

Федеральное агентство по образованию
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Ю. Снегирёв

**ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ
В ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

Учебное пособие

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки 140400 «Техническая физика»*

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2009

УДК 532.517.4, 519.6 (075.8)

ББК 24.54я73

С 531

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры гидроаэродинамики СПбГПУ *М.Х. Стрелец*
Доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой плазмогазодинамики и теплотехники БГТУ
В.Н. Емельянов

Снегирёв А.Ю. **Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений:** Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. — 143 с.

Издание содержит введение в современную теорию турбулентных течений и изложение основных подходов к методам их численного моделирования с использованием высокопроизводительных компьютеров. Дается теоретическое обоснование метода на основе осреднения по Рейнольдсу, метода моделирования крупных вихрей и гибридных методов (прежде всего — метода отсоединённых вихрей). Выбор рассматриваемых моделей определяется их реализацией в текущих версиях вычислительных гидродинамических пакетов Ansys Fluent и Ansys CFX. Кроме того, пособие содержит краткое обсуждение таких современных подходов к численному моделированию турбулентных течений (новое поколение моделей осреднения, неявное моделирование подсеточной диссипации в методе крупных вихрей), которые в настоящее время находятся в стадии исследований. Приведён пример использования изложенных методов в расчёте турбулентного обтекания тела (боковое зеркало автомобиля) с обширным отрывом потока.

Предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки 140400 «Техническая физика», а также для студентов и аспирантов других направлений, научных сотрудников и инженеров, использующих математическое моделирование турбулентных течений.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Снегирёв А.Ю., 2009

© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2009

ISBN 978-5-7422-2317-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ.....	9
1.1. Количественные характеристики турбулентности	11
1.2. Статистическое описание турбулентных течений	21
1.2.1. Функция плотности вероятности	21
1.2.2. Автокорреляция во времени и в пространстве.....	24
1.2.3. Спектр пульсаций скорости.....	28
1.2.4. Фазовое осреднение	30
2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ	34
2.1. Основные уравнения.....	34
2.1.1. Уравнения Навье–Стокса	34
2.1.2. Уравнение переноса скаляра	35
2.2. Моделирование турбулентности.....	36
2.2.1. Основные подходы к моделированию турбулентности.....	36
2.2.2. Уравнения Рейнольдса и проблема замыкания	43
2.2.2.1. Уравнение неразрывности	44
2.2.2.2. Уравнения движения.....	45
2.2.2.3. Уравнение переноса скалярной величины.....	47
2.2.3. Концепция турбулентной вязкости и градиентной диффузии	48
2.2.4. Кинетическая энергия турбулентного потока	50
2.2.5. Модели турбулентности на основе турбулентной вязкости....	54
2.2.5.1. Алгебраические модели турбулентности	54
2.2.5.2. Модели с одним уравнением. Модель Спаларта– Аллареса	56
2.2.5.3. Модели с двумя уравнениями. Стандартная k – ϵ модель .	59
2.2.5.4. RNG k – ϵ модель.....	62
2.2.5.5. Модели k – ω и SST (модель сдвиговых напряжений Ментера)	64
2.2.5.6. Другие модели на основе турбулентной вязкости	69
2.2.6. Модели рейнольдсовых напряжений (RSM)	70
2.2.7. Моделирование крупных вихрей (LES).....	72
2.2.7.1. Модель Смагоринского.....	80
2.2.7.2. Динамическое определение подсеточной вязкости	82
2.2.7.3. Локальная модель вихревой вязкости, адаптированная для пристеночных течений (WALE)	85

2.2.7.4. Модель с уравнением переноса остаточной кинетической энергии	87
2.2.7.5. Численные эффекты в роли подсеточной вязкости	88
2.2.8. Моделирование отсоединённых вихрей (DES)	90
2.2.9. «Второе поколение» моделей URANS	94
2.2.10. Применимость моделирования крупных вихрей.....	97
2.3. Пристеночные течения и граничные условия	102
2.3.1. Метод URANS	102
2.3.1.1. Метод пристеночных функций.....	103
2.3.1.2. Низкорейнольдсовыe модели турбулентности.....	110
2.3.2. Метод LES	112
3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ЗА ПЛОХООБТЕКАЕМЫМ ТЕЛОМ НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ.....	114
3.1. Постановка задачи	114
3.2. Расчётные сетки	115
3.3. Результаты расчётов	118
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Роль поля давления в решении уравнений Навье– Стокса.....	130
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Расстояние до ближайшей твёрдой поверхности.....	137
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	138
СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ.....	142

ВВЕДЕНИЕ

CFD is great. If you know the right answer.
Franco Tamanini, FM Global Research

Для современных вычислительных технологий характерно использование высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных систем (МВС), состоящих из множества серийных компонентов. Доступность, относительная дешевизна и возможность наращивания количества процессоров в МВС создаёт предпосылки для их широкого внедрения в промышленную практику. Вместе с тем, на рынке утвердились мощные программные средства для вычислений в разных областях механики, гидродинамики, физики. Эффективное применение столь мощных инструментов в прикладных и фундаментальных исследованиях требует адекватной методологии их использования, которая во многих случаях отстаёт от темпа роста производительности МВС. В самом деле, развитие методологии есть накопление опыта решения прикладных задач, причём этот опыт во многом изменяет характер и стиль работы профессионалов. Примером такой перемены является переход от разработки собственного алгоритма и программного кода для решения возникшей прикладной задачи к использованию достаточно мощных и универсальных вычислительных пакетов, в том числе распространяемых на коммерческой основе.

Данный процесс представляется достаточно объективным и в ряде случаев оправданным. Однако он неизбежно ставит проблемы методического характера. Насколько адекватен выбор модели, метода численного решения, размера расчётной области, топологии и размерности расчётной сетки, требований к сходимости? Отвечая на эти вопросы, пользователь принимает решения, которые определяют степень достоверности результатов расчёта и затраты на их получение. В свою очередь, квалифицированный ответ на перечисленные вопросы требует знания и понимания основ моделируемых явлений. Целью данного пособия является изложение основ теории *турбулентности и методов её численного моделирования*, в первую очередь — с помощью коммерческих гидродинамических пакетов Ansys Fluent и Ansys CFX.

Расчёт турбулентных течений продолжает оставаться сложнейшей задачей механики сплошной среды. Решение этой задачи жизненно важно

для ряда ключевых отраслей промышленности (авиация, турбостроение, автомобилестроение, химические технологии), при моделировании процессов в окружающей среде. Другими словами, моделирование турбулентности применяется во всех областях прикладных и фундаментальных исследований, использующих методы вычислительной гидродинамики (Computational Fluid Dynamics, CFD). Помимо моделирования турбулентности можно выделить ещё несколько основных компонентов вычислительной гидродинамики: генерация сеток, построение вычислительного алгоритма с учётом архитектуры компьютера и многопроцессорных вычислительных технологий. Однако именно моделирование турбулентности часто оказывается источником наибольших ошибок и (или) требует недопустимо высоких затрат на вычисления.

Изменение технологий моделирования турбулентности протекает под действием экспоненциального роста доступных вычислительных ресурсов, наблюдавшегося в последние десятилетия (рис. 1). Увеличение мощности компьютера часто играет роль «грубой силы», в то время как выбор модели турбулентности требует со стороны пользователя интеллектуального подхода с учётом физики рассматриваемого течения. При этом, однако, именно рост вычислительных мощностей определяет стратегии моделирования турбулентности, доступные для инженерной практики. Как результат, в дополнение (и на смену) традиционным подходам с использованием осреднения по Рейнольдсу приходит всё более широкое практическое применение метода моделирования крупных вихрей.

Среди крайне ограниченного множества отечественных учебных изданий в этой области можно отметить учебное пособие [1]. Мотивацией к написанию нового учебного пособия послужило то, что эффективное использование высокопроизводительной вычислительной техники и мощных вычислительных пакетов невозможно без понимания физики турбулентных течений и возможностей используемых математических моделей. Соответственно, данное пособие преследует следующие цели.

1. Изложить физические основы математических моделей турбулентности, наиболее широко применяемых в вычислительной гидродинамике.
2. Обеспечить понимание прогностических возможностей и вычислительных затрат, связанных с использованием моделей турбулентности.
3. Облегчить понимание технической документации коммерческих вычислительных пакетов.

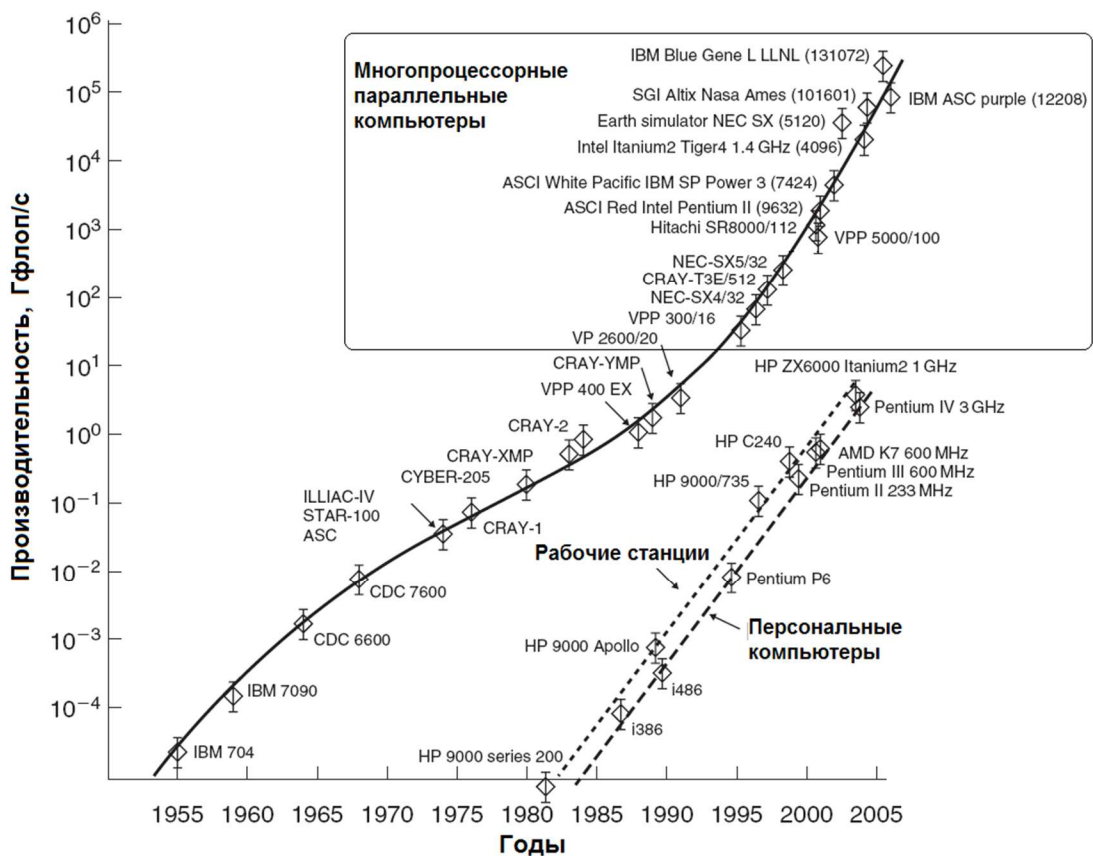


Рис. 1. Рост вычислительных мощностей процессоров и развитие многопроцессорных параллельных компьютеров [21]

Учебное пособие не может охватить всё многообразие турбулентных течений. Помимо естественного ограничения на объём пособия это связано с тем, что (при всём разнообразии физических явлений, которые часто протекают в турбулентных потоках) именно моделирование турбулентности, как правило, определяет достоверность результатов и оптимальность использования вычислительных ресурсов. При теоретическом выводе ряда положений теории турбулентности и методов её моделирования рассматривается течение несжимаемой жидкости. В тех случаях, когда уравнения записаны для переменной плотности, предполагается существенно дозвуковое течение газа в отсутствие объёмных сил, химических реакций и других факторов, требующих отдельного рассмотрения. Перечислим ещё раз те аспекты турбулентных течений, которые *не рассматриваются* в данном тексте.

1. Сверхзвуковые сжимаемые течения (за исключением их упоминания в Приложении 1).

2. Влияние объёмных сил, в том числе эффекты, связанные с переменной плотностью среды (архимедова сила, естественная конвекция, генерация турбулентности за счёт действия подъёмной силы).

3. Смешение многокомпонентных систем (за исключением краткого рассмотрения уравнения переноса пассивного скаляра и метода градиентной диффузии).

4. Горение и химические реакции.

5. Многофазность (например, присутствие капель или твёрдых частиц в турбулентном потоке).

6. Роль вычислительных методов (за исключением краткого обсуждения схемной вязкости как приближённой модели подсеточной турбулентности).

Данное пособие состоит из трёх глав. В первой главе даётся система количественных характеристик турбулентных течений, и излагаются основы современного понимания теории турбулентности. Вторая глава содержит описание основных подходов к моделированию турбулентности при решении инженерных задач — методов на основе осреднения по Рейнольдсу (RANS), метода крупных вихрей (LES) и гибридных методов (DES) — и их реализации в текущих версиях вычислительных пакетов Ansys Fluent 6.3 и Ansys CFX 11. В третьей главе даётся пример численного расчёта турбулентного отрывного течения вокруг плохообтекаемого тела, закреплённого на плоской поверхности. Расчёты выполнены на многопроцессорных кластерах Информационно-телекоммуникационного комплекса (ИТК) СПбГПУ с помощью вычислительных пакетов Ansys Fluent и Ansys CFX.

Автор благодарен проф. М.Х. Стрельцу, проф. В.Н. Емельянову и д.ф.-м.н. К.Н. Волкову за внимательное чтение рукописи и полезные замечания, к.ф.-м.н. Ю.К. Шиндер за выполнение расчётов турбулентных течений, представленных в главе 3, и проф. Ю.Я. Болдыреву за помощь и содержательные дискуссии.

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Турбулентность можно считать самой распространённой формой движения сплошной среды. Действительно, одно и то же явление (турбулентность) наблюдается в течениях межзвёздного газа, газовых туманностях, фотосферах звёзд, атмосферах планет, океанских и морских течениях, в следах кораблей, летательных аппаратов и автомобилей, в трубопроводах, турбинах, двигателях, топках, при пожарах и во многих других случаях. Следовательно, понимание природы турбулентных течений и разработка методов их численного моделирования — важнейшая задача современной технической физики.

Почему большинство окружающих нас течений жидкости и газа, как в природе, так и в технике, являются турбулентными? Дело в том, что спокойное, упорядоченное и гладкое течение, называемое ламинарным, возникает лишь при малой скорости потока, малых размерах области и большой вязкости жидкости¹. Количественной мерой выполнения этих условий является численное значение числа Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{VL}{\nu}, \quad (1)$$

где V — характерная скорость потока (например, скорость потока, набегающего на препятствие, или на входе в канал), L — характерный размер потока (например, поперечный размер препятствия или канала), ν — кинематическая вязкость среды. Видно, что число Рейнольдса одновременно зависит от характеристик набегающего потока (V), размеров тела или канала (L) и свойств жидкости (ν). Отметим, что вязкость среды, вообще говоря, зависит от температуры и химического состава. Если течение является изотермическим (температура постоянна в пространстве и во времени), а химический состав не меняется, то значение ν можно полагать постоянным.

С ростом числа Рейнольдса происходит переход от ламинарного режима течения к турбулентному. Это было впервые показано в опытах

¹ В гидродинамике термин «жидкость» используют для обозначения сплошной среды, способной образовать течение. При этом рассматриваемое вещество может находиться как в жидком, так и в газообразном агрегатном состоянии. В англоязычной литературе в этих случаях используется термин fluid.

О. Рейнольдса, выполненных в 1883 г. в университете Манчестера² (Великобритания). В этих опытах исследовалось возбуждение турбулентности в потоке воды в круглой трубе. Оказалось, что течение устойчиво и стационарно лишь при достаточно малых значениях Re . С ростом Re (например, за счёт увеличения скорости на входе в трубу) течение теряет устойчивость и испытывает колебания (другими словами, оно становится нестационарным). Вблизи границы устойчивости амплитуда колебаний всех характеристик течения невелика, а их зависимости изменяются почти гармонически с некоторой постоянной частотой. Дальнейшее увеличение Re приводит к появлению в спектре колебаний нескольких выделенных частот и, затем, к формированию аperiodического течения. Наконец, течение становится хаотическим, а в спектры колебаний становятся непрерывными. В опытах Рейнольдса потеря устойчивости ламинарного течения наблюдалась при $Re = 2 \cdot 10^3$, а развитое турбулентное течение формировалось при $Re = 1,3 \cdot 10^4$ (в качестве характерной скорости принимается среднерасходная скорость потока, а в качестве характерного размера — диаметр трубы). Следует отметить, что переход к турбулентности можно затян timer и до больших значений Re , если обеспечить отсутствие всяких, даже малых, механических возмущений. Однако такое течение, в отличие от ламинарного потока при докритических числах Re , становится *неустойчивым к малым возмущениям*.

Фундаментальное значение полученных данных заключается в том, что порядок чисел Рейнольдса, при которых происходит потеря устойчивости и переход к турбулентности, оказывается одним и тем же в областях разных размеров при течениях жидкостей разной физической природы. При числах Рейнольдса, существенно превышающих указанные критические значения, турбулентность называют *полностью развитой*. Большинство приближённых моделей турбулентности создано именно для этого случая.

Турбулентный режим течения имеет ряд общих характеристик, перечисленных ниже.

- Турбулентность развивается при больших числах Рейнольдса вследствие внутренней неустойчивости потока. Таким образом, турбулентность не является свойством среды. Это — режим течения.

² Экспериментальная установка О. Рейнольдса в университете Манчестера в настоящее время по-прежнему работоспособна.

- Турбулентное течение — это *случайный процесс* с широким спектром временных и пространственных масштабов пульсаций всех характеристик потока: в зависимости от числа Рейнольдса диапазон измерения частот и длин волн охватывает до 4–5 порядков. Детальное и исчерпывающее (прямое) описание всех масштабов турбулентного течения для практических целей невозможно и нецелесообразно. В связи с этим для описания турбулентного течения используются статистические подходы. В частности, вычисляют и измеряют *осредненные характеристики*.

- В условиях турбулентности развивается более быстрый, по сравнению с ламинарным потоком, обмен массой, импульсом и энергией между разными областями течения из-за *интенсивного перемешивания* жидкости.

- Турбулентные течения *трёхмерны*: турбулентные флуктуации трёхмерны даже тогда, когда осреднённые поля можно приближённо считать двумерными (плоскими или осесимметричными).

- Турбулентность возникает в *сплошной среде*: даже самые малые пространственные масштабы турбулентных флуктуаций намного превосходят длины свободного пробега молекул. Поэтому для описания турбулентных течений применяют уравнения Навье–Стокса для сплошной среды.

- Турбулентность *диссипативна*. Это значит, что кинетическая энергия потока частично преобразуется в кинетическую энергию турбулентных пульсаций, которая, в конечном счете, переходит в тепло; перечисленные процессы необратимы.

1.1. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Все характеристики турбулентного течения (скорость, давление, температура, концентрации компонентов смеси) испытывают случайные колебания вокруг средних значений. В связи с этим, значения компонент скорости (u_j , $j = x, y, z$) и скалярных величин (c) представляют в виде суммы средней и пульсационной компонент:

$$u_j = \bar{u}_j + u'_j, \quad c = \bar{c} + c'. \quad (2)$$

При этом средние значения определяются осреднением на достаточно большом интервале времени³ T :

$$\bar{u}_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_j(t) dt, \quad \bar{c} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T c(t) dt. \quad (3)$$

Данное определение подразумевает, что средние значения *не зависят* от времени (соответствующий случайный процесс называется стационарным). В практических расчётах часто рассматривают осреднённые величины, зависящие от времени. Особенности такого подхода обсуждаются в разделе 2.2.1.

Визуализацию линий тока мгновенного и среднего поля турбулентного течения можно получить, фотографируя поток с малой и большой выдержкой (при этом в поток вносятся мелкие частицы или пузырьки). Как показано на рис. 2, где приведены фотографии обтекания шара турбулентным потоком, внешний вид мгновенного (рис. 2, *а*) поля сильно отличается от среднего поля (рис. 2, *б*). Указанное отличие тем больше, чем выше уровень пульсаций относительно средних значений.

