение спектральной плотности и связанный с ним анализ являются точными.

Снова используя анализ размерностей, покажем, что для волновых чисел достаточно малых, чтобы вязкость не оказывала влияние на движение, но достаточно больших, чтобы полная размерность потока, такая как толщина пограничного слоя, не имеет значения:

$$E(\kappa) = C_\kappa \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad 1/l \ll \kappa \ll 1/\eta, \quad (9.12)$$

где C_κ - константа Колмогорова. Это известный закон Колмогорова (-5/3), который характеризует инерционный участок. Рис.41 показывает типичный энергетический спектр для турбулентного течения.

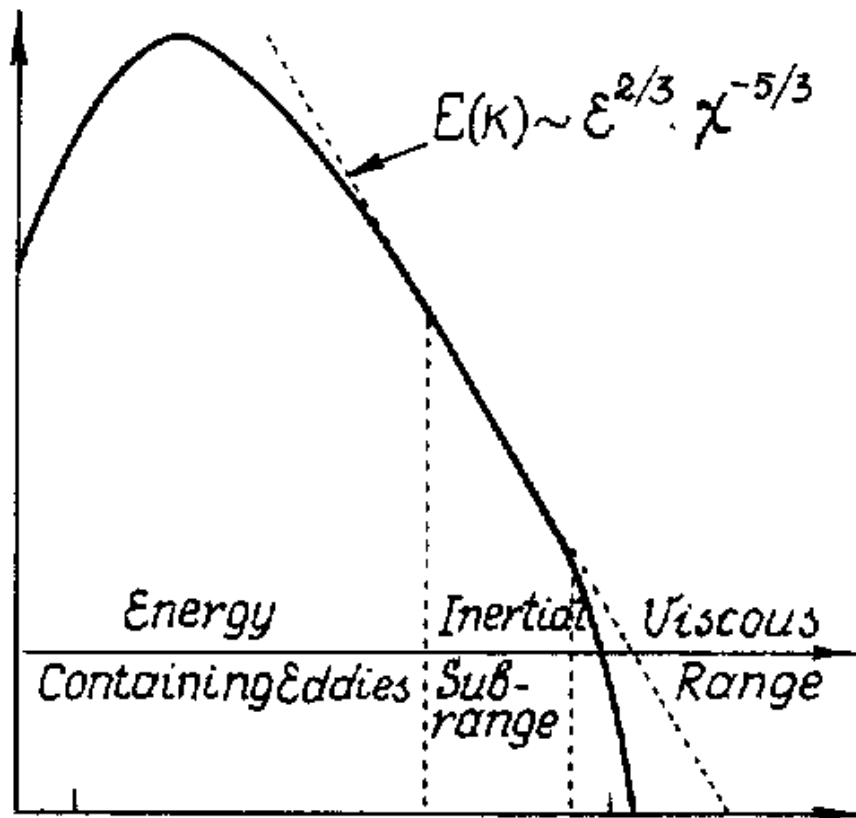


Рис.41

9.2. Прямое численное моделирование

Прямое численное моделирование или DNS означает решение полных нестационарных трехмерных уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности. Ценность такого моделирования очевидна: в принципе, численно аккуратные решения точных уравнений движения суть надлежащее решение проблемы турбулентности. С практической точки зрения, статистика, рассчитанная из результатов DNS, может быть использована для тестирования предлагаемых подходов замыкания в инженерных моделях. На наиболее фундаментальном уровне DNS может быть использовано, чтобы добиться понимания структуры турбулентности и процессов турбулентного переноса, которые могут быть ценными в развитии методов управления турбулентностью (например, снижения сопротивления) или методов предсказания. DNS также может рассматриваться как дополнительный источник экспериментальных данных, принимая во внимание ограниченность измерительной техники. Это особенно полезно при получении информации о существенно неизмеряемых характеристиках, подобных пульсациям давления.

Сделанные комментарии предполагают, что DNS свободен от численной и другой формы ошибок. Это нетривиальное соображение и преимущественные беспоконства в DNS связываются с вычислительной точностью, удовлетворением граничных и начальных условий, а также достижением оптимального использования имеющихся компьютерных ресурсов. В данном разделе указанные вопросы рассматриваются только кратко. Детально на вводном уровне с ними можно познакомиться в обзорной работе Моина-Махеша [30] (1998).