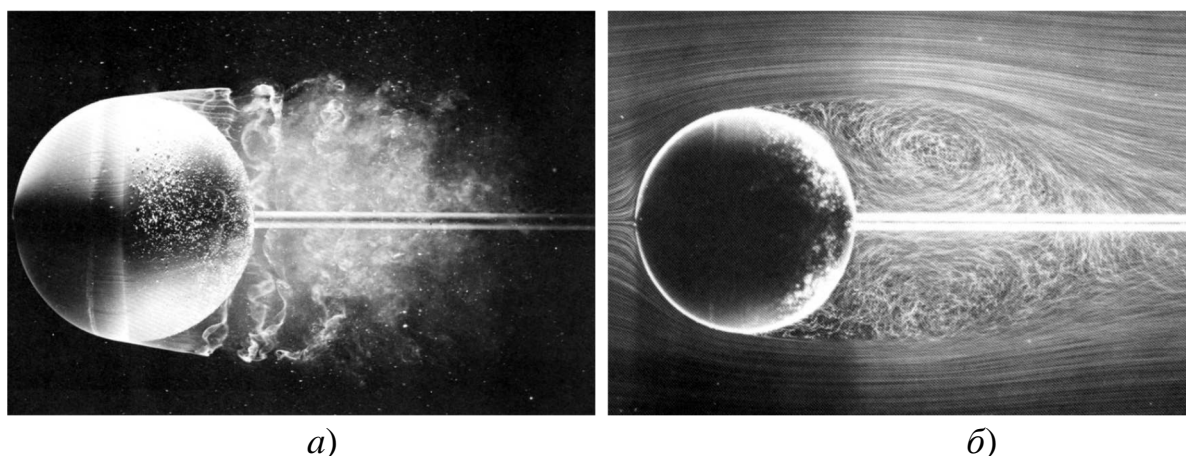


Рис. 2. Обтекание шара при $Re = 15 \cdot 10^3$: *а*) — фотография мгновенного поля течения (малая выдержка); *б*) — фотография среднего поля течения (большая выдержка) [2]

³ Далее будет предложена ещё одна интерпретация среднего значения — результат осреднения по возможным состояниям. При этом будет использована функция плотности вероятности, которая показывает вероятность реализации каждого из состояний.

Интенсивность пульсаций скорости характеризуется *кинетической энергией турбулентности*⁴

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_j u'_j}. \quad (4)$$

Средняя пульсационная скорость пространственно изотропных колебаний выражается через кинетическую энергию турбулентности

$$u' = \sqrt{\frac{2k}{3}}. \quad (5)$$

Интенсивностью турбулентности называют отношение средней пульсационной скорости к характерной средней скорости набегающего потока V :

$$I_t = \frac{u'}{V}. \quad (6)$$

Пространственный масштаб турбулентности l_t (также называемый *интегральным масштабом*) характеризует крупные (энергонесущие) вихри. *Крупные вихри* пространственно анизотропны, их форма и размер зависят от условий образования, размеров и формы области течения. В частности, на рис. 3 видно, что характерный размер крупных вихрей близок к пространственному шагу решётки, за которой развивается турбулентность. Время жизни крупных вихрей сопоставимо с характерным временем осредненного течения L/V . Крупные вихри переносятся осредненным потоком, они упорядочены (когерентны) и *не* находятся в равновесии с осредненным течением (иными словами, скорость их генерации не равна скорости их распада в данной точке пространства).

Характерные значения интенсивности и пространственного масштаба турбулентности зависят от типа течения. В частности, в документации к Ansys Fluent [8] приводятся следующие рекомендуемые значения.

На срезе сопла газовой турбины: $I_t \approx 0,2$ и $l_t/D \approx 0,01-0,1$ (D — расстояние между лопастями).

За перфорированным экраном: $I_t \approx 0,1$ и $l_t/D \approx 1$ (D — размер отверстий).

⁴ Здесь и далее в данном пособии будем предполагать суммирование по всем допустимым значениям повторяющегося индекса. В соответствии с этим правилом будем иметь, например, $\overline{u'_j u'_j} = \overline{u'_1 u'_1} + \overline{u'_2 u'_2} + \overline{u'_3 u'_3}$.

В полностью развитом течении в трубе или канале: $I_t \approx 0,05$ и $l_t/D \approx 1$ (D — гидравлический диаметр⁵).

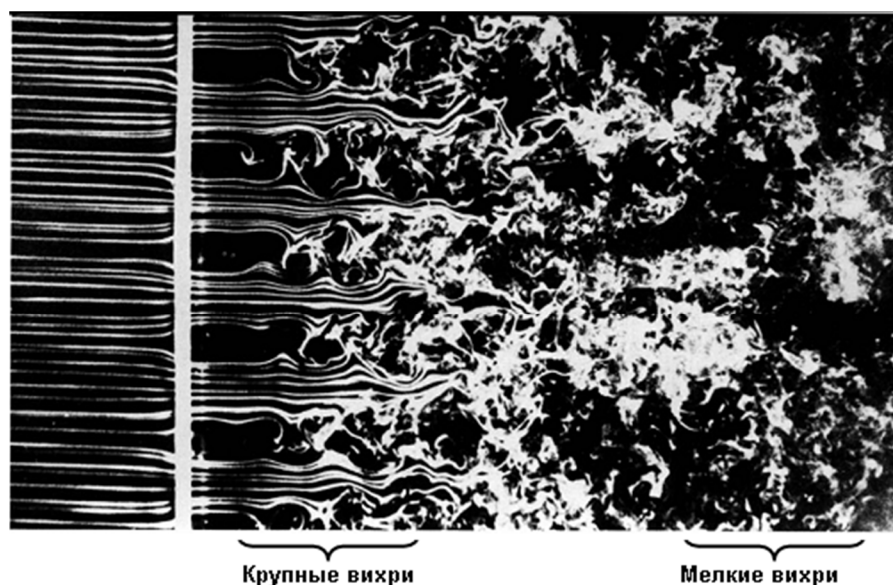


Рис. 3. Турбулентность в потоке за решёткой [2]

В турбулентном потоке крупные вихри распадаются, образуя более мелкие в результате многоэтапного *каскадного процесса* (рис. 3). Достаточно *мелкие вихри* полностью неупорядочены, хаотичны, пространственно *изотропны*. Их время жизни мало по сравнению с характерным временем осредненного течения. Мелкие вихри безынерционно подстраиваются под изменения осредненного течения, в результате чего скорость их генерации равна скорости распада. Таким образом, они находятся в *локальном равновесии* с осредненным течением.

Турбулентное движение характеризуется турбулентным числом Рейнольдса, которое строится по средней пульсационной скорости и интегральному масштабу

$$Re_t = \frac{u' l_t}{\nu}. \quad (7)$$

Отметим, что $Re_t \sim Re$ поскольку $u' \sim V$ и $l_t \sim L$.

⁵ Гидравлический диаметр канала — диаметр круга, площадь которого равна площади сечения канала.

Скорость диссипации ε представляет убыль кинетической энергии турбулентности в единицу времени (скорость распада энергонесущих вихрей). В соответствии с этим определением, характерное время жизни крупных турбулентных вихрей составляет

$$\tau_t = \frac{k}{\varepsilon} \sim \frac{l_t}{u'}. \quad (8)$$

Итак, турбулентные вихри образуются из-за неустойчивости течения и имеют характерный размер порядка l_t . Далее протекают два одновременных процесса: дробление крупных вихрей с образованием более мелких (*каскадный процесс*, характеризуется величиной ε) и вязкая диссипация самых мелких вихрей (характеризуется молекулярной вязкостью ν). Подчеркнём, что (несмотря на название) величина ε характеризует распад вихрей вследствие их *гидродинамической неустойчивости*, в то время как лишь самые малые из вихрей наиболее подвержены *вязкой* диссипации.

Далее будет показано, что, используя разложение (2) и систему уравнений Навье–Стокса для несжимаемой среды, можно строго, без дополнительных допущений, получить уравнение переноса кинетической энергии турбулентности [34]:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \underbrace{-\frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial x_j}}_{\text{Турбулентная диффузия}} - \underbrace{-u_i u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{Генерация}} - \underbrace{2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}}}_{\text{Диссипация}}, \quad (9)$$

где $\mathbf{T}_j = \overline{u'_i u'_i u'_j} / 2 + \overline{u'_j p'} / \rho - 2\nu \overline{u'_i S'_{ij}}$ и $S'_{ij} = (\partial u'_i / \partial x_j + \partial u'_j / \partial x_i) / 2$ (черта сверху означает осреднение по времени, а штрих соответствует пульсационной составляющей, которая дополняет средние скорость \bar{u} и давление до текущего мгновенного значения $u = \bar{u} + u'$, $p = \bar{p} + p'$). Видно, что каждому слагаемому в правой части можно приписать физический смысл, что и обозначено в записи уравнения (9). В результате, уравнение (9) даёт формальное определение скорости диссипации ε :

$$\varepsilon = 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}}. \quad (10)$$

Следует отметить, что соотношение (10) *не означает* пропорциональности между ε и ν , поскольку при изменении ν средние градиенты скорости и, следовательно, величина $\overline{S'_{ij} S'_{ij}}$ изменяются в противоположную сторону.

Для гомогенной изотропной турбулентности (все пространственные направления статистически равноправны) можно показать, что

$$\varepsilon \approx \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\right)^2}, \quad (11)$$

где индексом 1 обозначено произвольное пространственное направление.

Современное понимание турбулентности (см., например, [34, 6]) основывается на двух гипотезах А.Н. Колмогорова⁶.

Первая гипотеза подобия Колмогорова содержит два утверждения о динамике *малых вихрей*. Во-первых, в полностью развитой изотропной турбулентности (достаточно большие числа Рейнольдса) маломасштабные движения (т. е. имеющие характерный пространственный масштаб $l \ll l_t$) статистически универсальны. Во-вторых, их статистические характеристики полностью определяются ν и ε .

Первая гипотеза приводит к ряду важных следствий. Используя ν и ε , можно сформировать масштабы длины, времени и скорости, причем единственным образом:

$$\eta_K = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad \tau_K = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad u_K = (\varepsilon\nu)^{1/4}. \quad (12)$$

Это масштабы наименьших вихрей, существующих в турбулентном потоке (указанные масштабы называют *колмогоровскими*). Более мелкие структуры рассеиваются из-за молекулярной вязкости. Отметим, что для малых (колмогоровских) вихрей число Рейнольдса $u_K \eta_K / \nu = 1$, т. е. η_K — действительно наименьший пространственный масштаб.

Между наибольшим l_t и наименьшим η_K масштабами вводится промежуточный (тейлоровский) пространственный масштаб

$$\lambda \sim u' \tau_K, \quad \eta_K < \lambda < l_t. \quad (13)$$

⁶ Отметим, что основные идеи теории маломасштабной турбулентности на качественном уровне были сформулированы Л. Ричардсоном (L.F. Richardson) в 20-х годах прошлого века и в середине 30-х Дж. Тейлором (G.I. Taylor). Позже, в 40-х годах, количественное описание процесса было дано А.Н. Колмогоровым и А.М. Обуховым. Ссылки на соответствующие работы можно найти, например, в книге [6].

Смысл тейлоровского масштаба становится ясным при использовании понятия пространственной автокорреляции (см. раздел. 1.2.2).

Вторая гипотеза подобия Колмогорова постулирует свойства каскадного процесса, в ходе которого крупные вихри распадаются на всё более мелкие: в полностью развитой турбулентности (достаточно большие числа Рейнольдса) в спектре размеров вихрей существуют *инерционный интервал* ($l_t \gg l \gg \eta_K$), в котором движения статистически универсальны и изотропны, а их статистические характеристики *не зависят* от ν и *зависят только от ε* .

Другими словами, постулируется существование такого интервала размеров вихрей (инерционный интервал), в котором их динамика *ещё* не зависит от вязкости (т. е. они достаточно *крупные*), но *уже* не зависит от условий образования и распада их более крупных «предков» (т. е. они достаточно *мелкие*). Подчеркнём, что такой интервал формируется лишь в полностью развитой турбулентности, т. е. при больших числах Рейнольдса.

В соответствии со второй гипотезой скорость распада крупных вихрей в полностью развитой турбулентности *не зависит от вязкости*, поскольку распад вихрей (и, следовательно, перенос турбулентной энергии в направлении высокочастотной коротковолновой части спектра) определяется их гидродинамической неустойчивостью. Как следствие второй гипотезы, скорость распада вихрей не зависит от ν , а определяется только характеристиками *крупномасштабной* турбулентности:

$$\varepsilon \sim \frac{k^{3/2}}{l_t} \sim \frac{u'^3}{l_t}. \quad (14)$$

Отметим, что если принять $l_t = \sqrt{3/2} (k^{3/2}/\varepsilon)$, то $Re_t = u'l_t/\nu = k^2/(\varepsilon\nu)$, в соответствии с (5) и (7).

С другой стороны, вихри из инерционного интервала «забывают» свою предысторию и пространственную ориентированность (что означает, соответственно, их универсальность и изотропность). Указанные представления играют ключевую роль в теоретическом обосновании метода моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) для численного расчёта турбулентных течений.

С учётом (14) можно показать, что характеристики малых вихрей (12) связаны с характеристиками крупных вихрей (5), (8) через турбулентное число Рейнольдса (7):

$$\frac{\eta_K}{l_t} \sim \text{Re}_t^{-3/4}, \quad \frac{u_K}{u'} \sim \text{Re}_t^{-1/4}, \quad \frac{\tau_K}{\tau_t} \sim \text{Re}_t^{-1/2}. \quad (15)$$

Видно, что по мере увеличения турбулентного числа Рейнольдса расширяется интервал масштабов (спектр) турбулентного течения. В условиях развитой турбулентности он составляет несколько порядков.

Рассмотрим в качестве примера турбулентное обтекание тела с характерным размером $L = 0,1$ м потоком воздуха, скорость которого V изменяется от 10 до 50 м/с. Оценки порядков величин для турбулентных характеристик образующихся при этом течений, приведены в табл. 1, где принято $l_t \approx 0,5L$ и $u' \approx 0,1V$.

Т а б л и ц а 1
Численные значения характеристик турбулентных потоков
($L = 0,1$ м, $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$ м²/с)

Масштабы осреднённого течения		Масштабы турбулентности						Кинетическая энергия турбулентности, м ² /с ²	Скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, м ² /с ³	Турбулентное число Рейнольдса
		Интегральные масштабы			Колмогоровские масштабы					
Скорость потока, V , м/с	Число Рейнольдса, $\text{Re} = VL/\nu$	Длина, 10^{-3} м	Время, 10^{-3} с	Средняя пульсационная скорость, м/с	Длина, 10^{-3} м	Время, 10^{-3} с	Скорость, м/с	$k = \frac{3}{2} u'^2$	$\varepsilon = \frac{\nu^3}{\eta_K^4}$	$\text{Re}_t = \frac{u' l_t}{\nu}$
		$l_t \approx 0,5L$	$\tau_t = \frac{l_t}{u'}$	$u' \approx 0,1V$	$\eta_K \propto \frac{l_t}{\text{Re}_t^{3/4}}$	$\tau_K = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}$	$u_K = (\varepsilon \nu)^{1/4}$			
10	$0,67 \cdot 10^5$	50,0	50,0	1,0	0,11	0,87	0,13	1,5	20,0	$3,3 \cdot 10^3$
20	$1,3 \cdot 10^5$	50,0	25,0	2,0	0,068	0,31	0,22	6,0	160,0	$6,7 \cdot 10^3$
30	$2,0 \cdot 10^5$	50,0	17,0	3,0	0,050	0,017	0,30	13,5	540,0	$10 \cdot 10^3$
40	$2,7 \cdot 10^5$	50,0	12,5	4,0	0,040	0,011	0,37	24,0	1280,0	$13 \cdot 10^3$
50	$3,3 \cdot 10^5$	50,0	10,0	5,0	0,034	0,0078	0,44	37,5	2500,0	$17 \cdot 10^3$

Данные табл. 1 показывают, в какой степени с ростом числа Рейнольдса увеличивается разрыв между наименьшими и наибольшими масштабами (как пространственными, так и временными) в турбулентном потоке. В соответствии с (15) это означает расширение спектра турбулентных пульсаций и всё более выраженное разделение процессов генерации и диссипации кинетической энергии турбулентности. В полностью развитой турбулентности, наблюдающейся при больших числах Рейнольдса, генерация и диссипация кинетической энергии протекают в противоположных и неперекрывающихся интервалах энергетического спектра.

Энергетический спектр турбулентности $E(k)$ (где $k = 2\pi/l$ — волновое число, l — длина волны) определяется так, что $E(k)dk$ представляет вклад кинетической энергии турбулентности $k = \overline{u'_j u'_j} / 2$ в диапазоне волновых чисел от k до $k + dk$. Другими словами, энергетический спектр — это распределение энергии турбулентности по размерам вихрей (или по частотам пульсаций). Кинетическая энергия турбулентности представляет собой полную энергию пульсаций всех пространственных масштабов:

$$k = \int_0^{\infty} E(k)dk. \quad (16)$$

Из соображений размерности А.М. Обузовым в 1941 г. было показано, что, в соответствии со второй гипотезой Колмогорова, энергетический спектр *в инерционном интервале* имеет вид:

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (17)$$

называемый «законом пяти третьих», где $C \approx 1,5$ — постоянная Колмогорова.

На рис. 4 схематично показан спектр развитой турбулентности и обозначены характерные интервалы масштабов. Отрезком показан угол наклона, соответствующий закону пяти третьих.

Ещё раз отметим, что спектр с выраженным инерционным интервалом, разделяющим область *генерации* турбулентной энергии и область её *вязкой диссипации*, формируется только в условиях развитой турбулентности, т. е. при достаточно больших числах Рейнольдса осредненного течения. При малых числах Рейнольдса указанные области перекрываются, а инерционный интервал вырождается.

Таким образом, теорию Колмогорова следует рассматривать как *асимптотическую*, справедливую при очень больших числах Рейнольдса.

Соответственно, при умеренных числах Рейнольдса форма энергетического спектра может отклоняться от формулы (17).

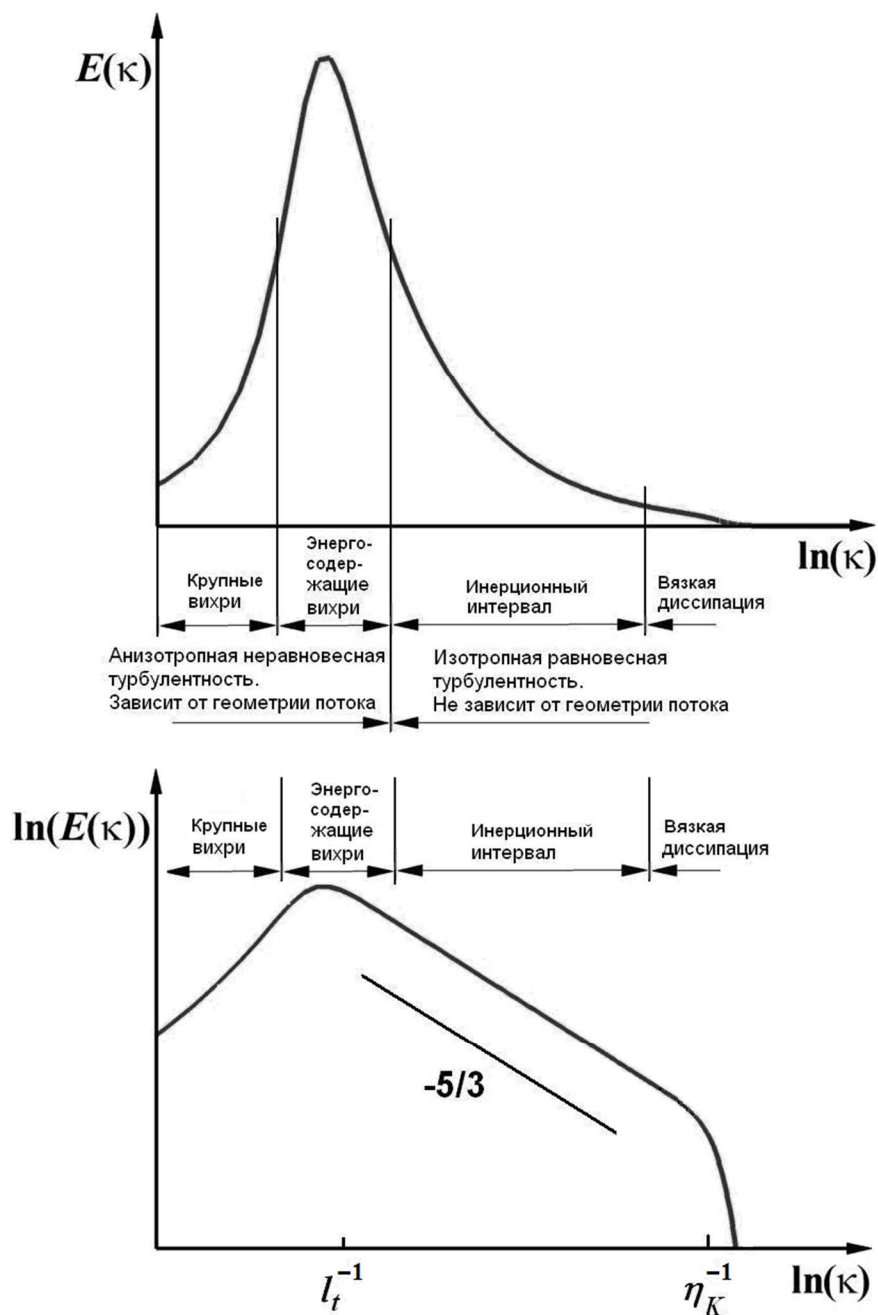


Рис. 4. Энергетический спектр развитой турбулентности в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабе

Теория Колмогорова не рассматривает некоторые важные особенности турбулентных течений. В частности, в отличие от рассмотренного вы-

ше сценария в каскадном процессе возможна передача энергии как от крупных вихрей к более мелким, так и в противоположном направлении. Наконец, турбулентные течения часто включают крупные упорядоченные вихревые структуры, содержащие внутри себя мелкомасштабную турбулентность и окружённые нетурбулизованной жидкостью (рис. 5). Это значит, что в данной точке пространства с течением времени может чередоваться турбулентное и нетурбулентное состояние жидкости. Данное явление называют *перемежаемостью* (intermittency), а вероятность (относительную длительность) турбулентного состояния течения в данной точке — коэффициентом перемежаемости.