Оценка количества сеточных узлов и временных шагов, необходимых для того, чтобы выполнить точное DNS, показывает сложность проблемы с вычислительной

точки зрения. В качестве примера рассматривается турбулентное течение несжимаемой вязкой жидкости в канале с высотой H . Расчетная область должна быть достаточно протяженной, чтобы вместить наибольшие масштабы турбулентности. В канальном течении вихри удлинены в направлении, параллельном стенкам канала, и известно, что их размер Λ составляет около $2H$. Также, в принципе, сетка должна быть достаточно подробной, чтобы разрешить наименьшие вихри, размеры которых порядка колмогоровского масштаба длины η . Предполагая, что по крайней мере четыре сеточных узла в каждом направлении требуются, чтобы отобразить вихрь (так как необходимо адекватное разрешение производных), оценка общего числа сеточных узлов для равномерной сетки $N_{uniform}$ дает

$$N_{uniform} \approx [4\Lambda/\eta]^3 = [8H(\varepsilon/\nu^3)^{1/4}]^3. \quad (9.13)$$

В канальном течении средняя диссипация оценивается как $\varepsilon \approx 2u_\tau^2 U_m / H$, где U_m - средняя скорость в поперечном сечении канала, а $U_m / u_\tau \approx 20$. Подставляя эти оценки в уравнение (9.13), получаем

$$N_{uniform} \approx (110\text{Re}_\tau)^{9/4}, \quad \text{Re}_\tau = u_\tau H / (2\nu). \quad (9.14)$$

Расточительно использовать равномерные сетки, поскольку есть области, где ε мала и колмогоровский масштаб длины намного больше, чем у стенки, где ε велика. С помощью применения сгущающихся неравномерных сеток с концентрацией узлов в расположении наименьших размеров вихрей численные эксперименты показывают, что фактор 110 в уравнении (9.14) может быть заменен на 3. Таким образом актуальное количество узловых точек, типично используемых в DNS канального потока, составляет:

$$N_{DNS} \approx (3\text{Re}_\tau)^{9/4}. \quad (9.15)$$

Аналогично, временной шаг в расчетах Δt должен иметь такой же порядок, как колмогоровский масштаб времени $\tau = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$. На основании результатов расчетов Кима-Моина-Мозера (1987) временной шаг должен быть равен:

$$\Delta t \approx 0.003H / (\sqrt{\text{Re}_\tau} u_\tau). \quad (9.16)$$

Чтобы оценить, насколько препятствующими являются эти ограничения, рассматриваются эксперименты по канальному течению, сделанные Лауфером (1951) при числах Рейнольдса 12300, 30800 и 61600, и эксперимент Конт-Белло (1963) при числе Рейнольдса 230000. В табл. 9.1 приводится количество сеточных узлов и временных шагов, требующихся для выполнения DNS в предположении, что время, необходимое для достижения статически стационарного состояния, равно $100H/U_m \approx 5H/u_\tau$. Ясно, что ограничения по компьютерной памяти делают все расчеты DNS нереализуемыми, за исключением наименьших чисел Рейнольдса, рассматриваемых Лауфером. Развитие параллельных машин уменьшает процессорное время, но память еще остается проблемой, как во время расчета, так и в последующее архивирование полей «сырых» данных в выбранные временные шаги.

Таблица 9.1

Re_H	Re_τ	N_{DNS}	$DNStimestep$	N_{LES}
12300	360	6.7×10^6	32000	6.1×10^5
30800	800	4.0×10^7	47000	3.0×10^6
61600	1450	1.5×10^8	63000	1.0×10^7
230000	4650	2.1×10^9	114000	1.0×10^8

Расчеты Кима-Моина-Мозера (1987) дали пример ресурсов компьютера, требуемых для DNS геометрически простейшего случая канального течения. Чтобы продемонстрировать сеточную сходимость их методов, они рассчитали канальное течение с $Re_\tau = 180$, соответствующим $Re_H \approx 6000$, используя сетки с 2×10^6 и 4×10^6 узлами. Для подробной сетки процессорное время (CPU) на Cray X/MP суперкомпьютере (около 1/4 времени современного персонального компьютера) составляло 40с на временной шаг. Расчеты проводились в течение общего времени $5H/u_\tau$ и заняли 250 CPU часов.

Как второго, так и четвертого порядка аппроксимации расчетные алгоритмы использованы в DNS исследованиях, чтобы продвинуть решение во времени. Два обстоятельства касаются численной трактовки пространственных направлений. Первое достигается точным представлением производных, особенно на мельчайших масштабах (или, эквивалентно, для наивысших волновых чисел). Спектральные методы – ряды Фурье в пространственных направлениях – могут использоваться, чтобы гарантировать точный расчет производных. Конечно-разностные методы обычно недооценивают производные поля заданной скорости, приводя к неточностям в мельчайших (диссипирующих) масштабах. Диссипация как таковая устанавливается скоростью переноса энергии от крупных вихрей, так что недооцененные производные компенсируются с помощью избыточной спектральной плотности при наибольших волновых числах, чтобы достигнуть правильной величины диссипации. Это есть так называемая «численная диссипация».

Таким образом, первое обстоятельство состоит в демонстрации сеточной сходимости DNS, чтобы верифицировать энергетический спектр $E(\kappa)$, показывая быстрый распад вблизи колмогоровского масштаба длины η .

Второе обстоятельство заключается в том, чтобы избежать явления, известного как совмещенность. Оно имеет место, когда нелинейные взаимодействия среди разрешенных волновых чисел продуцируют волны с волновыми числами, большими чем κ_{max} , которые могут интерпретироваться численно. Если специальные предосторожности не будут приняты, это может результироваться в ложном переносе энергии к малым волновым числам [Ферзигер(1976)].

Спектральные методы более точны для расчета производных при мельчайших масштабах, но трудны в использовании на произвольно неравномерных сетках. Поскольку для распространения DNS и LES на более реалистические геометрии необходимы более сложные сетки, существует тенденция к применению конечно-разностных методов, имеющих более высокий порядок точности, чем спектральные методы. В последние годы отмечается интерес к неструктурированным сеткам для описания сложных геометрий, однако это в свою очередь вносит существенный вклад в затраты памяти и процессорного времени.

DNS быстро прогрессирует начиная с 80-х годов, хотя достижимые расчетные числа Рейнольдса пока еще остаются слишком низкими, чтобы интересовать инженеров. К настоящему времени получены данные DNS для ряда двумерных и трехмерных течений, в том числе с отрывом потока, и список приложений продолжает расти.

9.3. Моделирование крупных вихрей

Моделирование крупных вихрей, или сокращенно LES, означает моделирование, в котором крупные вихри рассчитываются, а мельчайшие вихри подсеточного масштаба (SGS) моделируются. Основной предпосылкой такого подхода является то, что наибольшие вихри, которые находятся под прямым воздействием граничных условий, несут максимум рейнольдсовых напряжений и должны быть рассчитаны.

Мелкомасштабная турбулентность является слабой, содержащей меньше рейнольдсовых напряжений, и поэтому представляется менее критичной. Также она близка к изотропной и имеет близкие к универсальным характеристики. Поэтому она в большей мере поддается моделированию. Недавние обзоры по LES для течений различных типов, в том числе с отрывом потока, выполнены Ферзигером (1996), Лезьером (1996), Роди (1997, 1998).

Поскольку LES включает моделирование мельчайших вихрей, заданные подробнейшие расчетные сетки могут быть намного больше, чем колмогоровская длина, а временные шаги могут быть выбраны много большими, чем они возможны в DNS. Следовательно, при фиксированной расчетной памяти возможно достижение более высоких чисел Рейнольдса на основе LES в противовес DNS. В табл. 9.1 сравниваются требования по расчетным сеткам для LES и DNS. В качестве реального примера сложных течений проведено сравнение расчетов отрывного течения за обращенной назад ступенькой с помощью DNS (Ли-Моин-Ким(1997)) и LES (Акселвол-Моин(1993)) при низком числе Рейнольдса 5100, основанном на высоте ступеньки. LES потребовал лишь 3% количества расчетных узлов для DNS и затратил 2% процессорного времени от DNS; согласие с экспериментальными данными одинаково хорошее.

Следует отметить, что сформулированные вычислительные требования для DNS равно относятся и к LES. Первичной проблемой остается определение производных для разрешения мельчайших масштабов (высоких волновых чисел). Конечное испытание сеточной сходимости представляет требование, согласно которому чрезмерная энергия не должна скапливаться в мельчайших масштабах. Второе требование, касающееся скорости диссипации, не столь существенно для LES. Главная трудность в моделировании крупных вихрей состоит в том, что вблизи стенки все вихри малы до такой степени, что размеры энергосодержащих и диссипирующих вихрей перекрываются. Если первые вихри требуют LES для разрешения диапазона сдвигодержащих вихрей, то сеточные и временные шаги, требуемые для LES, вблизи стенки постепенно падают до величин, характерных для DNS. Это, конечно, создает серьезные ограничения по числу Рейнольдса для LES, и здесь будут рассмотрены некоторые пути по их преодолению.

А. Фильтрация

Чтобы понять коренное различие между DNS и LES, необходимо рассмотреть концепцию фильтрации. Заметим, что величины параметров потока в дискретных точках при численном моделировании представляют собой осредненные величины. Чтобы увидеть это явным образом, рассмотрим центрально-разностную аппроксимацию первой производной непрерывной переменной $u(x)$ на сетке с точками, расположенными с шагом h . Можно записать ее как следующее выражение:

$$[u(x+h) - u(x-h)]/(2h) = d/dx [1/(2h) \int_{x-h}^{x+h} u(\xi) d\xi]. \quad (9.17)$$

Таким образом, центрально-разностная аппроксимация может рассматриваться в качестве оператора, фильтрующего масштабы, меньшие чем шаг сетки. Кроме того, аппроксимация дает производную осредненной величины $u(x)$.