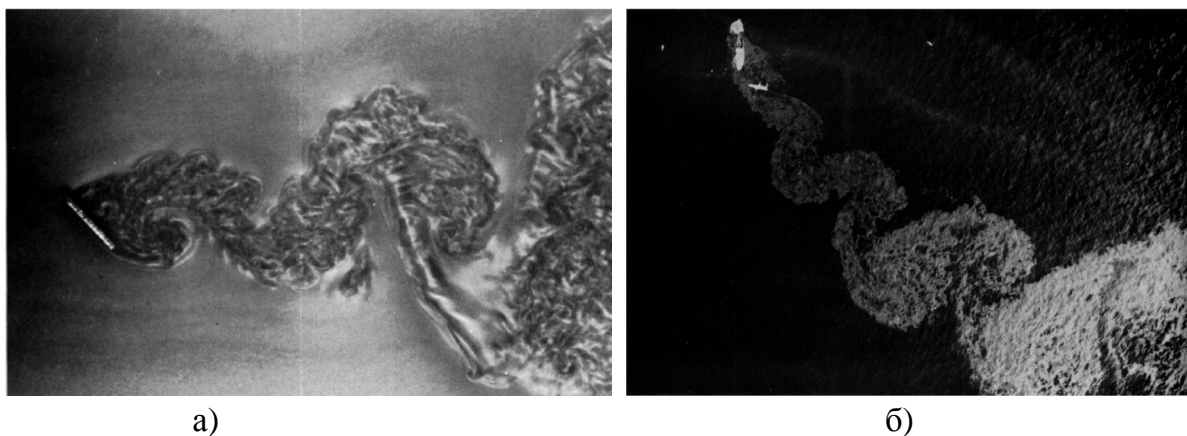


Рис. 5. Упорядоченные крупномасштабные вихревые структуры в турбулентном течении [2]: *а* — след за наклонной плоской пластинкой (угол атаки 45° , $Re = 4,3 \cdot 10^3$); *б* — след за танкером, севшим на мель (угол атаки 45° , $Re \approx 10^7$)

С учётом перечисленных ограничений, теория Колмогорова лежит в основе современного понимания развития и деградации турбулентности.

1.2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

1.2.1. Функция плотности вероятности

Характеристики турбулентного потока (компоненты скорости, температура, концентрации и другие характеристики потока) удобно рассматривать как случайные величины. Описание поведения случайной величины содержится в функции плотности вероятности (ФПВ). Рассмотрим случайную величину u (это может быть, например, скорость в данной

точке турбулентного потока), изменяющуюся в интервале $a \leq u \leq b$. Значения a и b определяются физическим смыслом величины u . В частности, для скорости полагают $a = -\infty$ и $b = +\infty$, а для мольной доли некоторого компонента смеси — $a = 0$ и $b = 1$. *Функция плотности вероятности* $P(U)$ — это вероятность того, что величина u принимает значения между U и $U + dU$. Примеры случайно изменяющихся величин и соответствующих функций плотности вероятности показаны на рис. 6.

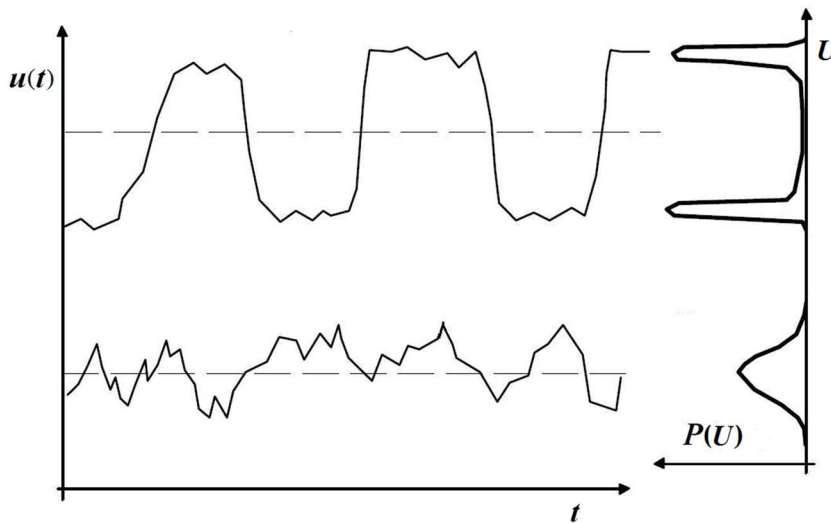


Рис. 6. Изменение во времени случайных величин, имеющих бимодальную и унимодальную функцию плотности вероятности

Примеры ФПВ, приведённые на рис. 6, указывают на существенно разную динамику изменения случайной величины. В одном случае видно, что система скачком меняет свои состояния, в каждом из которых имеют место пульсации вокруг некоторого среднего значения. Именно такое поведение характерно для условий перемежаемости, а также при турбулентном перемешивании веществ, поступающих из разных потоков. Отметим, что при этом функция плотности вероятности становится бимодальной. В другом случае наблюдаются случайные колебания вокруг постоянного среднего значения, а соответствующая функция плотности вероятности имеет единственный максимум, т. е. унимодальна.

Всякая функция плотности вероятности подчиняется условию нормировки:

$$\int_a^b P(u) du = 1. \quad (18)$$

С помощью ФПВ можно вычислить средние значения величин:

$$\overline{f(u)} = \int_a^b f(u) P(u) du \quad (19)$$

и, в частности,

$$\bar{u} = \int_a^b u P(u) du. \quad (20)$$

В турбулентном потоке случайную величину можно представить в виде суммы средней и пульсационной компонент $u(t) = \bar{u} + u'(t)$, причём среднее от пульсационной компоненты (флуктуации) равно нулю: $\overline{u'} = 0$. Однако средний квадрат флуктуации не равен нулю

$$\overline{u'^2} = \int_a^b (u - \bar{u})^2 P(u) du \neq 0 \quad (21)$$

и характеризует «ширину» ФПВ. Часто используют среднеквадратичное отклонение $\sqrt{\overline{u'^2}}$. Отметим, что для нелинейной функции $\overline{f(u)} \neq f(\bar{u})$.

Видно, что равенство (20) даёт определение среднего значения (среднее по ансамблю реализаций), альтернативное равенству (3) (среднее по времени для данной реализации). Эти определения идентичны, если в течение времени T рассматриваемая случайная величина изменяется в соответствии с функцией плотности вероятности $P(u)$.

Описание реальных течений требует применения функции плотности вероятности *нескольких* переменных. Рассмотрим для определенности функцию ФПВ *двух* переменных и приведём её основные свойства и характеристики.

1. Нормировка:

$$\iint P(u_1, u_2) du_1 du_2 = 1. \quad (22)$$

2. Среднее значение:

$$\overline{f(u_1, u_2)} = \iint f(u_1, u_2) P(u_1, u_2) du_1 du_2. \quad (23)$$

3. Корреляция между u_1 и u_2 :

$$\begin{aligned}\overline{u_1 u_2} &= \iint u_1 u_2 P(u_1, u_2) du_1 du_2 = \iint (\overline{u_1} + u'_1)(\overline{u_2} + u'_2) P(u_1, u_2) du_1 du_2 = \\ &= \overline{u_1 u_2} + \iint u'_1 u'_2 P(u_1, u_2) du_1 du_2 = \overline{u_1 u_2} + \overline{u'_1 u'_2}.\end{aligned}\quad (24)$$

Если u_1 и u_2 независимы (корреляция между ними отсутствует), то

$$P(u_1, u_2) = P_1(u_1)P_2(u_2), \quad \overline{u_1 u_2} = \overline{u_1} \overline{u_2} \text{ и } \overline{u'_1 u'_2} = 0, \quad (25)$$

иначе $\overline{u'_1 u'_2} = \overline{u_1 u_2} - \overline{u_1} \overline{u_2} \neq 0$ и, в частности, $\overline{u'^2} = \overline{u^2} - \overline{u}^2 \neq 0$.

4. Коэффициент корреляции

$$\rho_{12} = \frac{\overline{u'_1 u'_2}}{\sqrt{\overline{u'^2_1}} \sqrt{\overline{u'^2_2}}}, \quad -1 \leq \rho_{12} \leq 1. \quad (26)$$

Если рассматривается корреляция значений одной и той же величины в разные моменты времени или в разных точках пространства, то соответствующая характеристика называется *автокорреляцией*. Понятие автокорреляции во времени и в пространстве открывает возможность для формального определения интегральных пространственных и временных масштабов турбулентности.

1.2.2. Автокорреляция во времени и в пространстве

Коэффициент автокорреляции *во времени* определяется следующим образом:

$$\rho(\tau) = \frac{\overline{u'(t)u'(t+\tau)}}{\overline{u'^2}}, \quad (27)$$

где τ — промежуток времени между моментами измерения величины u' . С течением времени ($\tau \rightarrow \infty$) автокорреляция стремится к нулю, т. е. зависимость $\rho(\tau)$ имеет вид колокола (или купола) с вершиной при $\tau = 0$. *Интегральный временной масштаб* — это промежуток времени, по истечении которого корреляция становится малой (т. е. «забывается» предыдущее значение случайной величины).

$$\tau_t = \int_0^\infty \rho(\tau) d\tau. \quad (28)$$

Определение автокорреляции во времени и интегрального временного масштаба проиллюстрировано на рис. 7.

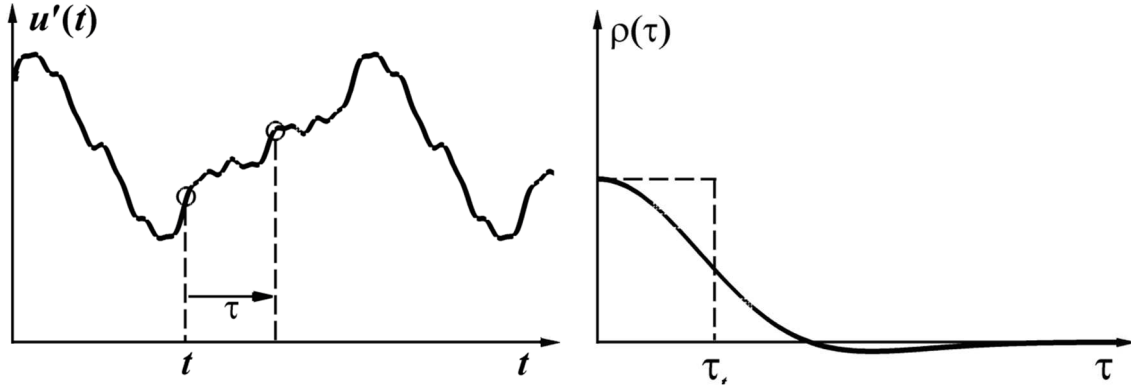


Рис. 7. Определение автокорреляции во времени и интегрального временного масштаба

Пространственная корреляция пульсаций скорости

$$R_{ij}(\vec{r}) = \overline{u'_i(\vec{x})u'_j(\vec{x} + \vec{r})} \quad (29)$$

определяется как функция радиус-вектора \vec{r} , имеющего начало в данной точке пространства \vec{x} . Величины $R_{ij}(\vec{r})$ образуют тензор, диагональные компоненты которого ($i = j$) соответствуют значениям пространственной автокорреляции для компонент скорости. Рассмотрим случай гомогенной (нет зависимости от \vec{x}) и изотропной (нет зависимости от направления вектора \vec{r}) турбулентности. Выберем произвольное направление \vec{e}_1 и определим *продольную* $R_{11}(r)$ и *поперечную* $R_{22}(r)$ автокорреляции пульсаций скорости

$$R_{11}(r) = \overline{u'_1(x)u'_1(x + r\vec{e}_1)}, \quad R_{22}(r) = \overline{u'_2(x)u'_2(x + r\vec{e}_1)} \quad (30)$$

и соответствующие им коэффициенты автокорреляции

$$\rho_{\parallel}(r) = \frac{R_{11}(r)}{u_1'^2}, \quad \rho_{\perp}(r) = \frac{R_{22}(r)}{u_2'^2}. \quad (31)$$

Отметим, что для изотропной турбулентности $R_{33}(r) = R_{22}(r)$.

Анализ пространственной зависимости каждого из коэффициентов автокорреляции (31) приводит к двум существенно разным пространственным масштабам турбулентности. Первый из них — *интегральный пространственный масштаб*, определяемый аналогично интегральному временному масштабу (28):

$$l_{\parallel} = \int_0^{\infty} \rho_{\parallel}(r) dr, \quad l_{\perp} = \int_0^{\infty} \rho_{\perp}(r) dr. \quad (32)$$

Продольный и поперечный интегральный масштабы связаны между собой, и можно показать (см., например, [34]), что для изотропной турбулентности $l_{\perp} = l_{\parallel}/2$. Интегральные масштабы соответствуют расстоянию вдоль выбранного направления, на котором корреляция между флуктуациями скорости становится малой. Это позволяет интерпретировать их как характерный размер крупных вихрей, для которого ранее было введено обозначение l_t . Как показано на рис. 8, флуктуация в данной точке слабо влияет на флуктуации в точках на расстояниях больше l_t .

Численное значение интегрального масштаба может зависеть от направления в пространстве, если турбулентность анизотропна. Например, значение интегрального масштаба вдоль потока может заметно превосходить соответствующее значение в поперечном направлении.

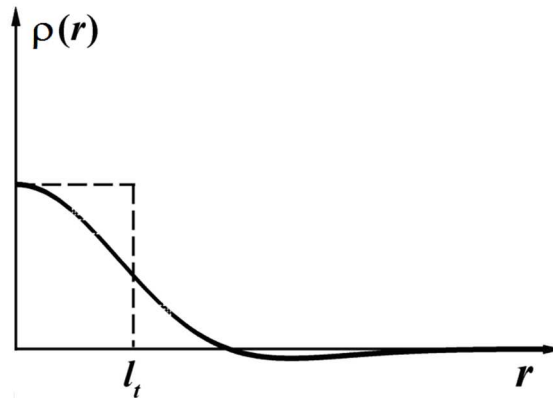


Рис. 8. Определение интегрального пространственного масштаба

Ещё один пространственный масштаб, связанный с пространственной зависимостью (31), — так называемый *тейлоровский микромасштаб*, который определяется следующим образом. С учётом симметрии функции $\rho_{\parallel}(r)$ относительно $r = 0$ будем иметь:

$$\rho_{\parallel}(r) = 1 + \underbrace{\frac{d\rho_{\parallel}}{dr}}_{=0} \Big|_{r=0} r + \frac{1}{2} \frac{d^2\rho_{\parallel}}{dr^2} \Big|_{r=0} r^2 + \dots = 1 - \frac{r^2}{\lambda_{\parallel}^2} + \dots, \quad (33)$$

где

$$\lambda_{\parallel}^2 = -\frac{2}{\left(d^2\rho_{\parallel}/dr^2\right)_{r=0}} \quad (34)$$

величина, имеющая размерность длины и представляющая продольный тейлоровский микромасштаб. Поперечный микромасштаб λ_{\perp} определяется аналогично на основе функции $\rho_{\perp}(r)$, причём для изотропной турбулентности $\lambda_{\perp} = \lambda_{\parallel}/\sqrt{2}$ [34]. Определение тейлоровского микромасштаба объясняется на рис. 9.

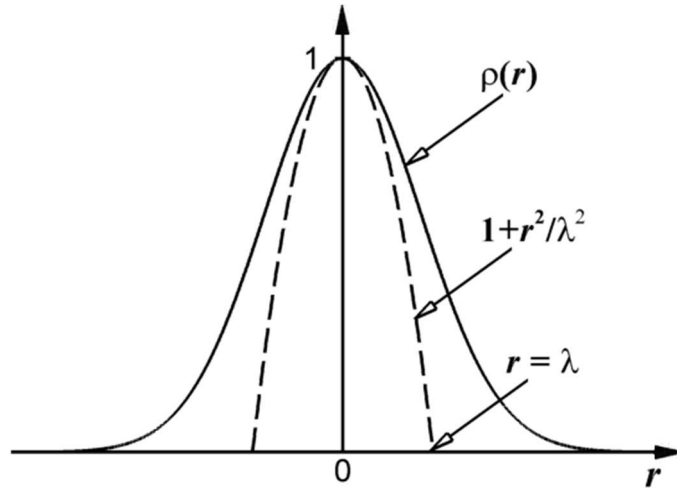


Рис. 9. Определение тейлоровского микромасштаба

Для изотропной турбулентности можно показать [34], что имеет место равенство

$$\overline{\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\right)^2} = \frac{2\overline{u'^2}}{\lambda_{\parallel}^2}. \quad (35)$$

Используя равенство (11), с учётом (35) получим формулу

$$\varepsilon \approx \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\right)^2} = 15\nu \frac{2\overline{u'^2}}{\lambda_{\parallel}^2} = 15\nu \frac{\overline{u'^2}}{\lambda_{\perp}^2}, \quad (36)$$

впервые выведенную Дж. Тейлором в 1935 г. Из формулы Тейлора (36) следует, в частности, что

$$\lambda_{\perp} = \sqrt{15} u' \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \sim u' \tau_K. \quad (37)$$

Кроме того можно убедиться, что тейлоровский микромасштаб выражается через l_t и η_K :

$$\frac{\lambda_{\perp}}{l_t} = \sqrt{\frac{20}{3}} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_t}} \text{ и } \lambda_{\perp} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/6} \sqrt{10} \eta_K^{2/3} l_t^{1/3}. \quad (38)$$

Последнее из равенств (38) показывает, что в условиях развитой турбулентности тейлоровский микромасштаб является промежуточным между наибольшим l_t и наименьшим η_K пространственными масштабами. В соответствии с (37) тейлоровский микромасштаб можно интерпретировать как расстояние, на которое перемещаются мелкие вихри за время их жизни τ_K в результате их переноса крупными энергосодержащими вихрями (имеющими характерную скорость u').

Тейлоровский микромасштаб используется для определения специального числа Рейнольдса:

$$\text{Re}_{\lambda} = \frac{u' \lambda_{\perp}}{\nu} = \sqrt{\frac{20}{3}} \frac{k^2}{\varepsilon \nu} = \sqrt{\frac{20}{3}} \text{Re}_t, \quad (39)$$

где $\text{Re}_t = u' l_t / \nu = k^2 / \varepsilon \nu$. Число Рейнольдса⁷ (39) используют для представления результатов измерений характеристик турбулентного течения.

1.2.3. Спектр пульсаций скорости

При анализе турбулентных пульсаций полезным инструментом является преобразование Фурье. Прямое и обратное преобразование Фурье для компонент тензора (29) имеет вид:

$$\Phi_{ij}(\vec{\mathbf{k}}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int R_{ij}(\vec{\mathbf{r}}) e^{-i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}} d\vec{\mathbf{r}}, \quad R_{ij}(\vec{\mathbf{r}}) = \int \Phi_{ij}(\vec{\mathbf{k}}) e^{i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}} d\vec{\mathbf{k}}, \quad (40)$$

где $\mathbf{k} = 2\pi/l$ — волновое число, l — длина волны. Отметим, что зависимости $\Phi_{ij}(\vec{\mathbf{k}})$ и $R_{ij}(\vec{\mathbf{r}})$ содержат одну и ту же информацию об изменяющемся во времени поле $u'_i(\vec{\mathbf{x}})$. Если $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$, то

⁷ Иногда полагают $\text{Re}_{\lambda} = \sqrt{k} \lambda_{\perp} / \nu$, тогда $\text{Re}_{\lambda} = \sqrt{10} \text{Re}_t$.

$$R_{ij}(\vec{0}) = \overline{u'_i u'_j} = \int \Phi_{ij}(\vec{k}) d\vec{k}. \quad (41)$$

Напомним, что энергетический спектр турбулентных пульсаций $E(\kappa)$ определяется так, что $E(\kappa)d\kappa$ представляет вклад кинетической энергии турбулентности $k = \overline{u'_j u'_j} / 2$ в диапазоне волновых чисел $\kappa \leq |\vec{k}| < \kappa + d\kappa$. С учётом определения энергетического спектра $E(\kappa)$ его можно интерпретировать как интеграл от $\Phi_{jj}(\vec{k})$ в пространстве волновых чисел по сфере радиуса κ :

$$E(\kappa) = \frac{1}{2} \int \Phi_{jj}(\vec{k}) \delta(|\vec{k}| - \kappa) d\vec{k}. \quad (42)$$

С учётом свойств преобразования Фурье и определения скорости диссипации кинетической энергии турбулентности можно показать, что

$$\varepsilon = 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}} = \int \nu |\vec{k}|^2 \Phi_{jj}(\vec{k}) d\vec{k}. \quad (43)$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$k = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa, \quad \varepsilon = \int_0^\infty 2\nu \kappa^2 E(\kappa) d\kappa. \quad (44)$$

Переход от $\Phi_{ij}(\vec{k})$ к $E(\kappa)$ означает потерю информации о направлениях в пространстве. Следовательно, $\Phi_{ij}(\vec{k})$ полностью определяется энергетическим спектром $E(\kappa)$ только в случае изотропной турбулентности.