Существуют различные виды фильтров, которые могут быть использованы. Простейший тип - это осредненный по объему коробочный фильтр, предложенный Дирдорфом (1970), одним из пионеров LES:

$$\bar{u}_i(\vec{x}, t) = \frac{1}{\Delta^3} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \int_{y-\Delta y/2}^{y+\Delta y/2} \int_{z-\Delta z/2}^{z+\Delta z/2} u_i(\vec{\xi}, t) d\xi d\eta d\zeta. \quad (9.18)$$

Величина \bar{u}_i обозначает фильтрованную скорость разрешенного масштаба. Скорость подсеточного масштаба (SGS) u'_i и ширина фильтра Δ задаются как

$$u'_i = u_i - \bar{u}_i \quad \text{и} \quad \Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}. \quad (9.19)$$

Леонард (1974) определил обобщенный фильтр как интеграл свертки:

$$\bar{u}_i(\vec{x}, t) = \int \int \int G(\vec{x} - \vec{\xi}; \Delta) u_i(\vec{\xi}, t) d^3 \vec{\xi}. \quad (9.20)$$

Фильтрующая функция G нормализуется с помощью требования

$$\int \int \int G(\vec{x} - \vec{\xi}; \Delta) d^3 \vec{\xi} = 1. \quad (9.21)$$

В терминах фильтрующей функции осредненный по объему коробочный фильтр в уравнении (9.18) определяется как

$$G(\vec{x} - \vec{\xi}; \Delta) = \begin{cases} 1/\Delta^3, & |x_i - \xi_i| < \Delta x_i/2 \\ 0, & |x_i - \xi_i| > \Delta x_i/2 \end{cases} \quad (9.22)$$

Преобразование Фурье уравнения (9.20) есть $\bar{U}_i(\kappa, t) = g(\kappa) U_i(\kappa, t)$, где U_i и g представляют преобразования Фурье u_i и G . Спектральные фурье - методы неявно фильтруют с

$$g(\kappa; \Delta) = 0 \quad \text{для} \quad |\kappa| > \kappa_{max} = 2\pi/\Delta. \quad (9.23)$$

Так, Орзаг и др. (см. Ферзигера (1976)) использовал сокращенный фурье фильтр:

$$G(\vec{x} - \vec{\xi}; \Delta) = \frac{1}{\Delta^3} \prod_{i=1}^3 \frac{\sin(x_i - \xi_i)/\Delta}{(x_i - \xi_i)/\Delta}. \quad (9.24)$$

Фильтр Гаусса (Ферзигер(1976)) популярен в LES исследованиях и определяется как

$$G(\vec{x} - \vec{\xi}; \Delta) = \left(\frac{6}{\pi \Delta^2}\right)^{3/2} \exp\left(-6 \frac{|\vec{x}_i - \vec{\xi}_i|^2}{\Delta^2}\right). \quad (9.25)$$

Многие другие фильтры предложены и применяются, причем некоторые из них не являются изотропными или гомогенными. Во всех случаях, однако, фильтр вводит масштаб Δ , который представляет наименьший масштаб турбулентности, допустимый фильтром.

Фильтр дает формальное определение процесса осреднения и отделяет способные к разрешению масштабы от подсеточных. Фильтрация используется, чтобы вывести уравнения для разрешимых масштабов. Для течения несжимаемой жидкости уравнения неразрывности и Навье-Стокса принимают следующую форму:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (9.26)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (9.27)$$

Здесь конвективные потоки задаются с помощью

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}, \quad (9.28)$$

где

$$L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, \quad C_{ij} = \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{\bar{u}_j u'_i}, \quad R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}. \quad (9.29)$$

Заметим, что за исключением сокращенного фурье-фильтра (9.24) фильтрация отличается от стандартного осреднения в одном важном аспекте:

$$\overline{\bar{u}_i} \neq \bar{u}_i, \quad (9.30)$$

т.е. двойное осреднение дает результат отличный от одинарного. Тензоры L_{ij} , C_{ij} и R_{ij} называются соответственно напряжениями Леонарда, перекрестными напряжениями и SGS-рейнольдсовыми напряжениями.

Леонард (1974) показал, что член напряжений Леонарда удаляет значительную энергию из разрешимых масштабов. Он может быть рассчитан непосредственно и не требует моделирования. Иногда это неудобно, однако, в зависимости от использованного численного метода. Леонард также продемонстрировал, что, поскольку \bar{u}_i - гладкая функция, L_{ij} может быть рассчитан в терминах разложения его в ряды Тейлора, первый член которого

$$L_{ij} \approx \frac{\gamma_l}{2} \nabla^2 (\bar{u}_i \bar{u}_j), \quad \gamma_l = \int \int \int |\vec{\xi}|^2 G(\vec{\xi}) d^3 \bar{\xi}. \quad (9.31)$$

Кларк и др.(1979) определили, что это представление очень точно при низких числах Рейнольдса в сравнении с результатами DNS. Однако, как показано Шананом, Ферзигером и Рейнольдсом (1975), леонардовские напряжения того же порядка, что и ошибка отбрасывания при использовании конечно-разностной схемы второго порядка точности и они, таким образом, неявно представляются.

Тензор напряжений перекрестных членов C_{ij} также забирает значительную энергию из разрешимых масштабов. Разложение, подобное (9.31), может быть выполнено для C_{ij} . Однако наибольшие усилия при моделировании прилагаются к сумме C_{ij} и R_{ij} . Ясно, что точность LES зависит во многом от модели, используемой для указанных членов.

Уравнение (9.27) может быть переписано в обычную форму:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \tau_{ij} \right], \quad (9.32)$$

где

$$\tau_{ij} = - \left(Q_{ij} - \frac{1}{3} Q_{kk} \delta_{ij} \right), \quad P = \bar{p} + \frac{1}{3} \rho Q_{kk} \delta_{ij}, \quad Q_{ij} = R_{ij} + C_{ij}. \quad (9.33)$$

В этом месте становится очевидной фундаментальная проблема моделирования крупных вихрей. Необходимо установить удовлетворительную модель для SGS напряжений, которые представлены тензором Q_{ij} . Различные попытки развить такую модель предпринимаются на протяжении последних четырех десятилетий. Так, первые модели постулировались в диапазоне от простых градиентно-диффузионных (Смагоринский (1963)) к моделям с одним уравнением (Лилли(1966)) и к аналогам моделей замыкания второго порядка (Дирдорф(1973)). Нелинейные соотношения между скоростями напряжений и деформаций постулировались Бардиной, Ферзигером и Рейнольдсом (1983).

Б. Моделирование подсеточного масштаба (SGS)

Смагоринский (1963) первым постулировал модель для SGS-напряжений. Предполагается, что SGS-напряжения подчиняются градиентно-диффузионным процессам, подобным молекулярному движению. Следовательно,

$$\tau_{ij} = 2\nu_t S_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (9.34)$$

где S_{ij} называется разрешимой скоростью деформаций, ν_t - вихревая вязкость Смагоринского

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \quad (9.35)$$

и C_s - коэффициент Смагоринского. Заметим, что уравнение (9.35) близко по форме к формуле для вихревой вязкости с длиной смешения $C_s \Delta$. Очевидно, что масштаб сетки Δ или $(\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{1/3}$, если шаги сетки в трех направлениях различны, является общим масштабом SGS движения. Принимая во внимание уменьшение под-

сеточной длины в окрестности стенки, Δ умножается на демпфирующую функцию Ван-Дрифта:

$$f = 1 - \exp(-y^+/25).$$

Физическое предположение о том, что вихри ведут себя, как молекулы, просто несправедливо. Тем не менее, так же как была калибрована модель пути смещения, может быть выбран коэффициент Смагоринского C_s . Его величина варьируется от течения к течению и от места к месту в пределах течения. В начальный период развития LES, когда модель Смагоринского широко использовалась, C_s варьировался, чтобы получить наилучшие результаты для каждого течения, при этом диапазон его изменения был определен как [0.1 – 0.24]. Как правило, в расчетах используется значение 0.1. В принципе, предположение о непостоянстве коэффициента C_s в окрестности стенки представляется целесообразным (следовало бы выбрать его как функцию Δ/y), однако пользователи базовой модели сохраняли C_s постоянным во всем поле течения.

Есть две ключевые причины, почему базовая модель Смагоринского имела некоторый успех. Первая заключается в том, что модель дает значительную диффузию и диссипацию, чтобы стабилизировать численные расчеты, вторая в том, что низкого порядка статистика больших вихрей обычно нечувствительна к SGS движению.

В попытке затронуть некоторые представления о динамике подсеточных масштабов Лилли (1966) постулировал, что

$$\nu_t = C_L \Delta q, \quad (9.36)$$

где q^2 - SGS-кинетическая энергия, а C_L - коэффициент замыкания. Здесь анизотропия напряжений подсеточного масштаба зависит от знака разрешенной скорости деформации в большей степени, нежели от ее величины, как в формуле Смагоринского. Уравнение для q^2 может быть выведено из уравнения Навье-Стокса, включающего несколько членов, которые должны быть смоделированы. Эта модель очень похожа на модель Прандтля с одним уравнением, как по идее, так и по полученным результатам. Как отмечается Шуманом (1975), который использовал эту модель, затруднительно получить существенные улучшения с ее помощью по сравнению с моделью Смагоринского.