До сих пор энергетический спектр турбулентных пульсаций рассматривался как функция пространственных масштабов (рис. 4). Естественно ожидать, что возможен переход от пространственных масштабов (длина волны) к временным (частота). Возможность такого перехода основывается на гипотезе Тейлора, которая утверждает, что если пульсации скорости u' малы по сравнению с её средним значением \bar{u} , то

$$\frac{\overline{u'(x,t)u'(x,t+\tau)}}{\overline{u'^2(x,t)}} \approx \frac{\overline{u'(x,t)u'(x+\bar{u}\tau,t)}}{\overline{u'^2(x,t)}}. \quad (45)$$

Приближённое равенство (45) означает, что временные и пространственные корреляции несут почти идентичную информацию о пульсациях скорости. Следовательно, для построения энергетического спектра можно

использовать измеренное или расчётное изменение скорости во времени в данной точке турбулентного потока.

1.2.4. Фазовое осреднение

Наблюдения за турбулентными течениями, например в следах за плохообтекаемыми телами, где образуется обширный отрыв потока, указывают на их неоднозначную природу. В самом деле, как видно на рис. 5 и 10, *хаотические* турбулентные пульсации в следе взаимодействуют с *упорядоченными* крупномасштабными вихрями. При этом течение за пределами указанных вихрей остаётся ламинарным, в результате чего состояние течения в данной точке пространства может быть как ламинарным, так и турбулентным (*перемежаемость*).

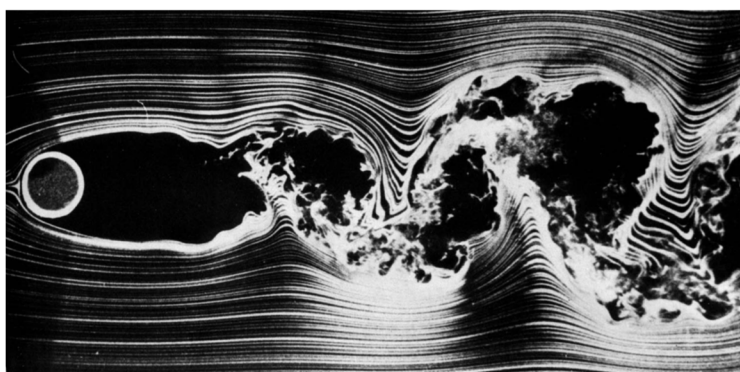


Рис. 10. Обтекание кругового цилиндра [2] ($Re = 10^4$)

Для течений такого типа характерна периодичность зависимостей скорости и давления от времени, причём период колебаний определяется частотой образования и отрыва новых крупномасштабных вихрей. Пример такой зависимости показан на рис. 11, *a*, где, в частности, приведены результаты измерения мгновенной скорости в точке, расположенной в турбулентном следе за круговым цилиндром [12].

Разложение (2) оказывается недостаточным для описания течений такого типа, поскольку не зависящее от времени осреднённое поле \bar{u}_i слишком сильно отличается от мгновенного даже на качественном уровне (в отличие от реального, осреднённое поле симметрично).

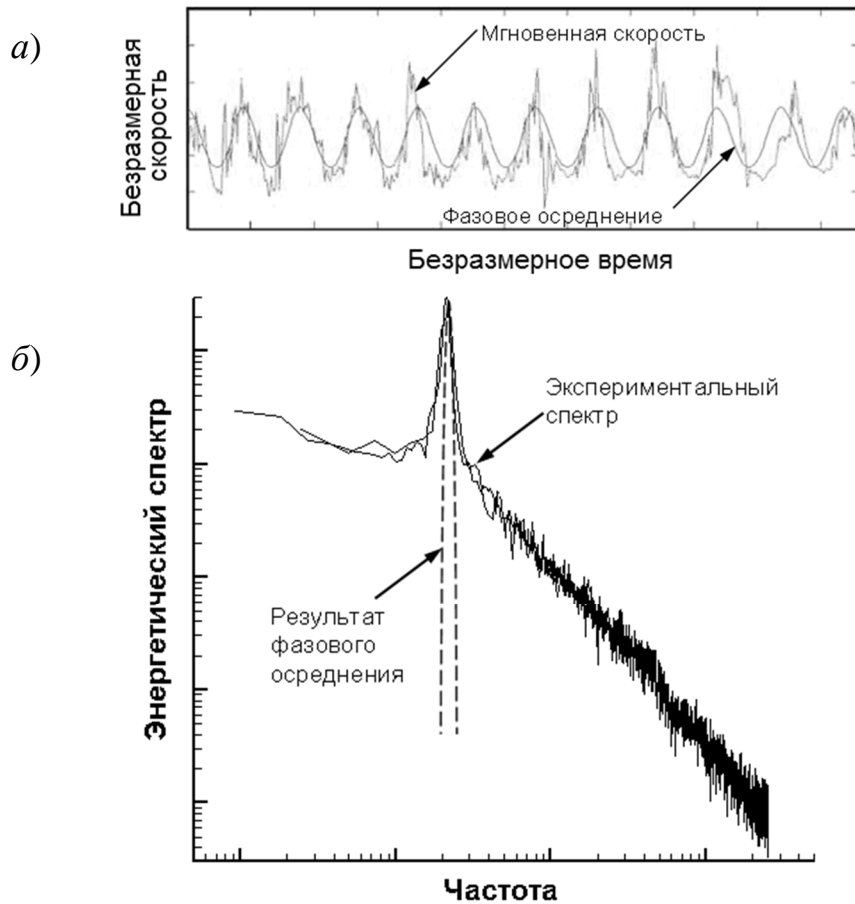


Рис. 11. Скорость в турбулентном следе за круговым цилиндром при $Re = 1,4 \cdot 10^5$ [12]: *a* — измеренная зависимость мгновенной скорости от времени и результат её фазового осреднения; *б* — энергетический спектр скорости

В связи с этим в работе [35] было предложено так называемое тройное разложение

$$u_j(t) = \bar{u}_j + \hat{u}_j(t) + u'_j(t), \quad (46)$$

которое предусматривает два вида осреднения. Первый из них — *осреднение по времени* (3), результат которого \bar{u}_j не зависит от времени. Вторым видом осреднения называют *фазовым*, поскольку выполняется осреднение тех значений $u_j(t)$, которые соответствуют одной и той же фазе периодических колебаний, вызванных крупномасштабными вихрями. Фазовое осреднение мгновенной скорости (46) приводит к следующему результату:

$$\langle u_j(t) \rangle = \underbrace{\langle \bar{u}_j + \hat{u}_j(t) \rangle}_{= \bar{u}_j + \hat{u}_j(t)} + \underbrace{\langle u'_j(t) \rangle}_{= 0} = \bar{u}_j + \hat{u}_j(t). \quad (47)$$

В результате фазового осреднения в разложении (47) появляется зависящий от времени периодический сигнал $\hat{u}_j(t)$, который позволяет описать крупномасштабную нестационарность турбулентного течения. Зависимость $\hat{u}_j(t)$ показана гладкой кривой на рис. 11, а.

Как показывает опыт, частота указанных колебаний намного меньше частоты турбулентных пульсаций, а характерный размер порождающих эти колебания вихрей сопоставим с размерами обтекаемого тела. Характерные частоты $\hat{u}_j(t)$ и $u'_j(t)$ существенно различны по величине, поскольку различна физическая природа соответствующих величин. Действительно, величина $\hat{u}_j(t)$ соответствует крупномасштабным упорядоченным вихрям, а величина $u'_j(t)$ — маломасштабным хаотическим турбулентным пульсациям.

Результат применения осреднения по времени и фазового осреднения к измеренным полям скорости в турбулентном следе за круговым цилиндром показан на рис. 12 и 13, где использованы данные работы [12]. Хорошо видно (рис. 12), что *осреднение по времени* приводит к симметричному полю скорости с рециркуляционной зоной, состоящей из двух противоположно направленных вихрей. В реальном течении (см., например, рис. 10) такие вихри одновременно не существуют. Наблюдения показывают, что указанные вихри зарождаются и отрываются от тела поочередно и периодически. Эта особенность течения воспроизводится нестационарным полем, полученным в результате *фазового осреднения*. Такое нестационарное поле скорости показано на рис. 13, где приведены линии тока, соответствующие четырём последовательным моментам времени внутри одного периода крупномасштабных колебаний.

Приведённые закономерности турбулентных течений позволяют распространить статистические методы моделирования турбулентности (изначально разработанные для статистически стационарных течений) на течения с крупномасштабной нестационарностью потока.

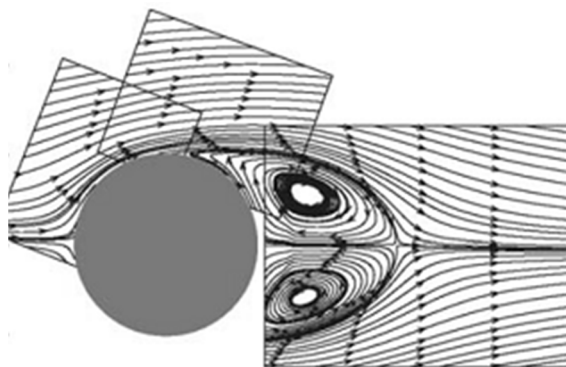


Рис. 12. Турбулентное обтекание кругового цилиндра при $Re = 1,4 \cdot 10^5$ [12]: изолинии поля скорости, осреднённого по времени

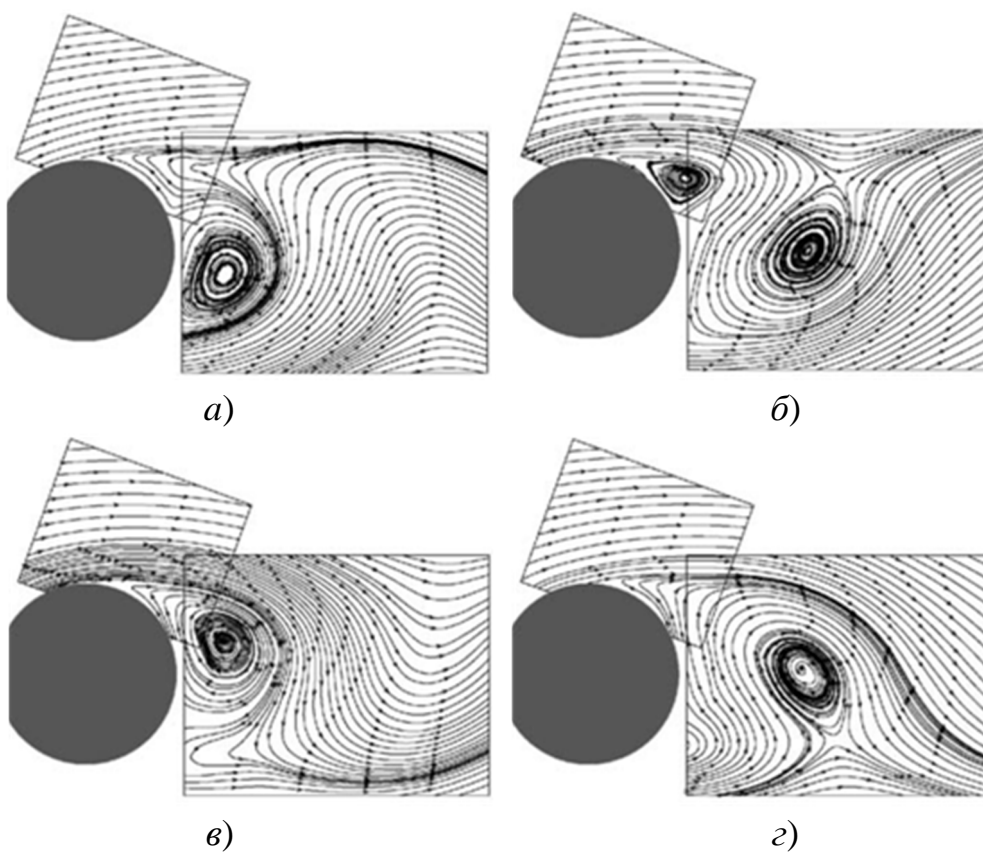


Рис. 13. Турбулентное обтекание кругового цилиндра при $Re = 1,4 \cdot 10^5$ [12]: *а, б, в, г* — линии тока поля скорости, полученные в результате фазового осреднения мгновенного поля (четыре последовательных момента времени внутри одного периода)

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

2.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1.1. Уравнения Навье–Стокса

Течение сплошной среды (жидкости или газа) описывается системой уравнений Навье–Стокса, в состав которой входят уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (48)$$

и уравнения движения

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (49)$$

Уравнения движения (49) представляют три уравнения переноса для проекций скорости, где p — давление, τ_{ij} — компоненты тензора сдвиговых напряжений (здесь предполагается отсутствие объёмных сил, действующих на жидкость).

Выделяют особый класс течений жидкости — несжимаемые течения, в которых плотность среды постоянна:

$$\rho = \text{const}. \quad (50)$$

Данный предельный случай соответствует бесконечно малому числу Маха $Ma = u/c$, где u — скорость жидкости, а c — скорость звука в жидкости. Кроме того, постоянство плотности означает постоянную температуру и химический состав. В несжимаемой жидкости уравнение неразрывности принимает вид условия нулевой дивергенции поля скорости:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (51)$$

Для так называемых *ньютоновских* жидкостей имеет место линейная связь между τ_{ij} и компонентами тензора скоростей деформации $S_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$:

$$\tau_{ij} = 2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (52)$$

где μ — динамическая вязкость. Соотношение (52) называют гипотезой Стокса⁸. Подстановка (52) в (49) даёт уравнения движения в виде:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (53)$$

Если же плотность и, кроме того, вязкость жидкости постоянны, то уравнение движения (53) принимает вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (54)$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость.

В несжимаемой жидкости давление играет особую роль. Как показано в Приложении 1, численная эффективность расчётных процедур в большой степени обусловлена затратами времени на расчёт поля давления.

2.1.2. Уравнение переноса скаляра

При решении практических задач, связанных с теплообменом, горением, распространением примесей требуется определение не только векторного поля скорости, но и скалярных полей, например температуры или концентрации. Здесь будет рассмотрена обобщённая скалярная величина ϕ , в уравнении переноса которой отсутствуют источники и стоки (предполагается несжимаемое течение с постоянной плотностью):

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \mathcal{D} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}, \quad (55)$$

где \mathcal{D} — коэффициент диффузии (размерность $\text{м}^2/\text{с}$). Скаляр ϕ , поле которого описывается уравнением (55), называют пассивным (поскольку его значение не влияет на остальные характеристики среды). Интегрируя

⁸ Отметим, что в скобках в правой части (52) стоит так называемая *анизотропная* часть тензора скоростей деформации. Для несжимаемой жидкости $S_{kk} = \partial u_k / \partial x_k = 0$ (см. уравнение неразрывности (48)).

уравнение (55) по объёму расчётной области V , можно убедиться, что интеграл $\int_V \rho \phi dV$ изменяется только за счёт потоков на границах.

2.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

2.2.1. Основные подходы к моделированию турбулентности

Классификация существующих подходов к численному моделированию турбулентных течений основана на степени детальности разрешения турбулентных пульсаций и их энергетического спектра. С учётом этого признака выделяют три основных подхода (DNS, LES и RANS) для которых на рис. 14 отмечено, какая часть спектра разрешается явным образом в численном расчёте, а какая учитывается с помощью приближённого моделирования. Краткое представление трёх названных подходов дадим в том порядке, в каком они подробнее обсуждаются далее в данной главе.

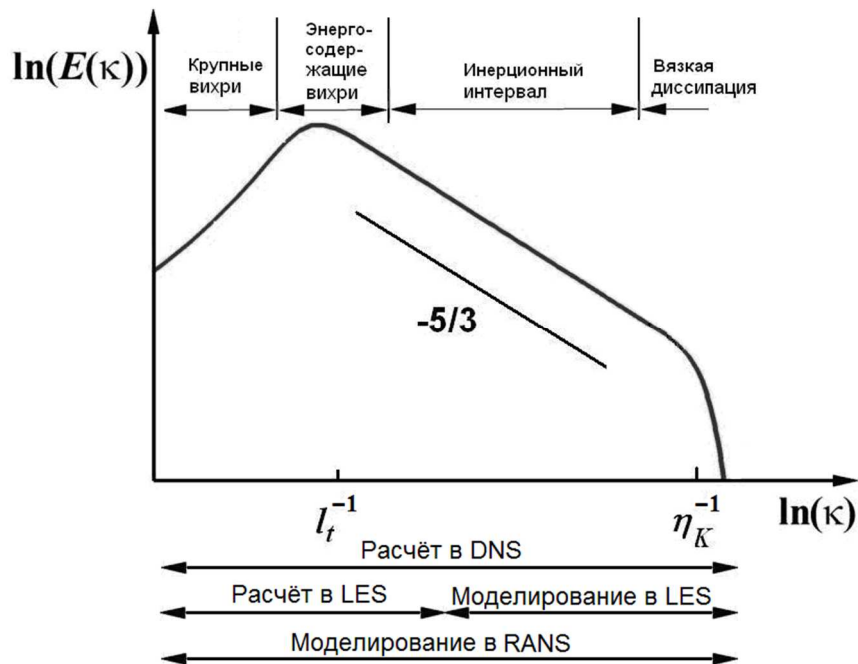


Рис. 14. Вычисляемая и моделируемая части энергетического спектра турбулентных пульсаций при использовании методов DNS, LES и RANS

Модели на основе осреднения по Рейнольдсу или Фавру (Reynolds-averaged Navier–Stokes, RANS). Этот класс моделей имеет следующие особенности.

- Исходные уравнения осредняются по всему спектру пульсаций в соответствии с определением (3). В результате в осреднённых уравнениях появляются неизвестные корреляции пульсирующих величин, без определения которых осреднённые уравнения не могут быть решены (проблема замыкания). Для решения проблемы замыкания привлекаются модели турбулентности, которые выражают неизвестные корреляции через известные (точнее — искомые) осреднённые значения.

- Численное решение представляет поля средних значений.

- С учётом определения (3), такое решение стационарно (не зависит от времени) и иногда обозначается аббревиатурой SRANS (Steady RANS). Однако существует особая разновидность методов численного моделирования турбулентных течений, в которых приближённо учитывается их нестационарность. Такой подход получил короткое название URANS (Unsteady RANS).

Теоретическое обоснование URANS сталкивается с методическими трудностями, связанными с определением средних величин. Одна из возможных интерпретаций предполагает использование в качестве определения равенства, аналогичного (3), но с конечным значением периода осреднения T :

$$\bar{u}_j(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u_j(t') dt'. \quad (56)$$

При этом значение T должно, с одной стороны, намного превышать максимальный период турбулентных пульсаций, а с другой — быть намного меньше характерного времени, связанного с крупномасштабной нестационарностью. Такая нестационарность может быть обусловлена меняющимся во времени внешним воздействием (например, движение корабельного винта или поршня в цилиндре двигателя), либо крупномасштабными упорядоченными вихревыми структурами, примеры которых показаны в разделе 1.2.4.

Другая возможная интерпретация физического смысла величин, получаемых методом URANS, связана с концепцией фазового осреднения характеристик течений, содержащих указанные крупномасштабные вихри (см. раздел 1.2.4). В последнем случае под величиной $\bar{u}_j(t)$ следует пони-

мать сумму $\bar{u}_j + \hat{u}_j(t)$, где \bar{u}_j — не зависящее от времени среднее в соответствии с классическим определением (3), а $\hat{u}_j(t)$ — результат фазового осреднения (зависящая от времени величина, учитывающая крупномасштабные колебания с частотой намного меньше частот маломасштабных турбулентных пульсаций, и входящая в состав тройного разложения (47)).

Таким образом, в методах URANS получают нестационарные решения для полей, осреднённых по конечному промежутку времени времени или по фазе крупномасштабных колебаний. Диапазон частот, адекватно воспроизводимых численным решением URANS, крайне узок. Метод URANS не ставит целью воспроизвести реальный спектр турбулентных пульсаций. Метод URANS используют, чтобы воспроизвести крупномасштабные периодические пульсации течения, как показано на рис. 15, а.