Германо и др. (1991) предложили модель, известную под названием динамической SGS модели. Их формулировка начинается с приближения вихревой вязкости Смагоринского. Однако, прежде чем зафиксировать величину C_s априори, они позволяют ей быть рассчитанной в процессе LES. Это выполняется с применением двух фильтров: обычного LES-фильтра при $\kappa = \kappa_{max}$ и тестового фильтра, который проверяет рассчитанные флуктуации между некоторыми более низкими волновыми числами, обычно $\kappa_{max}/2$ и κ_{max} непосредственно. Затем предполагается, что подсеточные напряжения могут быть представлены повторно, разрешая напряжения в полосе тестового фильтра: обычно это делается с помощью оценки коэффициента Смагоринского C_s из разрешенных флуктуаций в полосе тестового фильтра и затем используя тот же самый коэффициент при определении SGS напряжений в той же точке пространства на следующем временном шаге. Такая итерационная процедура может быть строго оправдана на том же основании, что и формула Смагоринского: полоса тестового фильтра должна лежать в инерциальной подобласти и κ_{max} должен быть значительно ниже вязкой области. Т.е. полоса тестового фильтра должна быть шире полосы оригинального аналога ($\bar{\Delta} > \Delta$).

В формулировке динамической модели τ_{ij} выражается как

$$\tau_{ij} - (\delta_{ij}/3)\tau_{kk} = -2C\Delta^2 |S| S_{ij} + L_{ij}^m - (\delta_{ij}/3)L_{kk}^m, \quad (9.37)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера, $|S| = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$ - величина тензора крупномасштабных скоростей деформаций, $L_{ij}^m = \bar{u}_i\bar{u}_j - \bar{\bar{u}}_i\bar{\bar{u}}_j$ - модифицированный тензор напряжений Леонарда, который, как показал Германо, гарантирует галилееву инвариантность.

Коэффициент C определяется из соотношения:

$$C = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij}M_{ij}}{M_{ij}^2}, \quad (9.38)$$

где $L_{ij} = L_{ij}^m - \frac{1}{3}\delta_{ij}L_{kk}^m$, $M_{ij} = \Delta^2(\alpha^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} - \overline{|S| S_{ij}}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}M_{kk}$, $\alpha = \bar{\Delta}/\Delta$ (как правило, равно 2). Следуя Кобаяши и др.(1997), тестовый фильтр реализуется с помощью

$$\bar{f} = f + \frac{\bar{\Delta}^2}{24} \nabla^2 f + O(\bar{\Delta}^4). \quad (9.39)$$

Динамические модели несомненно работают удивительно хорошо в случаях, где строгое обоснование не имеет силы. Джаймез (1995) указал, что существенной стороной SGS-моделей является способность диссипировать кинетическую энергию каскадным образом. Он также отметил, что концепция динамической модели могла бы использоваться с более реалистичными моделями, нежели модель Смагоринского. Однако ясно, что при любом использовании SGS-модели концепция тестового фильтра подразумевает, что структура турбулентности подобна той, что есть в полосе тестового фильтра, а это не будет иметь места, когда локальное турбулентное число Рейнольдса мало, как, например, у стенки. К сожалению, это наиболее критичная область для SGS-моделей: если LES не коллапсирует в DNS, то SGS-модель должна переносить многое из рейнольдсовых напряжений.

Симптомом неадекватности формулы пути смещения Смагоринского является то, что величина C_s , оцененная в динамической модели из рассчитанного движения в полосе тестового фильтра, сильно колеблется в пространстве и во времени. Специфическая трудность, являющаяся результатом таких колебаний, состоит в том, что вихревая вязкость может стать отрицательной. Последнее означает реализацию переноса энергии от SGS-движения к разрешенным масштабам. В принципе, в нестационарном процессе такой процесс может иметь место. Однако он обычно ведет к вычислительной неустойчивости. Простой рецепт – избежать такого явления – состоит в осреднении C_s , при этом демпфируются высокочастотные гармоники, т.е. на $(n + 1)$ -м временном шаге

$$C_{filtred}^{(n+1)} = (1 - \epsilon)C^m + \epsilon C^{(n+1)}, \quad (9.40)$$

где ϵ - коэффициент нижней релаксации ($\epsilon = 10^{-3}$).

Альтернативный путь может быть связан с моделированием уравнения для SGS-энергии и использованием его для отключения SGS вихревой вязкости, когда SGS-энергия падает до нуля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При чтении курса может складываться впечатление о некоторой незавершенности моделирования турбулентности. Однако, несмотря на недостроенность этого «здания», его выразительные и прекрасные очертания вызывают чувства призна-

тельности архитекторам и строителям, в число которых вошли почти все выдающиеся гидромеханики XX века.