- В ряде случаев численное решение нестационарных уравнений метода URANS приводит к стационарным решениям. С другой стороны, решения стационарных уравнений RANS могут не существовать. Свидетельством этого обычно является то, что норма невязки системы дискретных уравнений (получающихся при применении методов конечных объёмов для дискретизации уравнений Навье–Стокса на данной расчётной сетке) не стремится к малому постоянному значению, а осциллирует с большой амплитудой.

- Несмотря на то, что мгновенные характеристики турбулентного течения изменяются случайным образом, численное решение, полученное методом RANS, не является случайным; средние значения детерминированы.

- Численное решение зависит от пространственной сетки и шага по времени. Однако последовательное уменьшение ячеек пространственной сетки и шагов по времени в принципе позволяет получить сеточно-независимое (точное) решение уравнений RANS. Следует отметить, что на практике такое решение оказывается трудно достижимым. В связи с этим важно оценить ожидаемое отклонение полученного численного решения от сеточно-независимого предела. Такая оценка погрешности численного расчёта аналогична погрешности натурного эксперимента.

- Уменьшение размеров ячеек сетки и шага по времени приводит к уточнению решения осреднённых уравнений, но не означает расширения спектра разрешённых пространственных и временных флуктуаций.

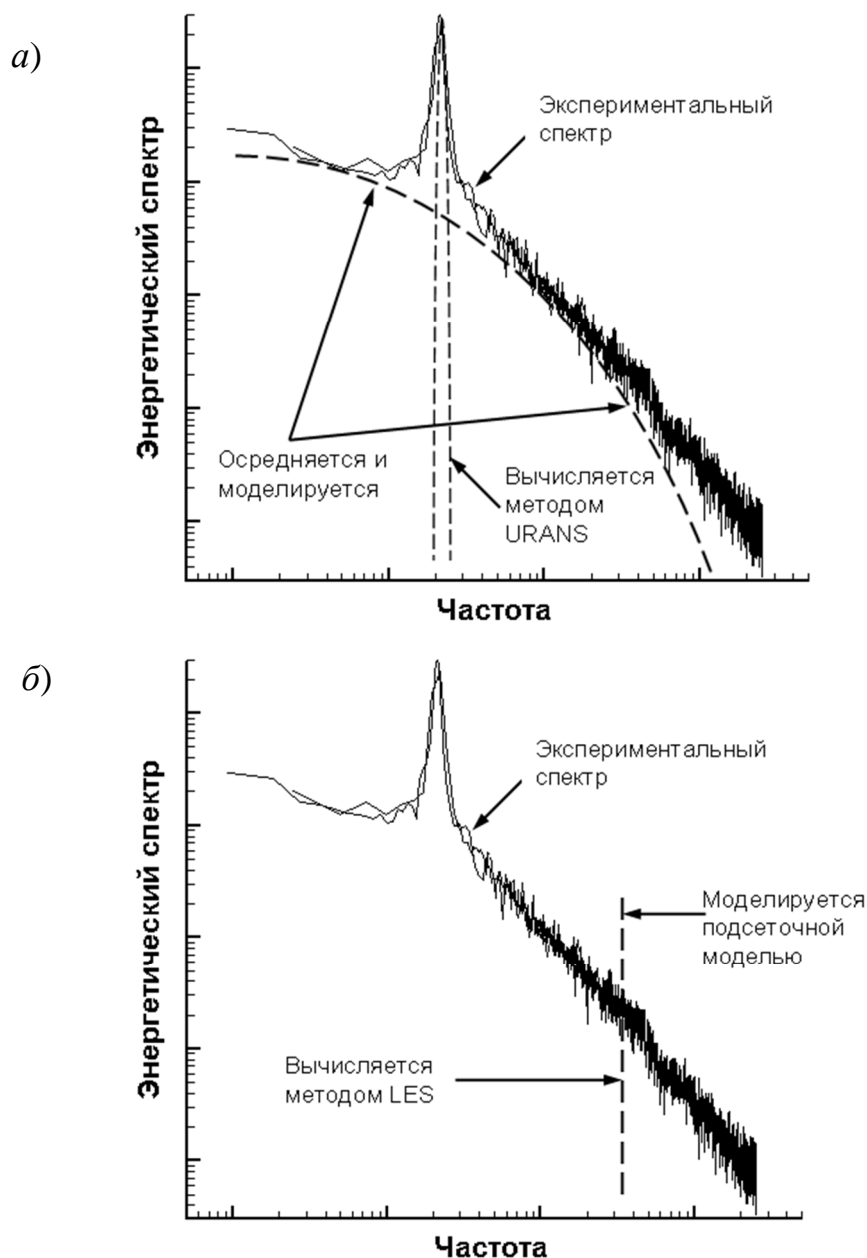


Рис. 15. Вычисляемая и моделируемая части энергетического спектра турбулентных пульсаций: а — URANS, б — LES

- Существуют модели RANS, разработанные для полностью развитой турбулентности и предназначенные для расчёта течений при больших числах Рейнольдса. Такие модели, называемые *высокорейнольдсовыми* (high-Re models), требуют постановки специальных граничных условий в пристеночных областях, где турбулентность затухает. Указанные граничные условия ставятся не на твёрдой поверхности, а за пределами пристен-

ного слоя (так называемого вязкого подслоя), в котором турбулентные пульсации пренебрежимо малы. Благодаря этому размер первого пристенного контрольного объёма сетки может быть достаточно большим. Отметим, что формулировка граничных условий опирается на приближённое аналитическое решение для профиля средней скорости в пограничном слое, а сами граничные условия получили название *пристеночных функций* (раздел 2.3.1.1).

Модели RANS, уравнения которых справедливы во всей расчётной области, включая пристенные участки, называют *низкорейнольдсовыми* (low-Re models). В этом случае расчётная сетка в пристеночной области должна быть более мелкой, чем при использовании высокорейнольдсовых моделей, — такой, чтобы в вязком подслое находилось достаточно большое число элементов.

Моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES). Данный подход основан на следующих принципах.

- Исходные уравнения фильтруются (сглаживаются) интегрированием по пространству с весовой функцией. Весовая функция (фильтр) имеет форму колокола или ступеньки, ширина которых либо задаётся независимо (явное фильтрование), либо, как это делается в наиболее распространённых на практике расчётах, определяется размером ячеек сетки (неявное фильтрование при замене дифференциальных уравнений переноса их дискретными аналогами).

- В отфильтрованных уравнениях появляются неизвестные корреляции, отражающие вклад турбулентных движений с масштабами меньше размеров фильтра или, в случае неявного фильтрования, ячеек сетки (подсеточная турбулентность). Приближённое вычисление подсеточных корреляций с использованием отфильтрованных величин означает моделирование коротковолновой части спектра.

- Численное решение отфильтрованных уравнений даёт нестационарные поля случайных величин. Численное решение зависит от используемой расчётной сетки и метода дискретизации уравнений. При этом энергетический спектр скорости, полученной при численном решении, воспроизводит длинноволновую часть реального спектра, включая значительную часть инерционного интервала (рис. 15, б).

- Численное разрешение длинноволновой части спектра должно быть таким, чтобы решение (разрешённое поле) содержало значительную часть кинетической энергии турбулентности⁹.

- Уменьшение размеров ячеек сетки означает переход к явному разрешению всё более мелких пространственных масштабов (в пределе — к прямому численному моделированию). Имеет место сеточная зависимость решения: при измельчении сетки в решении появляются всё более высокочастотные компоненты, что означает расширение разрешённого спектра (рис. 14) в область высоких частот и малых длин волн.

- При достаточном разрешении расчётной сетки роль подсеточных моделей значительно меньше, чем роль моделей турбулентности при осреднении уравнений по всему спектру, так как подсеточная турбулентность содержит малую часть кинетической энергии турбулентности.

- В связи с тем, что вблизи твёрдых поверхностей турбулентность становится анизотропной, а размер турбулентных вихрей уменьшается, явное численное разрешение турбулентных пульсаций требует использования гораздо более мелкой расчётной сетки, чем в условиях развитой турбулентности вдали от стенок. Для ослабления этого требования применяют специальные модификации подсеточных моделей в пристеночной области.

Для прямого численного моделирования турбулентности (Direct Numerical Simulation, DNS) требуется численное разрешение *всех* пространственных и временных масштабов, от крупных до колмогоровских. Поскольку разрыв между крупными и колмогоровскими масштабами увеличивается с ростом числа Рейнольдса потока (подробнее см. в разделе 1.1), вычислительные затраты на выполнение прямого численного моделирования очень сильно зависят от Re . В самом деле, согласно (15) имеет место соотношение $l_t/\eta_K \sim Re_t^{3/4} \sim Re^{3/4}$, из которого следует, что число

⁹ В книге [34] рекомендуется считать, что корректное численное решение, полученное методом LES, должно воспроизводить не менее 80% кинетической энергии турбулентности, за исключением, может быть, пристеночных областей. В последнем случае требуется специальная модель для расчёта характеристик турбулентности в пристеночной области (LES-NWM, LES Near-Wall Modeling). Для обозначения метода LES, в котором указанная доля кинетической энергии воспроизводится численно всюду в расчётной области (в том числе вблизи твёрдых поверхностей), используют аббревиатуру LES-NWR (LES Near-Wall Resolution).

необходимых расчётных точек в трёхмерном пространстве с учётом продвижения по времени оказывается пропорциональным Re^3 . Это приводит к тому, что вычислительные затраты на прямое численное моделирование растут быстрее, чем Re^3 . В результате оказывается, что на данном уровне развития вычислительных ресурсов возможно прямое численное моделирование течений с числом Рейнольдса не выше некоторого предела. Несмотря на то, что указанное предельное значение из года в год увеличивается, можно утверждать: прямое численное моделирование течений, имеющих практическое значение в инженерной деятельности, ещё достаточно долго будет недоступно¹⁰. В связи с этим, прямое численное моделирование в данном учебном пособии не рассматривается.

Следует отметить, что существуют и гибридные подходы. Среди них следует упомянуть методы, сочетающие уравнения RANS и LES — например, так называемое моделирование отсоединённых вихрей (Detached Eddy Simulation, DES). В последние годы разрабатываются сравнительно новые подходы на основе нестационарных RANS-формулировок, которые позволяют получать решения, имеющие черты решений LES. К ним относятся методы адаптируемых масштабов (Scale-Adaptive Simulation, SAS) и методы частичного осреднения (Partially Averaged Navier–Stokes, PANS), которые, как и DES, кратко обсуждаются в конце этой главы.

Классификация и взаимосвязь методов моделирования турбулентных течений приведена на рис. 16. В категорию гибридных методов здесь отнесены такие подходы, которые комбинируют расчетные процедуры и принципы разных подходов. Например, отказ от явного использования подсеточных моделей при одновременной невозможности разрешить численно все масштабы турбулентных пульсаций квалифицируется как псевдо DNS¹¹. С этой точки зрения получение изменяющихся во времени чис-

¹⁰ Здесь мы оставляем в стороне вопрос о целесообразности прямого численного моделирования, которое даёт большое количество информации, в ряде случаев избыточной для инженерной практики.

¹¹ Представитель такого подхода — метод MILES — обсуждается ниже, в разделе 2.2.7.5. Следует отметить, что неспособность метода воспроизвести *весь* спектр турбулентных пульсаций не позволяет квалифицировать его как DNS. С этой точки зрения метод MILES имеет лишь формальное сходство с DNS (не используются подсеточные модели турбулентности), но принципиально отличается от DNS тем, что не воспроизводит коротковолновую часть спектра.

ленных решений нестационарных уравнений Рейнольдса тоже имеет признаки гибридного метода: исходная формулировка RANS предполагает осреднение пульсаций по *всему* спектру.

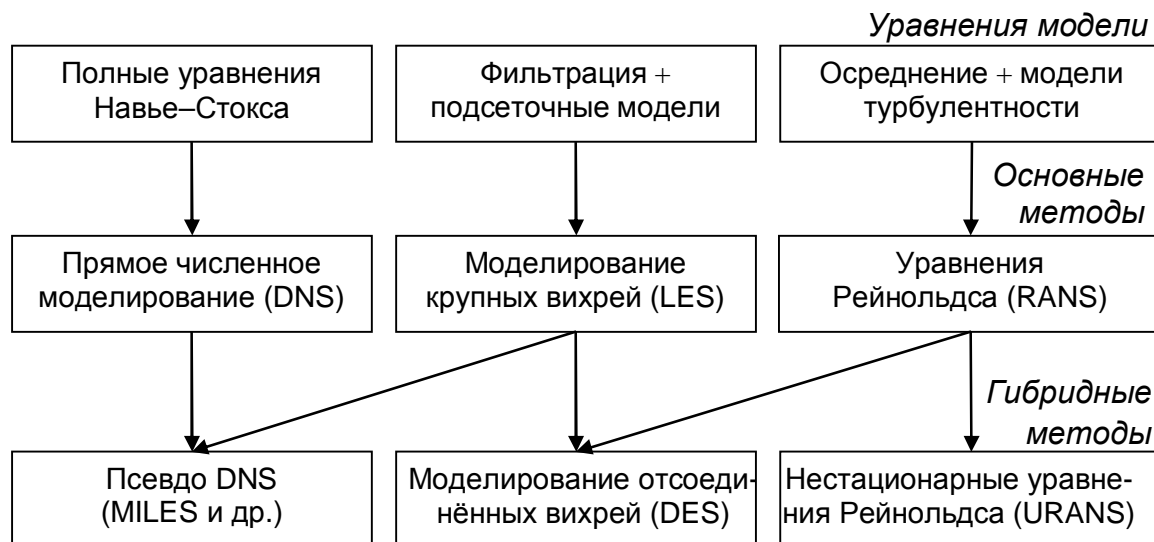


Рис. 16. Методы моделирования турбулентных течений [3]

Далее в данной главе подробно рассматриваются методы моделирования турбулентности на основе RANS и LES. После изучения этой главы полезно ещё раз вернуться к перечню особенностей этих методов, приведённому в этом разделе. Отметим также, что детальная классификация и многочисленные примеры применения методов моделирования турбулентных течений приведены в недавно изданной книге [3].

2.2.2. Уравнения Рейнольдса и проблема замыкания

Уравнения Навье–Стокса позволяют получить уравнения переноса для средних значений величин, случайным образом пульсирующих в турбулентном потоке. В частности, уравнения для компонент средней скорости \bar{u}_i были впервые получены О. Рейнольдсом в 1894 г. и теперь носят его имя. Вывод уравнений Рейнольдса использует разложение мгновенного значения скорости u на сумму среднего¹² значения \bar{u} и пульсационной составляющей u' :

¹² Напомним, что допускается зависимость среднего значения от времени. Физический смысл такого подхода (метод URANS) обсуждается в разделе 2.2.1.

$$u = \bar{u} + u', \quad (57)$$

где средняя флуктуация равна нулю, а повторное осреднение не изменяет результат:

$$\overline{u'} = 0, \quad \overline{\bar{u}} = \bar{u}. \quad (58)$$

Отметим, кроме того, что имеют место равенства:

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}, \quad \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad (59)$$

которые означают, что операции дифференцирования (как по времени, так и по пространству) и осреднения коммутируют [34, 5].

2.2.2.1. Уравнение неразрывности

Подстановка разложения (57) в уравнение неразрывности (51) и его последующее осреднение (с учётом (59)) приводит к равенствам:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (60)$$

и

$$\frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_j} = 0. \quad (61)$$

Отметим, что если плотность не постоянна, то такая же процедура может быть применена и к уравнению неразрывности (48). Однако в этом случае следует учесть, что $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, в результате чего в осреднённом уравнении неразрывности появляются корреляции вида $\overline{\rho' u'_j}$. Для того, чтобы избежать появления таких корреляций в осреднённых уравнениях, Фавр (в 1969 г.) предложил иной алгоритм осреднения:

$$u_j = \tilde{u}_j + u''_j, \quad (62)$$

где

$$\tilde{u}_j = \frac{\overline{\rho u_j}}{\bar{\rho}} \quad (63)$$

среднемассовое (среднее по Фавру) значение случайной величины u_j . Отметим, что $\overline{\tilde{u}_j} = 0$. Можно убедиться, что в этом случае осреднённое урав-

нение неразрывности не содержит дополнительных корреляций и имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (64)$$

Следует подчеркнуть, что избежать появления корреляций пульсаций плотности и других искомым величин удалось за счет чисто формального изменения определения средней величины. Средние по Фавру и по Рейнольдсу не эквивалентны, а их численные значения могут существенно различаться в течениях с большими перепадами плотности (например, в течениях с горением). Между двумя средними имеет место следующая связь:

$$\bar{\rho} \tilde{u}_j = \overline{\rho u}_j + \overline{\rho' u'_j}. \quad (65)$$

Экспериментально определяемые средние величины могут быть интерпретированы как \bar{u}_j или \tilde{u}_j в зависимости от метода измерений. Если флуктуации плотности невелики, то корреляциями $\overline{\rho' u'_j}$ пренебрегают, в результате чего получают осреднённое уравнение неразрывности следующего вида:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (66)$$

которое используется далее в данном пособии.

2.2.2.2. Уравнения движения

Принципиальной особенностью уравнений движения (54) является наличие *нелинейных* членов, содержащих произведения $u_j u_i$. Легко показать, что среднее значение для этого произведения имеет вид:

$$\overline{u_j u_i} = \overline{(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_i + u'_i)} = \bar{u}_j \bar{u}_i + \overline{u'_j u'_i}. \quad (67)$$

Отметим, что в правой части равенства (67) присутствует корреляция $\overline{u'_j u'_i}$. Подстановка разложения (57) в уравнения движения (53), (54) и их последующее осреднение дают, с учётом (67), следующие уравнения переноса для компонент средней скорости:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p} \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_j u'_i} \right) \quad (68)$$

или, в несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_j u'_i}}{\partial x_j}. \quad (69)$$

Видно, что по виду осреднённые уравнения (68), (69) почти совпадают с исходными уравнениями (53), (54) для мгновенных значений скорости. Однако есть и принципиальное отличие, которое порождается корреляциями $\overline{u'_j u'_i}$. Поскольку в уравнении (68) величины $-\overline{\rho u'_j u'_i}$ занимают такое же место, как и сдвиговые напряжения τ_{ij} в уравнении (49), корреляции $-\overline{u'_j u'_i}$ называют *рейнольдсовыми* (или турбулентными) *напряжениями*.

Физическая интерпретация рейнольдсовых напряжений использует аналогию с вязкими напряжениями τ_{ij} , которые характеризуют перенос импульса за счёт молекулярных столкновений. Рейнольдсовы напряжения также характеризуют перенос импульса — за счёт перемешивания в пульсирующем турбулентном потоке.

Рейнольдсовы напряжения образуют тензор второго порядка (матрица 3×3), компоненты которого симметричны относительно диагонали: $\overline{u'_j u'_i} = \overline{u'_i u'_j}$. Диагональные компоненты $\overline{u'^2_1}$, $\overline{u'^2_2}$ и $\overline{u'^2_3}$ играют роль нормальных, а остальные — касательных напряжений. Кинетическая энергия турбулентности (4) равна половине суммы диагональных компонентов (следа) тензора рейнольдсовых напряжений. Различие между нормальными и касательными турбулентными напряжениями зависит от выбора системы координат. В частности, существует система координат, в которой касательные компоненты обращаются в ноль.

Рейнольдсовы напряжения могут быть записаны в виде суммы так называемых изотропных и анизотропных составляющих:

$$\overline{u'_j u'_i} = \frac{1}{3} \overline{u'_k u'_k} \delta_{ij} + \left(\overline{u'_j u'_i} - \frac{1}{3} \overline{u'_k u'_k} \delta_{ij} \right) = \underbrace{\frac{1}{3} 2k \delta_{ij}}_{\text{Изотропное напряжение}} + \underbrace{\left(\overline{u'_j u'_i} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right)}_{\text{Анизотропное напряжение}}. \quad (70)$$

Подстановка (70) в (68) показывает, что *изотропное* напряжение складывается со средним давлением \bar{p} и образует так называемое модифицированное давление $\bar{p} + 2\rho k/3$. Модифицированное давление может быть определено с помощью процедуры коррекции давления, одна из версий которой приведена в Приложении 1. В то же время, *анизотропная* часть компонент тензора турбулентных напряжений

$$a_{ij} \equiv \overline{u'_j u'_i} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (71)$$

пока остаётся неизвестной.

Итак, с помощью разложения Рейнольдса и процедуры осреднения получили систему уравнений (60) и (68) для среднего поля скорости. Эту систему называют уравнениями Навье–Стокса, осреднёнными по Рейнольдсу (Reynolds averaged Navier–Stokes equations или, короче, уравнения RANS). Эти уравнения не могут быть решены, пока неизвестны турбулентные напряжения $-\overline{u'_j u'_i}$. Другими словами, осреднённая по Рейнольдсу система уравнений *не замкнута*, а для решения проблемы замыкания надо определить $\overline{u'_j u'_i}$. К сожалению, эта проблема не решается с использованием одних лишь уравнений Навье–Стокса и разложения Рейнольдса. Действительно, используя исходные и осреднённые уравнения Навье–Стокса, для $\overline{u'_j u'_i}$ можно получить (см., например, [34]) свои уравнения переноса. Однако эти уравнения, в свою очередь, будут содержать корреляции более высоких порядков (например $\overline{u'_k u'_j u'_i}$), которые остаются неизвестными (поэтому говорят, что для них также требуется замыкание).

2.2.2.3. Уравнение переноса скалярной величины

До сих пор рассматривались уравнения движения, осреднение которых порождает рейнольдсовы напряжения. Рассмотрим теперь уравнение (55) переноса скалярной величины ϕ . Осреднение этого уравнения выполняется аналогично осреднению уравнений для каждой компоненты скорости. Как и в уравнениях движения, неизвестные корреляции между пульсациями скорости и скаляра ϕ возникают при осреднении нелинейных выражений для конвективных потоков:

$$\overline{u_j \phi} = \overline{(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{\phi} + \phi')} = \bar{u}_j \bar{\phi} + \overline{u'_j \phi'}. \quad (72)$$

Осреднённое уравнение переноса ϕ принимает вид:

$$\frac{\partial \rho \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \bar{\phi}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \mathcal{D} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_j \phi'} \right), \quad (73)$$

где величина $\overline{u'_j \phi'}$ имеет смысл турбулентного потока скаляра ϕ , возникающего в результате турбулентного перемешивания. Как и в случае уравнений движения, для $\overline{u'_j \phi'}$ можно получить уравнения переноса, которые будут содержать неизвестные корреляции более высоких порядков.

Таким образом, при использовании осреднения по Рейнольдсу встаёт проблема замыкания системы осреднённых уравнений (68) и (73). Для решения этой проблемы требуется физически обоснованная математическая модель, которая позволит выразить искомые корреляции через средние значения и корреляции более низкого порядка. Поставленная цель достигается с помощью той или иной *модели турбулентности*.

2.2.3. Концепция турбулентной вязкости и градиентной диффузии

Эксперименты показали, что турбулентность наиболее интенсивна в областях больших градиентов средней скорости. В 1877 г. Ж. Буссинеск предположил, что связь между *турбулентными* напряжениями $-\overline{u'_j u'_i}$ и тензором скоростей деформации $\bar{S}_{ij} = (\partial \bar{u}_i / \partial x_j + \partial \bar{u}_j / \partial x_i) / 2$ осреднённого течения аналогична соответствующей связи (52), которая имеет место между *вязкими* напряжениями τ_{ij} и компонентами S_{ij} для ньютоновской жидкости:

$$-\rho \left(\overline{u'_j u'_i} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) = 2\mu_t \left(\bar{S}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{S}_{kk} \delta_{ij} \right). \quad (74)$$

Коэффициент пропорциональности μ_t называют турбулентной (или вихревой) вязкостью¹³. Отметим, что в левой части равенства (74), которое выражает *гипотезу турбулентной вязкости*, стоит анизотропная часть (71) тензора рейнольдсовых напряжений, а присутствие слагаемого $2k\delta_{ij}/3$ обеспечивает выполнение равенства (4). Соотношение (74) можно

¹³ Напомним, что для несжимаемой жидкости $S_{kk} = \partial u_k / \partial x_k = 0$ (см. уравнение неразрывности (48)).

понимать как *определение* турбулентной вязкости. Другими словами, турбулентной вязкостью будем называть скалярную величину μ_t , которая подчиняется равенству (74). Соотношение (74) может быть записано в виде

$$-\overline{\rho u'_j u'_i} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\rho k + \mu_t \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}. \quad (75)$$

Отметим, что суммирование диагональных компонентов тензора напряжений (75) приводит к равенству $\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2} = 2k$, соответствующему определению кинетической энергии турбулентности (4).

С учётом (75) уравнения (68) и (69) для средней скорости примут вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} = \\ & = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \left(\rho k + (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right) \end{aligned} \quad (76)$$

или, при постоянной плотности,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left((v + v_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad (77)$$

где $v_t = \mu_t / \rho$. Видно, что уравнения (76) и (77) будут идентичны уравнениям (68) и (69), если вместо \bar{u} , $\bar{p} + 2(\rho k + (\mu + \mu_t) \partial \bar{u}_k / \partial x_k) / 3$ и $\mu + \mu_t$ положить, соответственно, u , p и μ .

По аналогии с гипотезой турбулентной вязкости *гипотеза градиентной диффузии* позволяет выразить турбулентный поток $\overline{u'_j \phi'}$ скаляра ϕ через градиенты средних значений $\bar{\phi}$:

$$\overline{u'_j \phi'} = -\mathcal{D}_t \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j}, \quad (78)$$

где \mathcal{D}_t — коэффициент турбулентной диффузии. С учётом (78) осреднённое уравнение (73) примет вид:

$$\frac{\partial \rho \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \bar{\phi}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho (\mathcal{D} + \mathcal{D}_t) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j} \right), \quad (79)$$

идентичный исходному уравнению (78) при условии замены ϕ и \mathcal{D} на $\bar{\phi}$ и $\mathcal{D} + \mathcal{D}_t$. Между турбулентной вязкостью μ_t и коэффициентом турбулентной диффузии \mathcal{D}_t предполагается связь

$$\mathcal{D}_t = \frac{\mu_t}{\rho} \frac{1}{Pr_t}, \quad (80)$$

где Pr_t — турбулентное число Прандтля, величина которого близка к единице.

Таким образом, при использовании концепций турбулентной вязкости и градиентной диффузии для решения проблемы замыкания осреднённых уравнений остаётся лишь определить турбулентную вязкость μ_t и коэффициент турбулентной диффузии \mathcal{D}_t . Это будет сделано ниже, в разделе 2.2.5. Здесь отметим лишь, что концепция турбулентной вязкости и градиентной диффузии оказалась чрезвычайно полезной при построении приближённых моделей турбулентности, и она до сих пор широко используется при численном моделировании. Однако нужно помнить, что соответствующие гипотезы не имеют строгого физического обоснования и в некоторых случаях противоречат экспериментальным данным. Как следствие, применение концепций турбулентной вязкости и градиентной диффузии может привести к большим ошибкам в пристеночных областях, в случае отрыва потока, в закрученных течениях.

2.2.4. Кинетическая энергия турбулентного потока

Кинетическая энергия единицы массы движущейся жидкости равна половине квадрата скорости: $E = u_j u_j / 2$. Используя разложение $u_j = \bar{u}_j + u'_j$, можно показать, что средняя кинетическая энергия единицы массы жидкости в турбулентном потоке равна сумме кинетической энергии осреднённого поля скорости $K = \bar{u}_j \bar{u}_j / 2$ и кинетической энергии турбулентности $k = \overline{u'_j u'_j} / 2$:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \overline{u_j u_j} = \frac{1}{2} \overline{(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_j + u'_j)} = \frac{1}{2} \bar{u}_j \bar{u}_j + \frac{1}{2} \overline{u'_j u'_j} = K + k. \quad (81)$$

Рассмотрим несжимаемое турбулентное течение. Используя уравнения движения (53) можно получить уравнение переноса мгновенной кинетической энергии E (см., например, [34]):

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial u_j E}{\partial x_j} = -\frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial x_j} - \underbrace{2\nu S_{ij} S_{ij}}_{\text{Вязкая диссипация}}, \quad (82)$$

где $\mathbf{T}_j = u_j p / \rho - 2\nu u_i S_{ij}$ — компоненты вектора потока энергии, $S_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$ — компоненты тензора скоростей деформации.

Полезно рассмотреть общий баланс кинетической энергии потока в рассматриваемой области. Для этого следует проинтегрировать уравнение (82) по объёму. При этом оказывается, что объёмные интегралы от $\partial u_j E / \partial x_j$ и $\partial \mathbf{T}_j / \partial x_j$ сводятся к поверхностным интегралам по поверхности границы области (теорема Гаусса–Остроградского). Следовательно, единственным объёмным «источником» кинетической энергии потока является последнее слагаемое в правой части (82). Можно показать, далее, что величина $2\nu S_{ij} S_{ij}$ всегда неотрицательна и равна нулю только в покоящейся среде. Следовательно, указанное слагаемое описывает потери кинетической энергии за счёт внутреннего трения в движущейся среде. Физическим механизмом, изымающим кинетическую энергию из потока, является вязкая диссипация, в результате которой механическая энергия необратимо преобразуется в тепло.

Осреднение уравнения (82) приводит к следующему результату [34]:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial u_j \bar{E}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u'_j E} + \frac{u_j p}{\rho} - 2\nu u_i S_{ij} \right) - \underbrace{2\nu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} - 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}}}_{\text{Диссипация}}, \quad (83)$$

где

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad S'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right). \quad (84)$$

Как и для мгновенной кинетической энергии (уравнение (82)), положительные объёмные источники осреднённой кинетической энергии в уравнении (83) отсутствуют. Два последних слагаемых в (83) описывают потери энергии из-за необратимой диссипации. В турбулентном потоке градиенты мгновенного поля скорости намного больше градиентов осреднённо-

го поля, поэтому $\bar{S}_{ij} \ll S'_{ij}$, и предпоследним слагаемым в правой части (82) можно пренебречь. Последнее слагаемое, наоборот, очень существенно; именно это слагаемое было определено ранее как скорость диссипации кинетической энергии турбулентности ε (формула (10)). Напомним, что уравнение (83) описывает перенос средней кинетической энергии пульсирующего турбулентного потока. Полезно рассмотреть по отдельности уравнения переноса для кинетической энергии осреднённого течения $K = \bar{u}_j \bar{u}_j / 2$ и пульсационной составляющей (кинетической энергии турбулентности) $k = \overline{u'_j u'_j} / 2$.

Преобразуя уравнения Рейнольдса (68), можно получить уравнение переноса кинетической энергии осреднённого поля скорости $K = \bar{u}_j \bar{u}_j / 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial u_j K}{\partial x_j} = \\ = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i u'_i u'_j} + \frac{\bar{u}_j \bar{p}}{\rho} - 2\nu \bar{u}_i \bar{S}_{ij} \right) - \underbrace{\left(\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{Генерация}} - \underbrace{2\nu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}_{\text{Диссипация}}, \end{aligned} \quad (85)$$

где физический смысл слагаемых пояснён в подписях снизу. Из (85) и уравнений Навье–Стокса (53) следует уравнение переноса кинетической энергии турбулентности $k = \overline{u'_j u'_j} / 2$ (см. также (9)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \\ = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{u'_i u'_i u'_j}}{2} + \frac{\overline{u'_j p'}}{\rho} - 2\nu \overline{u'_i S'_{ij}} \right) + \underbrace{\left(\overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{Генерация}} - \underbrace{2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ji}}}_{\text{Диссипация}}. \end{aligned} \quad (86)$$

Видно, что из энергии осреднённого поля изымается энергия, соответствующая величине $-\overline{u'_i u'_j} \partial \bar{u}_i / \partial x_j$ (уравнение (85)); это же количество энергии добавляется к кинетической энергии турбулентности (уравнение (86)). Таким образом, величину $-\overline{u'_i u'_j} \partial \bar{u}_i / \partial x_j = P_k$ можно рассматривать как скорость генерации турбулентной энергии за счёт энергии осреднённого поля (или, другими словами, скорость изъятия энергии турбулентности из осреднённого поля и её переход в кинетическую энергию турбулентно-

сти). Используя гипотезу турбулентной вязкости (75), можно показать, что эта величина равна

$$\begin{aligned} P_k &= \left(\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \left(k + \nu_t \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \\ &= \nu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \left(k + \nu_t \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (87)$$

В несжимаемом течении $\partial \bar{u}_k / \partial x_k = 0$ (уравнение неразрывности (48)), и

$$P_k = \nu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = \nu_t (2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}) = \nu_t |\bar{S}|^2, \quad (88)$$

откуда следует, что величина P_k неотрицательна. Величины $2\nu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}$ и $\varepsilon = 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ji}}$ также неотрицательны. Они показывают интенсивность необратимой диссипации, причём, как было отмечено выше, $\varepsilon = 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ji}} \gg 2\nu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}$.

Уравнение (86) представляет собой уравнение переноса кинетической энергии турбулентности, используемое во многих моделях. В этом уравнении требуется замыкание для первого слагаемого в правой части. Поскольку роль этого слагаемого отражает перераспределение энергии турбулентности в пространстве за счёт турбулентных флуктуаций скорости и давления, его интерпретируют как турбулентную диффузию, а для замыкания используют концепцию градиентной диффузии:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{u'_i u'_i u'_j}}{2} + \frac{\overline{u'_j p'}}{\rho} - 2\nu \overline{u'_i S'_{ij}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (89)$$

где σ_k — эмпирическая константа, которую полагают равной единице. В результате получается уравнение переноса кинетической энергии турбулентности в турбулентном потоке:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} + P_k - \varepsilon, \quad (90)$$

которое является замкнутым. В течениях с переменной плотностью уравнение (90) примет вид

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} + \rho P_k - \rho \varepsilon. \quad (91)$$

Отметим, что в условиях развитой турбулентности $\mu \ll \mu_t / \sigma_k$.

2.2.5. Модели турбулентности на основе турбулентной вязкости

Задачей модели турбулентности является определение реинольдсовых напряжений. Если принята гипотеза турбулентной вязкости, то эта задача сводится к определению турбулентной вязкости через другие характеристики потока (поле средней скорости, для расчёта которого привлекаются, например, кинетическая энергия турбулентности и скорость её диссипации). Решение указанной задачи достигается с помощью моделей разного уровня сложности. В данном разделе даётся описание моделей, связанных с осреднением по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса. В свою очередь, рассматриваемые модели можно разбить на два класса, в первом из которых используется концепция турбулентной вязкости, а во втором динамика реинольдсовых напряжений моделируется без её использования. В рамках первого класса (модели на основе турбулентной вязкости, eddy viscosity models) будут рассмотрены модели с разным числом уравнений переноса (0, 1 и 2) для характеристик турбулентности. Затем рассматривается второй класс моделей — так называемые модели реинольдсовых напряжений (Reynolds Stress Models, RSM).

2.2.5.1. Алгебраические модели турбулентности

Модели данного типа называют алгебраическими, поскольку в них для расчёта турбулентной вязкости не прибегают к решению дифференциальных уравнений переноса. В связи с этим, в расчёте используются только локальные характеристики течения без учёта предыстории и значений выше по потоку.

В 1925 г. Л. Прандтль предложил *модель длины смешения* для пристенных турбулентных течений. В соответствии с этой моделью турбулентная вязкость определяется как

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|, \quad (92)$$

где y — координата по нормали к стенке, \bar{u} — касательная составляющая средней скорости, l_m — так называемая длина пути смешения (mixing length). Было установлено, что в пристеночной области длина пути смешения пропорциональна расстоянию до стенки:

$$l_m = \kappa y, \quad (93)$$

где $\kappa = 0,41$ — постоянная Кармана¹⁴.

Выражение (92), пригодное для плоских пристеночных течений, может быть формально обобщено на произвольные трёхмерные течения. В частности, Й. Смагоринский в 1963 г. предложил выразить турбулентную вязкость через модуль¹⁵ тензора скоростей деформаций (rate-of-strain tensor), вычисленных для осреднённого поля [38]:

$$\mu_t = \rho l_m^2 |\bar{S}|, \quad (94)$$

где

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ji}}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (95)$$

Альтернативный подход заключается в использовании модуля тензора скоростей вращения (rate-of-rotation tensor):

$$\mu_t = \rho l_m^2 |\bar{\Omega}|, \quad (96)$$

где

$$|\bar{\Omega}| = \sqrt{2\bar{\Omega}_{ij}\bar{\Omega}_{ij}}, \quad \bar{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (97)$$

Формула (96) используется в модели, предложенной Б. Болдуином и Х. Ломаксом в 1978 г. [9].

Модели Смагоринского (94) и Болдуина–Ломакса (96) неполны, поскольку требуется определение длины пути смешения в каждой точке потока. Для некоторых типов практически важных и хорошо изученных те-

¹⁴ Не путать с обозначением волнового числа, используемого для представления энергетического спектра турбулентных пульсаций (разделы 1.1 и 1.2.3).

¹⁵ Модуль тензора связан с его вторым инвариантом (скалярным произведением тензора на самого себя [5]).

чений (как правило, в пристеночных областях, а также в струях, следах и слоях смешения) величина l_m определяется достаточно достоверно, причём в ряде случаев можно использовать равенство (93). В общем случае проблема оценки l_m остаётся открытой. В связи с этим алгебраические модели, как правило, не рекомендуются для использования в коммерческих вычислительных пакетах Ansys Fluent и Ansys CFX¹⁶.

2.2.5.2. Модели с одним уравнением. Модель Спаларта–Аллмареса

В моделях данного типа рассматривается единственное уравнение переноса, записанное либо для кинетической энергии турбулентности, либо для турбулентной вязкости. В первом случае турбулентная вязкость определяется выражением вида

$$\mu_t = \text{const} \cdot \rho l_m \sqrt{k}, \quad (98)$$

предложенным А.Н. Колмогоровым в 1942 г. и Л. Прандтлем в 1945 г. Равенство (98) следует из соотношения, имеющего структуру выражения для вязкости идеального газа: $\mu_t \propto \rho l_m u'$. При этом, как и в алгебраических моделях, длина пути смешения должна быть определена. Для определения кинетической энергии турбулентности k решается уравнение переноса (90) или (91), в которых, однако, требуется определить ε .

Ранее на основании второй гипотезы Колмогорова был сделан вывод о том, что в условиях развитой турбулентности скорость диссипации кинетической энергии ε не зависит от ν , а определяется только характеристиками крупномасштабной турбулентности. В результате получено соотношение (14), из которого следует модельное выражение для ε :

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l_m}. \quad (99)$$

С учётом равенства (99) уравнение переноса кинетической энергии турбулентности (91) оказывается замкнутым:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} + \rho P_k - \rho C_D \frac{k^{3/2}}{l_m}, \quad (100)$$

¹⁶ В Ansys CFX 11.0 [7] имеется возможность использовать алгебраическую модель, в которой для всей расчётной области предполагается одно и то же значение турбулентной вязкости.

а выражение (98) для турбулентной вязкости принимает вид:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (101)$$

(формула Колмогорова–Прандтля). Для простых сдвиговых течений значения μ_t , k и ε могут быть одновременно измерены, что позволяет оценить численное значение константы C_μ . Другой способ определения указанного численного значения — детальное численное решение задачи с разрешением всех пространственных масштабов и частот турбулентных пульсаций (прямое численное моделирование). В результате получено ставшее общепринятым значение $C_\mu = 0,09$, которое отражает результаты измерений на достаточном удалении от твёрдых поверхностей (пристеночные области рассматриваются ниже в разделе 2.3). Установлено также, что в развитом турбулентном течении константы C_D и C_μ связаны соотношением

$$C_D = C_\mu^{3/4}, \quad (102)$$

в соответствии с которым $C_D = 0,164$.

Более современным примером модели турбулентности с одним уравнением является модель Спаларта–Аллмареса (SA модель), которая была специально разработана для использования в аэрокосмических приложениях. Впоследствии эта модель стала использоваться шире, в частности — в турбомашиностроении. Оригинальная версия модели была предложена в работе [39] и приводится, в частности, на сайте [52]. Ниже даётся описание версии SA модели, реализованной в Fluent 6.3 [8].

В SA модели единственное уравнение переноса сформулировано для величины $\tilde{\nu}$, которая совпадает с турбулентной вязкостью всюду, кроме пристеночных областей:

$$\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \tilde{\nu}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho (v + \tilde{\nu})}{\sigma_v} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + \frac{C_{b2} \rho}{\sigma_v} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} + \rho P_v - \rho \varepsilon_v, \quad (103)$$

где P_v — скорость генерации турбулентной вязкости, а ε_v — скорость её диссипации. Поскольку в SA модели не определяется кинетическая энергия турбулентности k , в расчёте рейнольдсовых напряжений (75) опускаются члены, содержащие k .

Турбулентная вязкость вычисляется следующим образом:

$$v_t = \tilde{\nu} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}. \quad (104)$$

Производство турбулентной вязкости моделируется слагаемым P_ν

$$P_\nu = C_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu}, \quad \tilde{S} = |\Omega| + \frac{\tilde{\nu}}{(\kappa d)^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad (105)$$

где d — расстояние до ближайшей твёрдой поверхности. Для того чтобы учесть генерацию турбулентности не только за счёт завихрённости $|\Omega|$, но и за счёт сдвиговых деформаций поля скорости используется модификация равенства (105):

$$|\Omega| \leftarrow |\Omega| + C_{prod} \min(0, |S| - |\Omega|), \quad C_{prod} = 2,0, \quad (106)$$

предложенная в [13]. Модификация (106) позволяет избежать избыточных значений турбулентной вязкости, иногда наблюдаемых при использовании соотношения (105), например, у оси вихревого течения, где эксперименты показывают подавление турбулентности из-за вращения жидкости. Диссипация турбулентности ϵ_ν моделируется следующим образом:

$$\epsilon_\nu = C_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2, \quad f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + C_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{(\kappa d)^2} \tilde{S}, \quad (107)$$

где \tilde{S} определяется вторым равенством (105).