Хотя модели турбулентности пока еще далеки от совершенства, современный индустриальный этап их развития характеризуется резким переходом от фундаментальных разработок к их повсеместному практическому применению.

В задачу данного курса входило не столько составить путеводитель или руководство по моделям турбулентности, сколько показать эволюцию идей, положенных в их основу.

К сожалению, не все первоначальные замыслы удалось реализовать. Так, не получили должного освещения вопросы численной реализации моделирования турбулентных течений, модели двухфазных потоков, течений со свободными границами, горение и др. Можно надеяться, что указанные вопросы будут раскрыты при дальнейшей работе над курсом.

И, наконец, следует подчеркнуть, что курс состоялся исключительно благодаря поддержке и пожеланиям коллег и друзей авторов, в частности, профессоров Г.Ю.Степанова и А.С.Гиневского.

Работа выполнена при поддержке РФФИ по проектам №00-02-81045 и №99-02-16745, а также в рамках проектов А0102 и А0135 ФЦП "Интеграция".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хинце И.О. Турбулентность. Ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963. 680с.
2. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидродинамика. Теория турбулентности. СПб: Гидрометеоздат, 1996. Т.2. 742с.
3. Брэдшоу П. Введение в турбулентность и ее измерение. М.: Мир, 1974. 278с.
4. Белов И.А. Модели турбулентности: Учебное пособие. Л.: ЛМИ, 1986. 100с.
5. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD. 1998. 537p.
6. Методы расчета турбулентных течений /Под ред. В.Колльмана. М.: Мир., 1984. 464с.
7. Гинзбург И.П. Аэрогазодинамика. М.:Высшая школа. 1966. 404с.
8. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 356с.
9. Гарбарук А.В., Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Простая алгебраическая модель турбулентности для расчета турбулентного пограничного слоя с положительным перепадом давления // ТВТ. 1999. №1. С.82-86.
10. Лабусов А.Н. Алгебраические модели турбулентности для некоторых канонических пристенных течений: Автореферат... канд.дисс. СПб: СПбГТУ, 1999. 16с.
11. Гарбарук А.В. Современные полуэмпирические модели турбулентности для пристенных течений: тестирование и сравнительный анализ: Автореферат... канд.дисс. СПб: СПбГТУ, 1999. 16с.
12. Белов И.А. Взаимодействие неравномерных потоков с преградами. Л.: Машиностроение, 1983. 144с.
13. Белов И.А., Исаев С.А., Коновалов В.Н., Митин А.Ю. Моделирование крупномасштабных вихревых структур при турбулентном обтекании затупленных тел сверхзвуковым потоком // Изв.СО АН СССР. Сер.техн.наук. 1987.№15. Вып.4.С.101-107.
14. Рейнольдс А.Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. М.: Энергия. 1979. 408с.
15. Kutler P. A perspective of theoretical and applied computational fluid dynamics// AIAA Paper. 1983. N0037. 14p.
16. Турбулентные сдвиговые течения 2 / Под ред. Л.Дж.Брэдшоу, Ф.Дурста, .Е.Лаундера и др. М.: Машиностроение, 1983. 422с.