Модельные константы принимают следующие значения: $\kappa = 0,4187$, $C_{b1} = 0,1355$, $C_{b2} = 0,622$, $\sigma_\nu = 2/3$, $C_{v1} = 7,1$, $C_{w1} = C_{b1}/\kappa^2 + (1 + C_{b2})/\sigma_\nu$, $C_{w2} = 0,3$, $C_{w3} = 2,0$. Окно параметров SA модели в Ansys Fluent 6.3 показано на рис. 17.

Оригинальная версия модели [39] содержит дополнительные (не учтённые в документации Fluent 6.3 [8]) слагаемые, корректирующие P_ν и ϵ_ν , а также дополнительный член (trip term) в правой части уравнения переноса (103). Указанный trip term позволяет задать положение точки, в которой активируется переход к турбулентному состоянию пограничного слоя, если в набегающем потоке задано достаточно малое значение $\tilde{\nu}$.

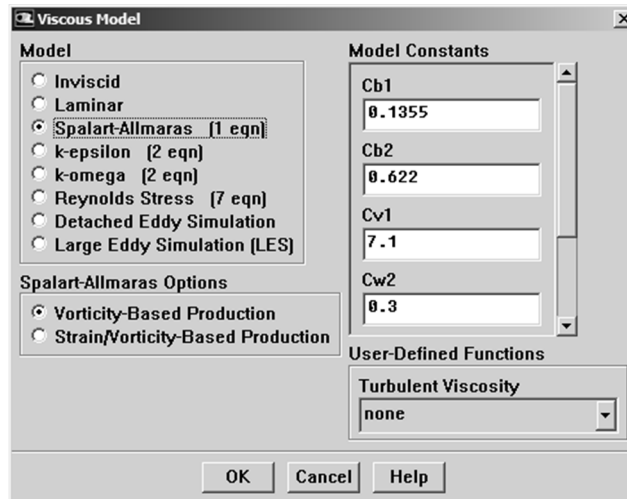


Рис. 17. Окно параметров модели Спаларта-Аллараса в Ansys Fluent 6.3 (Define/ Models/Viscous...)

SA модель является низкорейнольдсовой и применяется во всей расчётной области, в том числе вблизи твёрдых стенок, на поверхностях которых в качестве граничного условия полагают $\tilde{\nu} = 0$. В этом случае вблизи твёрдых поверхностей требуется такая расчётная сетка, которая обеспечивает достаточно большое число элементов внутри пограничного слоя, в том числе — внутри вязкого подслоя. Однако в Ansys Fluent 6.3 [8] предусмотрено использование пристеночных функций, если разрешающая способность сетки в пристеночной области недостаточно велика (подробнее см. в разделе 2.3.1.1).

SA модель оказывается экономичной и достаточно точной для расчётов безотрывного обтекания и для течений с не очень большими зонами отрыва. В то же время, точность модели не гарантирована для течений с большими зонами отрыва, свободных сдвиговых течений и затухающей турбулентности [8].

Отметим, что ещё одна модель турбулентности с единственным уравнением переноса, записанным для турбулентной вязкости, предложена Ментером [29] и включена в Ansys CFX 11 [7].

2.2.5.3. Модели с двумя уравнениями. Стандартная k - ε модель

Напомним, что модели с одним уравнением переноса кинетической энергии турбулентности не являются полными, если не определена длина пути смешения. Несмотря на то, что для некоторых типов течений оказа-

лось, что длина пути смешения может быть определена через расстояние до ближайшей твёрдой поверхности (93), требуется более универсальный подход для замыкания модели¹⁷. В качестве такого универсального подхода для определения недостающей переменной в каждой точке пространства Харлоу и Накаяма в 1968 г. [19] предложили использовать уравнение переноса для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности ε . Формулировка так называемой k - ε модели, удобная для численных расчётов, получила широкое распространение после публикации в 1972 г. книги Б. Лаундера и Б. Сполдинга [24].

Следует иметь в виду, что одновременное использование двух уравнений переноса для турбулентных характеристик порождает целый класс моделей. Это связано с тем, что возможны разные комбинации указанных характеристик: кинетическая энергия турбулентности k и скорость её диссипации ε (k - ε модель), обратное время распада вихрей $\omega = \varepsilon/k$ (k - ω модель), интегральный масштаб $l_t \propto k^{3/2}/\varepsilon$ или турбулентная (вихревая) вязкость $\nu_t \propto k^2/\varepsilon$. Использование двух независимых переменных решает проблему расчёта турбулентной вязкости, которая как раз и зависит от двух переменных (см. формулы (101) и (98)).

Наиболее распространённой моделью данного класса является k - ε модель. В ней для расчёта турбулентной вязкости используется формула Колмогорова–Прандтля (101), а для k и ε решают уравнения переноса. Уравнение для k дано формулами (90) или (91), которые получены из уравнений Навье–Стокса и Рейнольдса с небольшим числом допущений (гипотеза турбулентной вязкости и моделирование слагаемого, описывающего турбулентную диффузию). Уравнение переноса для ε также было получено теоретически (Б.И. Давыдов, 1961 г.), но для его замыкания требуется гораздо больше упрощающих допущений и гипотез. В результате оказывается целесообразным рассматривать ε как поток энергии от крупных энергонесущих вихрей к более мелким, возникающий в каскадном процессе дробления вихрей, нечувствительном к молекулярной вязкости среды (вторая гипотеза Колмогорова). С учётом такой интерпретации предложено модельное уравнение, приближённо описывающее эволюцию ε в турбулентном потоке:

¹⁷ Отметим, что замыкание в SA модели, в которой используется единственное уравнение переноса для турбулентной вязкости, также использует расстояние до ближайшей твёрдой поверхности.

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u_j \varepsilon}}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)}_{\text{Турбулентная диффузия}} + \underbrace{C_{\varepsilon 1} \left(-\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) \frac{\varepsilon}{k}}_{\text{Генерация}} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}}_{\text{Диссипация}}. \quad (108)$$

Структура уравнения (108) указывает на используемые допущения: градиентная диффузия, механизм генерации ε , идентичный соответствующему механизму для k , моделирование диссипации ε как релаксации к асимптотическому нулевому значению с характерным временем $\tau_t = k/\varepsilon$.

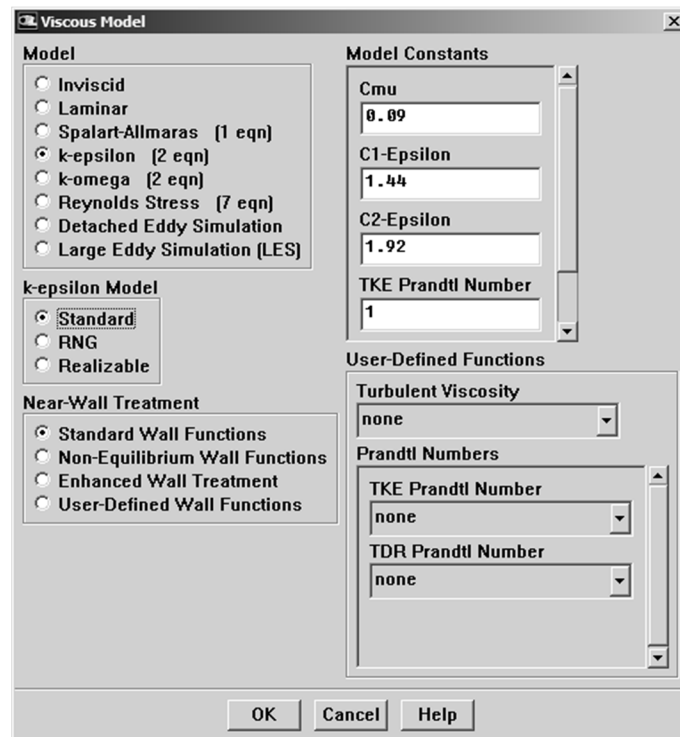


Рис. 18. Окно параметров стандартной k - ε модели в Ansys Fluent 6.3 (Define/Models/Viscous...)

Для k - ε модели сформировался стандартный рекомендуемый набор эмпирических констант, который обычно принимается по умолчанию в коммерческих вычислительных пакетах [8, 7] (рис. 18): $C_\mu = 0,09$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$, $\sigma_k = 1,0$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $Pr_t = Sc_t = 0,7$ (аналогично числам σ_k и σ_ε число Прандтля Pr_t входит в диффузионное слагаемое уравнения

переноса энергии, а число Шмидта Sc_i — в такое же слагаемое уравнения переноса компонентов в смеси; эти уравнения в данном пособии не рассматриваются).

Стандартная версия k - ε модели позволяет рассчитать некоторые турбулентные течения с точностью, достаточной для многих инженерных расчётов. Однако существуют определённые типы течений, где k - ε модель приводит к большим ошибкам: закрученные потоки, течения с большими неблагоприятными (способствующими отрыву) градиентами давления, течения с большими зонами отрыва, осесимметричные струи и некоторые другие. Напомним, что стандартная k - ε модель имеет теоретическое обоснование только для полностью развитой турбулентности, поэтому в пристеночных узлах используются пристеночные функции (раздел. 2.3.1.1).

2.2.5.4. RNG k - ε модель

Данная версия k - ε модели получена на основе теоретического анализа уравнений Навье–Стокса (Renormalization Group (RNG) Method), с чем и связано название модели. Структура уравнений переноса для кинетической энергии турбулентности k и скорости её диссипации ε аналогична, но в записи источниковых членов и формулы для турбулентной вязкости есть различия. Опыт применения данной модели показал улучшенное (по сравнению со стандартной версией k - ε модели) согласование расчётных и экспериментальных данных для некоторых типов течений, в частности при относительно малых числах Рейнольдса, большой кривизне линий тока и в областях больших деформаций поля скорости. Уравнения переноса турбулентных характеристик имеют вид:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_k (\mu + \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \rho P_k - \rho \varepsilon, \quad (109)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_j \varepsilon}{\partial x_j} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_\varepsilon (\mu + \mu_t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \rho P_k - \left(C_{\varepsilon 2} + C_\mu \frac{\eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \right) \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (110) \end{aligned}$$

где $C_{\varepsilon 1} = 1,42$, $C_{\varepsilon 2} = 1,68$. Окно параметров RNG k - ε модели в Ansys Fluent 6.3 показано на рис. 19, а.

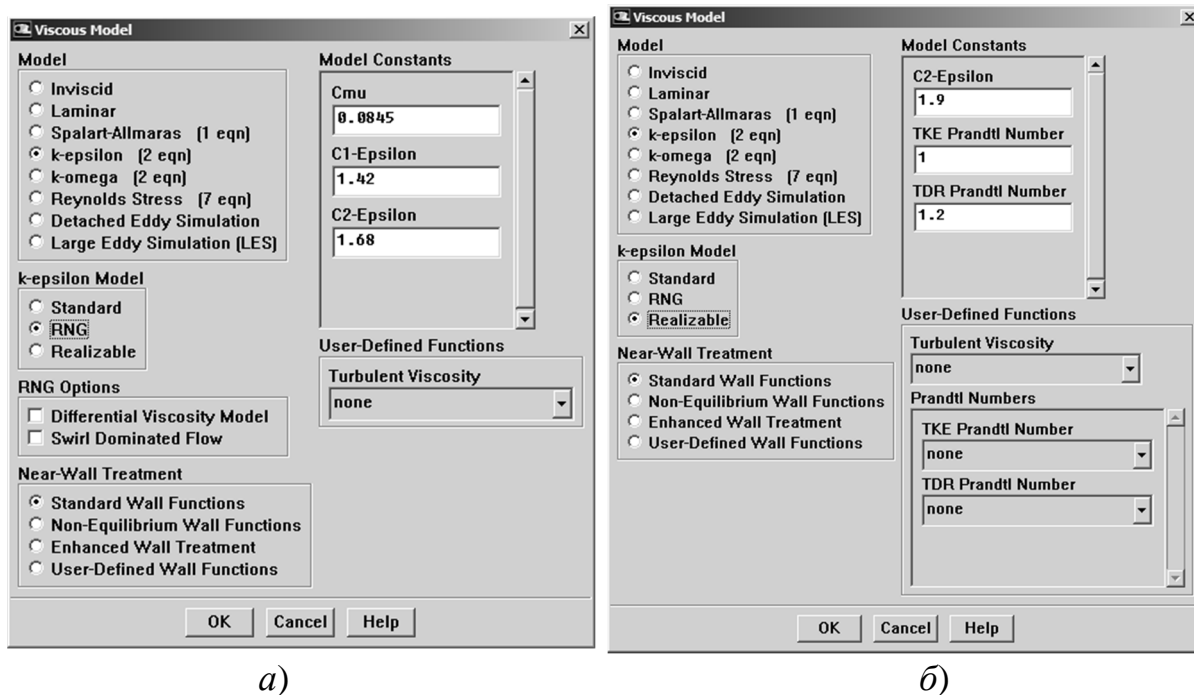


Рис. 19. Окна параметров RNG k – ϵ модели (а) и модели k – ϵ realizable (б) в Ansys Fluent 6.3 (Define/Models/Viscous...)

В пределе больших чисел Рейнольдса турбулентная вязкость μ_t определяется формулой Колмогорова–Прандтля (101), где рекомендуемое значение константы C_μ равно 0,0845. В случае малых чисел Рейнольдса (это важно для пристеночных течений) для определения μ_t используется специальное дифференциальное уравнение (Differential Viscosity Model, рис. 19, а), решение которого даёт зависимость μ_t от k и ϵ . Ansys Fluent предлагает возможность использования дополнительного множителя в правой части (101) для учёта влияния закрутки потока (если она имеется) на турбулентную вязкость (Swirl Dominated Flow, рис. 19, а). Числа α_k и α_ϵ играют роль обратных чисел Прандтля, и в пределе больших чисел Рейнольдса рекомендуемые значения равны $\alpha_k = \alpha_\epsilon = 1,393$. При умеренных числах Рейнольдса для определения α_k и α_ϵ решается специальное трансцендентное уравнение (см., например, [8]). Скорость генерации кинетической энергии турбулентности P_k определяется равенством (88).

В уравнении (110), что в отличие от (108), вместо константы $C_{\epsilon 2}$ используется функция:

$$C_{\varepsilon 2} \leftarrow C_{\varepsilon 2} + C_{\mu} \rho \frac{\eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3}, \quad (111)$$

где $\eta = |\bar{S}|k/\varepsilon$, $\eta_0 = 4,38$, $\beta = 0,012$. Соотношение (111) показывает, что в областях с большой скоростью деформации осреднённого поля скорости (т. е. там, где $\eta > \eta_0$ или $|\bar{S}| > 4,38\varepsilon/k$) скорость убыви величины ε (последнее слагаемое в правой части (110)) уменьшается по сравнению со стандартной версией k - ε модели. Это приводит к большим значениям ε и меньшим значениям k и μ_t . Этим объясняется то, что модель RNG лучше описывает некоторые течения с большой кривизной линий тока, чем стандартная k - ε модель.

Уравнения RNG k - ε модели могут применяться в пограничном слое вплоть до поверхностей стенок, при условии соответствующего измельчения сетки в вязком подслое. Если сетка в этой области недостаточно подробна, активируется один из видов пристеночных функций, перечисленных на рис. 19, а.

2.2.5.5. Модели k - ω и SST (модель сдвиговых напряжений Ментера)

Опыт расчётов отрывных турбулентных течений за плохообтекаемыми телами показал, что модели на основе уравнения для скорости диссипации ε предсказывают начало отрыва потока значительно ниже по течению, чем это наблюдается в экспериментах, причём расчётный размер рециркуляционной зоны и интенсивность движения в ней оказываются заниженными. В то же время оказалось, что другой класс моделей, где вместо уравнения переноса для ε используется уравнение для $\omega = \varepsilon/k$ (turbulence frequency — величина, обратная времени жизни крупных вихрей (8)), приводит к лучшему согласию с экспериментом на данном классе течений, если зона отрыва невелика. Так называемая k - ω модель развивалась в работах Д. Вилкокса [50] и легла в основу комбинированной модели сдвиговых напряжений (shear stress transport), созданной позднее Ф. Ментером [28] и объединяющей k - ω и k - ε модели. В цели данного пособия не входит обоснование уравнений SST-модели и демонстрация её преимуществ, поскольку этому посвящена специальная литература (см., например, [30]). Здесь приводится лишь перечень уравнений, используемых в вычислительных пакетах Ansys CFX и Ansys Fluent.

SST модель основана на линейной комбинации k - ω модели Вилкок-са в приповерхностных областях и k - ε модели вдали от поверхностей [28]. Поэтому прежде, чем привести уравнения SST модели, дадим уравнения переноса турбулентных характеристик для «базовых» моделей. Уравнения k - ω модели имеют вид:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho k u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k1}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \rho P_k - \rho C_\mu k \omega, \quad (112)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho \omega u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 1}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + \alpha_1 \frac{\omega}{k} \rho P_k - \rho \beta_1 \omega^2. \quad (113)$$

Уравнения (91) и (108) k - ε модели записываются так, чтобы использовать ω вместо ε :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho k u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k2}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \rho P_k - \rho C_\mu k \omega, \quad (114)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho \omega u_j}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 2}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + \\ & + 2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \alpha_2 \frac{\omega}{k} \rho P_k - \rho \beta_2 \omega^2. \end{aligned} \quad (115)$$

Турбулентная вязкость определяется равенством

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega}. \quad (116)$$

Видно, что по своей структуре уравнения (113) и (115) аналогичны, за исключением второго слагаемого в правой части (115). Считается, что k - ω модель лучше приспособлена к описанию пристеночных течений в пограничных слоях. Однако оказалось, что в свободных течениях вдали от твёрдых поверхностей (например, в набегающем потоке) возникает проблема задания численного значения ω на границах, где поток входит в расчётную область. Проблема заключается в том, что решение существенно зависит от указанного значения ω , и, в отличие от ε , значение ω нельзя устремить к нулю.

Для того чтобы активировать каждую из перечисленных моделей в своей области течения, на основе уравнений (112)–(115) формулируется комбинированная k - ω модель:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho k u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k3}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \rho P_k - \rho C_\mu k \omega, \quad (117)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho \omega u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 3}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + \\ + (1 - F_1) 2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \alpha_3 \frac{\omega}{k} \rho P_k - \rho \beta_3 \omega^2, \end{aligned} \quad (118)$$

причём коэффициенты σ_{k3} , $\sigma_{\omega 3}$, α_3 и β_3 вычисляются как $\Phi_3 = F_1 \Phi_1 + (1 - F_1) \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 — коэффициенты k - ω и k - ε модели соответственно¹⁸. В Ansys CFX 11.0 [7] используются следующие численные значения: $C_\mu = 0.09$, $\alpha_1 = 5/9$, $\alpha_2 = 0.44$, $\beta_1 = 0.075$, $\beta_2 = 0.0828$, $\sigma_{k1} = 2$, $\sigma_{k2} = 1$, $\sigma_{\omega 1} = 2$, $\sigma_{\omega 2} = 1/0.856$. Таким образом, вклад уравнений k - ω и k - ε модели определяется значением функции-переключателя (blending function) F_1 .

В SST модель внесены дополнительные модификации. В частности, генерация кинетической энергии ограничена сверху величиной $10C_\mu \rho k \omega$:

$$\rho P_k = \min \left(\mu_t |\bar{S}|^2, 10C_\mu \rho k \omega \right). \quad (119)$$

Предложены модификации SST модели, в которых в (119) вместо $|\bar{S}|^2$ рекомендовано использовать $|\bar{S}| |\bar{\Omega}|$, где $|\bar{\Omega}|$ — модуль тензора скоростей вращения (97). Кроме того, турбулентная вязкость в SST модели вычисляется с учётом локального значения скорости деформации поля скорости

$$\mu_t = \rho \frac{a_1 k}{\max \left(a_1 \omega, |\bar{S}| F_2 \right)}, \quad (120)$$

¹⁸ Отметим, что в документации Ansys Fluent [8] приводится иной способ расчёта коэффициентов σ_{k3} и $\sigma_{\omega 3}$ комбинированной модели: $\Phi_3^{-1} = F_1 \Phi_1^{-1} + (1 - F_1) \Phi_2^{-1}$.

где $|\bar{S}|$ вычисляется по формулам (95), и F_2 — вторая функция-переключатель¹⁹. Формула (120) допускает два предельных случая. В первом турбулентная вязкость становится равной $\mu_t = \rho a_1 k / (|\bar{S}| F_2)$, что (с точностью до множителя F_2) соответствует так называемой гипотезе Бредшоу [28], в соответствии с которой турбулентное сдвиговое напряжение равно $\tau = \mu_t |\bar{S}| = \rho a_1 k$. Данная гипотеза применима к пограничному слою, где $|\bar{S}| F_2 > a_1 \omega$. В свободном сдвиговом слое $|\bar{S}| F_2 < a_1 \omega$, и реализуется второй предельный случай, когда $\mu_t = \rho k / \omega$, что соответствует формуле (116).