17. Lumley J.L., Khajeh-Nouri B. Computational modeling of turbulent transport // *Adv.in Geophys.* N.Y.: Pergamon Press, 1974. V.18A. P.169-193.
18. Lumley J.L., Newman G.R. The return to isotropy of homogeneous turbulence// *J.Fluid Mech.* 1977. V.82. P.161-178.
19. Hanjalic K., Launder B.E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // *J.Fluid Mech.* 1972. V.52. Pt.4. P.609-638.
20. Bradshaw P., Cebeci T., Whitelaw J.H. Engineering calculation methods for turbulent flow. N.Y.: Academic Press, 1981.-331p.
21. Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1989. 256с.
22. Numerical methods in heat transfer / Ed.R.W.Lewis, K.Morgan, O.C.Zienkiewicz. N.Y.:John Wiley and Sons Ltd, 1981. 536p.
23. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flow // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1974. V.3. N.2. P.269-289.
24. Hanjalic K., Launder B.E. Contribution toward a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence // *J.Fluid Mech.* 1976. V.74. Pt.4. P.593-610.
25. Menter F.R. Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // *AIAA Paper.* 1993. N93-2906. 21p.
26. Исаев С.А., Гувернюк С.В., Зубин М.А., Пригородов Ю.С. Численное и физическое моделирование низкоскоростного воздушного потока в канале с круговой вихревой ячейкой // *Инженерно-физический журнал.* 2000.Т.73. №2. С.346-353.
27. Hanjalic K., Launder B.E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // *J.Fluid Mech.*, 1972. Vol.52.Pt.4.P.609-638.
28. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure // *J.Fluid Mech.*, 1975. Vol.68. P.537-566.
29. Исаев С.А. Тестирование дифференциальных моделей турбулентности при расчете отрывных течений // *Вестник Академии наук БССР. Серия физ.-энерг.наук.* 1989.№4.С.57-62.
30. Moin P., Mahesh K. Direct numerical simulation. – A tool in turbulence research // *Annual Rev. Fluid Mech.*, 1998. Vol.30. P.539-578.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение. Физические аспекты и моделирование турбулентности.....	3
1. Вывод уравнений для характеристик турбулентности.....	8
1.1. Осредненные по Рейнольдсу уравнения движения для вязкой несжимаемой жидкости.....	8
1.2. Уравнения для рейнольдсовых напряжений.....	9
1.3. Уравнение для кинетической энергии турбулентных пульсаций.....	11
1.4. Уравнение для изотропной диссипации турбулентности.....	12
2. Турбулентный теплообмен. Уравнения для температурных характеристик турбулентности.....	13
2.1. Осредненная форма уравнения энергии.....	13
2.2. Уравнения для составляющих турбулентного потока тепла.....	13
2.3. Уравнение для интенсивности турбулентных пульсаций температуры...	15
3. Модели градиентного типа.....	16
4. Алгебраические модели турбулентности.....	18
4.1. Модель пути смешения Прандтля.....	18
4.2. Моделирование пограничных слоев.....	19
4.3. Популярные алгебраические модели.....	22
4.4. Учет влияния кривизны стенки, перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения.....	27
4.5. Тестирование алгебраических моделей. Область применимости.....	29
4.6. Применение алгебраических моделей для расчета обтекания тел с передней срывной зоной (ПСЗ).....	35
5. Модели с одним уравнением.....	40
5.1. Модель Колмогорова - Прандтля.....	40
5.2. Уравнение для турбулентного трения.....	42
5.3. Уравнение для турбулентной вязкости.....	43
6. Модели с двумя дифференциальными уравнениями.....	45
6.1. Диссипативная двухпараметрическая модель турбулентности.....	46
6.2. Моделирование членов генерации, диссипации и диффузии в уравнении для изотропной диссипации.....	47
6.3. Модельная форма записи уравнения для изотропной диссипации. Постоянные диссипативной модели.....	49
6.4. Семейство двухпараметрических диссипативных $k - \varepsilon$ -моделей турбулентности.....	51
6.5. Метод пристеночных функций.....	51
6.6. Влияние низкорейнольдсовых эффектов в $k - \varepsilon$ -моделях.....	54
6.7. $k - \omega$ - модель Саффмена-Вилкокса.....	56
6.8. Другие модели с двумя уравнениями.....	59
6.9. Двухслойная $k - \omega$ - модель Ментера.....	60
6.10. Учет влияния кривизны линий тока на характеристики турбулентности.....	64
6.11. Нелинейная двухпараметрическая диссипативная модель.....	65
6.12. Двухпараметрическая диссипативная модель, учитывающая влияние сил плавучести.....	66
6.13. Методические численные эксперименты:	
А. Выбор граничных условий на стенке.....	69
Б. Влияние кривизны линий тока.....	71
В. Влияние численной диффузии.....	73
Г. Апробация на задачах, имеющих экспериментальные аналоги.....	74
7. Модели рейнольдсовых напряжений.....	83

7.1. Моделирование членов диссипации, диффузии и перераспределения в уравнениях переноса рейнольдсовых напряжений.....	83
7.2. Модельная форма записи уравнений для рейнольдсовых напряжений. Постоянные многопараметрической модели.....	87
7.3. Замыкание уравнений для рейнольдсовых напряжений.....	88
8. Модели турбулентности с уменьшенным числом уравнений для рейнольдсовых напряжений.....	90
8.1. Основные способы упрощения моделей турбулентности, использующих уравнения для рейнольдсовых напряжений.....	90
8.2. Локальное равновесие рейнольдсовых напряжений.....	91
8.3. Пропорциональность переноса составляющих рейнольдсовых напряжений и энергии турбулентных пульсаций.....	91
9. Новые подходы к моделированию турбулентности.....	94
9.1. Сравнение способов моделирования на базе спектрального анализа ...	94
9.2. Прямое численное моделирование.....	97
9.3. Моделирование крупных вихрей.....	99
Заключение.....	104
Список литературы.....	105

*Белов Игорь Александрович,
Исаев Сергей Александрович*

Моделирование турбулентных течений

Редактор Г.М.Звягина
Корректор А.А.Баутдинова
Пописана в печать 00.00.2000. Формат 60×84/16.
Бумага документная. Печать трафаретная.
Усл.-печ.л. (6 знаков). Уч.-изд.л. (.....). Тираж экз.
Заказ №
Балтийский государственный технический университет
Типография БГТУ
198005, Санкт-Петербург, 1-я Красноармейская, д.1