Отметим, что в литературе представлена версия SST модели, в которой при вычислении турбулентной вязкости (120) вместо модуля тензора скоростей деформации $|\bar{S}|$ используется модуль тензора скоростей вращения $|\bar{\Omega}|$, вычисляемый по формулам (97).

Функции-переключатели формулируются таким образом, чтобы определить, находится ли рассматриваемая точка внутри приповерхностного пограничного слоя или вне его. В SST модели, реализованной в CFX [7], функции F_1 и F_2 вычисляются с учётом расстояния до обтекаемой поверхности и локальных характеристик течения:

$$F_1 = \text{th}(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right), \frac{4\rho k}{D_\omega^+ \sigma_{\omega,2} y^2} \right),$$

$$D_\omega^+ = \max \left(\frac{2\rho}{\sigma_{\omega,2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right) \quad (121)$$

и

$$F_2 = \text{th}(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right). \quad (122)$$

В результате, функции F_1 и F_2 принимают следующие предельные значения:

¹⁹ В Ansys Fluent 6.3 предусмотрена дополнительная поправка для подавления турбулентной вязкости в областях с малым значением турбулентного числа Рейнольдса $Re_t = k/\nu\omega$ [8].

$$F_1 = \begin{cases} 0, & \text{вдали от поверхностей, } k - \varepsilon \text{ модель} \\ 1, & \text{внутри пограничного слоя у поверхностей, } k - \omega \text{ модель} \end{cases},$$

$$F_2 = \begin{cases} 0, & \text{комбинация, } k - \varepsilon \text{ и } k - \omega \text{ моделей} \\ 1, & \text{SST модель} \end{cases}. \quad (123)$$

Зона резкого изменения функции F_2 располагается на внешней границе пограничного слоя, т.е. дальше от твёрдой стенки, чем зона резкого изменения F_1 [28].

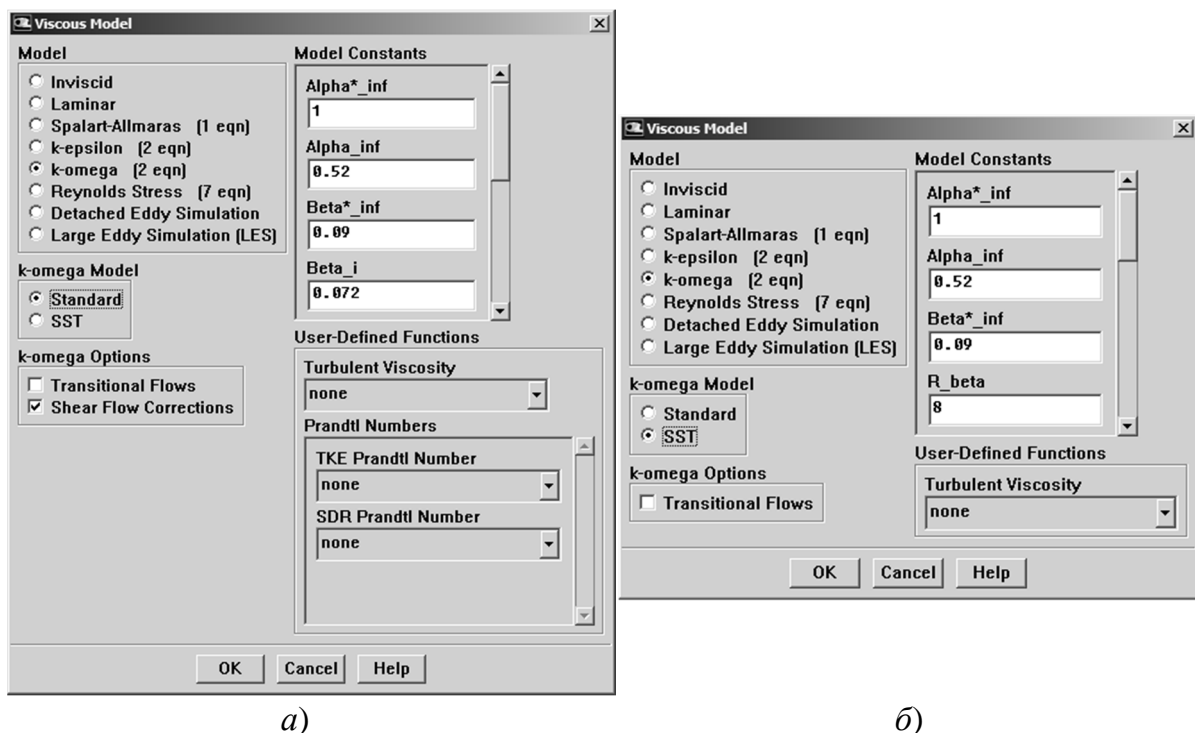


Рис. 20. Окна параметров k - ω модели в Ansys Fluent 6.3 (Define/Models/Viscous...): а) — стандартная k - ω модель; б) — SST модель

В Ansys Fluent 6.3 стандартная k - ω модель и SST модель активируются, как показано на рис. 20. Ещё раз отметим, что в SST модели первая функция-переключатель осуществляет выбор между k - ω (вблизи поверхностей) и k - ε (вдали от поверхностей) моделями, а вторая активирует ограничитель в формуле для турбулентной вязкости. Уравнения k - ω модели применимы в пограничном слое вплоть до поверхности стенки, что требует разрешения вязкого подслоя. Вместе с этим, поскольку $\omega \rightarrow \infty$

при $y \rightarrow 0$, для расчёта значения ω на поверхности стенки используется специальный алгоритм [8].

SST модель хорошо зарекомендовала себя в расчётах отрывных течений с небольшой зоной отрыва.

2.2.5.6. Другие модели на основе турбулентной вязкости

Ansys Fluent 6.3 и Ansys CFX 11 предлагают ещё несколько моделей турбулентности на основе концепции турбулентной вязкости. К ним, в частности, относятся так называемые k - ϵ realizable model, $v^2 - f$ модель и нелинейные модели турбулентной вязкости. Приведём краткое изложение основных идей, использованных при построении этих моделей, и отметим те типы течений, для которых можно ожидать наиболее точных результатов при использовании перечисленных моделей.

Модель k - ϵ realizable (рис. 19, б). Данная модель предложена в работе [36] и преследует две цели. Во-первых, предлагается более обоснованная формулировка уравнения переноса скорости диссипации, полученная из уравнения переноса средней завихрённости. Во вторых, устраняется возможность получения отрицательных значений для $\overline{u_j'^2}$ при больших деформациях поля средней скорости. В самом деле, из равенства (75) следует, что в несжимаемой жидкости $-\overline{\rho u_j'^2} = \mu_t 2\partial\bar{u}_j/\partial x_j - 2k/3$. Значит, при

$$\frac{k}{\epsilon} \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_j} > \frac{1}{3C_\mu} \approx 3,7 \quad (124)$$

величина $\overline{u_j'^2}$ становится отрицательной, что противоречит её физическому смыслу (при выводе соотношения (124) использовано равенство (101)). Этого можно избежать, если сделать величину C_μ зависящей от степени деформации поля скорости и характеристик турбулентности (k и ϵ). В результате рассматриваемая модель использует то же уравнение переноса кинетической энергии (91), что и стандартная k - ϵ модель. Отличие содержится в модифицированном уравнении переноса скорости диссипации и в зависимости C_μ от параметров потока.

Оказалось, что эта модель турбулентности описывает некоторые виды течений лучше, чем стандартная версия. Прежде всего, следует отметить осесимметричную затопленную струю, расчёт которой по стандартной модели даёт существенно больший угол раскрытия, чем наблюдается

в экспериментах. Использование рассматриваемой модели рекомендуется для течений с большой кривизной линии тока и закруткой течения [8].

$v^2 - f$ модель турбулентности вместо кинетической энергии k использует средний квадрат флуктуации скорости $\overline{v^2}$ по нормали к линии тока. Эта величина пропорциональна k вдали от стенок, а вблизи них $\overline{v^2}$ представляет среднеквадратичную флуктуацию скорости по нормали к поверхности, независимо от ориентации этой поверхности. Тем самым, модель приближённо учитывает анизотропию пристеночной турбулентности. Уравнение переноса $\overline{v^2}$ содержит в качестве источника произведение kf , где поле f определяется из решения специального эллиптического уравнения, что позволяет учесть нелокальное влияние всех твёрдых поверхностей, омываемых потоком. Уравнения модели приведены, например, в работе [10].

Нелинейные модели турбулентной вязкости. Идея для разработки данного класса моделей заключается в обобщении линейного соотношения (74) между анизотропной частью тензора рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформации \overline{S}_{ij} осреднённого поля скорости. Вместо (74) и выражения для турбулентной вязкости (101) предлагается использовать соотношение вида:

$$-\rho \left(\overline{u'_j u'_i} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) = \Phi(k, \varepsilon, \overline{S}_{ij}, \overline{\Omega}_{ij}), \quad (125)$$

нелинейное относительно \overline{S}_{ij} и $\overline{\Omega}_{ij}$ (подробнее см., например, в [34, 50]).

Нелинейные модели турбулентной вязкости иногда позволяют воспроизвести такие детали течений, которые не описываются традиционными моделями турбулентной вязкости. Однако в инженерной практике модели данного класса используются редко, и в состав Ansys Fluent и Ansys CFX к настоящему времени не включены.

2.2.6. Модели рейнольдсовых напряжений (RSM)

Модели рейнольдсовых напряжений (Reynolds Stress Models, RSM) не используют гипотезу турбулентной вязкости (75). Вместо этого данный класс моделей предполагает решение отдельного уравнения переноса для каждого компонента тензора рейнольдсовых напряжений $\overline{u'_i u'_j}$ и уравнения переноса для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности

ε . Тем самым, открывается возможность учёта анизотропности турбулентных пульсаций, что существенно расширяет потенциальную область применимости моделей данного класса, в том числе для течений с большой кривизной линий тока, закруткой потока, большой деформацией поля скорости. С учётом симметрии тензора рейнольдсовых напряжений, должны быть рассмотрены шесть уравнений переноса для разных компонент $\overline{u'_i u'_j}$ в трёхмерном пространстве.

Главная проблема при использовании моделей RSM заключается в достоверности приближённого моделирования многочисленных незамкнутых корреляций, возникающих при выводе уравнений переноса для $\overline{u'_i u'_j}$. Дополнительные трудности возникают и при постановке граничных условий вблизи твёрдых поверхностей. Детальное рассмотрение моделей рейнольдсовых напряжений выходит за рамки данного пособия и требует изучения специальной литературы (см., например, [34, 50]). Здесь приведём лишь обзор моделей RSM, включённых в текущие версии пакетов Ansys Fluent [8] и Ansys CFX [7].

В Ansys CFX 11, в частности, включены три варианта моделей RSM, названные по первым буквам имён их авторов: LRR–IP, LRR–QI и SSG. Модели LRR–IP, LRR–QI предложены в работе [25], а модель SSG — в работе [42]. Указанные модели отличаются способом аппроксимации корреляций пульсаций давления и скорости (pressure-rate-of-strain-tensor), но во всех трёх моделях используется уравнение переноса ε . Кроме того, в Ansys CFX 11 имеется возможность активировать две модели RSM, использующие уравнения переноса для ω , а не для ε (указанные модели RSM содержат уравнения переноса (113) и (118) соответственно). Ansys Fluent 6.3 также предоставляет выбор из трёх моделей RSM (рис. 21).

Модели рейнольдсовых напряжений могут быть упрощены, если в уравнениях переноса производные, описывающие транспорт соответствующих напряжений, аппроксимируются алгебраическими соотношениями. В результате сами рейнольдсовы напряжения оказываются (неявно и нелинейно) выраженными через k , ε и градиенты средней скорости. Модели данного класса называют *алгебраическими моделями рейнольдсовых напряжений* (Algebraic Stress Model, ASM). Модели ASM можно рассматривать как обобщение линейных моделей турбулентной вязкости, поскольку коэффициенты (например, C_μ), которые считаются постоянными в линейных моделях, в моделях ASM зависят от скорости генерации кинетической P_k и скорости диссипации ε .

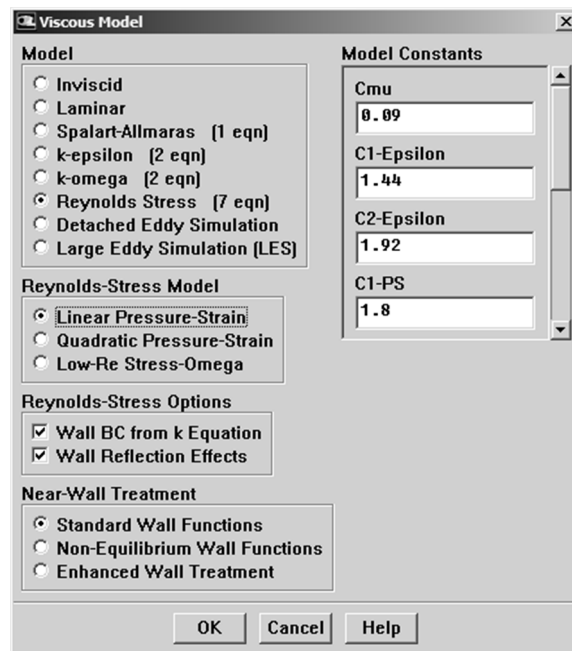


Рис. 21. Окно параметров моделей реynoльдсовых напряжений в Ansys Fluent 6.3 (Define/Models/Viscous...)

Важным подклассом моделей ASM являются так называемые явные модели (Explicit Algebraic Reynolds Stress Model, EARSM), описание которых выходит за рамки данного пособия и может быть найдено в оригинальной работе [48].

2.2.7. Моделирование крупных вихрей (LES)

Моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) постепенно становится всё более популярной методикой расчёта турбулентных течений не только в исследовательской, но и инженерной практике. В качестве исторической справки отметим, что данный подход был предложен в шестидесятых годах двадцатого века в работах Й. Смагоринского (J. Smagorinsky), Д. Лилли (D.K. Lilly) и Дж. Дидорфа (J.W. Deardorff). В начале семидесятых годов А. Леонард (A. Leonard) ввёл понятие пространственного фильтрования, разделяющего разрешённые и неразрешённые масштабы, а в начале девяностых в работах М. Германо (M. Germano) была разработана методика динамического моделирования диссипации кинетической энергии турбулентности на пространственных масштабах меньше размера фильтра. Таким образом, развитие и обоснование LES и

моделирования турбулентности на основе осреднения по Рейнольдсу (RANS) протекало одновременно.

Однако доступные к тому времени вычислительные ресурсы, будучи приемлемыми для RANS, оказались недостаточными для LES, что, по-видимому, и было причиной некоторого ослабления внимания к LES в восьмидесятих годах прошлого века. В девяностых годах метод LES стал применяться шире, в первую очередь при решении исследовательских задач. С начала текущего столетия продолжающийся рост вычислительных мощностей и возникшая тенденция массового создания и использования высокопроизводительных многопроцессорных систем привели к постепенному внедрению LES не только в исследовательские работы, но и в инженерную практику.

Вычислительная стратегия LES сильно отличается от использования осреднения по Рейнольдсу (RANS). Вместо решений осреднённых уравнений, которые носят детерминированный характер, здесь получают существенно нестационарные решения, представляющие *случайный* процесс. В методе LES ставится цель численно воспроизвести наиболее крупные вихревые структуры, соответствующие длинноволновой части *инерционного интервала* энергетического спектра (раздел 1.1). Поэтому случайный характер численного решения обусловлен природой флуктуаций в турбулентном потоке. В отличие от прямого численного моделирования, коротковолновая (высокочастотная) часть спектра не воспроизводится, а её влияние учитывается с помощью приближённых моделей так называемой *подсеточной* вязкости (SubGrid-Scale (SGS) viscosity). В соответствии с гипотезами Колмогорова, маломасштабные турбулентные флуктуации являются пространственно изотропными и статистически универсальными. Другими словами, динамика мелких (подсеточных) вихрей не зависит от геометрии потока и особенностей образования крупных вихревых структур. Это упрощает задачу создания универсальной модели подсеточной вязкости. Кроме того, как будет показано ниже, повышение разрешающей способности расчётного алгоритма (прежде всего за счёт уменьшения размеров ячеек сетки, но также и в случае повышения точности аппроксимации дифференциальных уравнений алгебраическими) приводит к уменьшению вклада подсеточной турбулентности и расширению спектра колебаний, разрешённых явным образом. Это снижает требования к подсеточным моделям.

Перейдём к теоретическому обоснованию метода. Векторное поле скорости $\vec{u}(\vec{x}, t)$ ($\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$) в турбулентном потоке опи-

сывается решением системы уравнений Навье–Стокса (48), (49). Точное решение задачи изменяется случайным образом во времени и в пространстве, причём спектр осцилляций очень широк. Коротковолновые осцилляции решения соответствуют мелким вихрям; ниже некоторой длины волны они не могут быть явно разрешены на расчётной сетке с данным размером ячеек. В связи с этим вводится понятие «фильтрации» решения, т. е. осреднение точного решения по области пространства, размер которой имеет порядок наименьшей разрешимой длины волны. Математически такое осреднение принимает вид интегрирования по объёму:

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \int G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{r}}, t) d\bar{\mathbf{r}}, \quad (126)$$

где $G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{x}})$ — весовая функция, называемая фильтром. Соотношение (126) применяется в случае постоянной плотности. Если плотность является переменной, то имеет место соотношение, аналогичное осреднению по Фавру:

$$\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \int G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{x}}) \rho(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{r}}, t) \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{r}}, t) d\bar{\mathbf{r}}, \quad (127)$$

Для фильтра $G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{x}})$, прежде всего, выполняется условие нормировки:

$$\int G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{r}} = 1. \quad (128)$$

Кроме того, функция $G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{x}})$ должна стремиться к нулю вдали от точки $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{x}}$, в окрестности которой выполняется осреднение, и заметно отличаться от нуля только внутри указанной окрестности. Этим требованиям удовлетворяют, например, ступенчатая П-образная функция или функция Гаусса. В качестве примера приведём соответствующие одномерные фильтры:

$$G(r, x) = \begin{cases} 1/\Delta x, & |r - x| < \Delta x/2 \\ 0, & |r - x| > \Delta x/2 \end{cases} \quad (129)$$

и

$$G(r, x) = \left(\frac{6}{\pi \Delta^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{6r^2}{\Delta^2} \right), \quad (130)$$

где Δ — ширина фильтра.

Ширина фильтра определяется одним из двух способов. Первым из них является явное и априорное задание численного значения Δ (явное фильтрование, *explicit filtering*). Турбулентные вихри с размером меньше Δ не разрешаются отфильтрованными уравнениями. Размер явно заданной ширины фильтра не может быть меньше характерного размера ячейки сетки.

Второй способ — неявное фильтрование (*implicit filtering*) — связан с тем, что замена локального значения скорости $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ на осреднённое по объёму значение происходит при дискретизации уравнений Навье–Стокса с помощью метода конечных объёмов:

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{r}}, t) d\bar{\mathbf{r}}, \quad (131)$$

где ΔV — объём сеточной ячейки, для декартовой сетки равный $\Delta V = \Delta_x \Delta_y \Delta_z$. Сравнение (131) с (126) показывает, что при неявном фильтровании функция фильтра $G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{x}})$ оказывается П-образной, а её ширина непосредственно связана с характерным размером ячеек сетки. Благодаря этому численно разрешаются вихревые структуры, минимально возможные для данной расчётной сетки и данного метода аппроксимации уравнений переноса. Именно такой способ неявного фильтрования подразумевается в большинстве практических расчётов методом LES.

Аналогично разложению Рейнольдса (57), точное решение $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ может быть представлено в виде суммы отфильтрованного (filtered) $\bar{\bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ и остаточного (residual) $\bar{\mathbf{u}}'(\bar{\mathbf{x}}, t)$ полей:

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{x}}, t) + \bar{\mathbf{u}}'(\bar{\mathbf{x}}, t), \quad (132)$$

однако, в отличие от (58), повторное фильтрование изменит результат:

$$\bar{\bar{\bar{\mathbf{u}}}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \neq \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad (133)$$

или, что эквивалентно, отфильтрованная невязка не равна нулю:

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}'(\bar{\mathbf{x}}, t) \neq 0. \quad (134)$$

Можно показать, что порядок фильтрования и дифференцирования по времени можно менять:

$$\overline{\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{\bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t}. \quad (135)$$

В то же время, поскольку

$$\overline{\frac{\partial \bar{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial x_j}} = \frac{\partial \bar{u}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial x_j} + \int \frac{\partial G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial x_j} u(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{r}}, t) d\bar{\mathbf{r}}, \quad (136)$$

порядок фильтрования и дифференцирования по координатам, строго говоря, можно менять, только если форма и ширина фильтра не зависят от координат. Ожидаемый результат фильтрования показан на рис. 22, а.

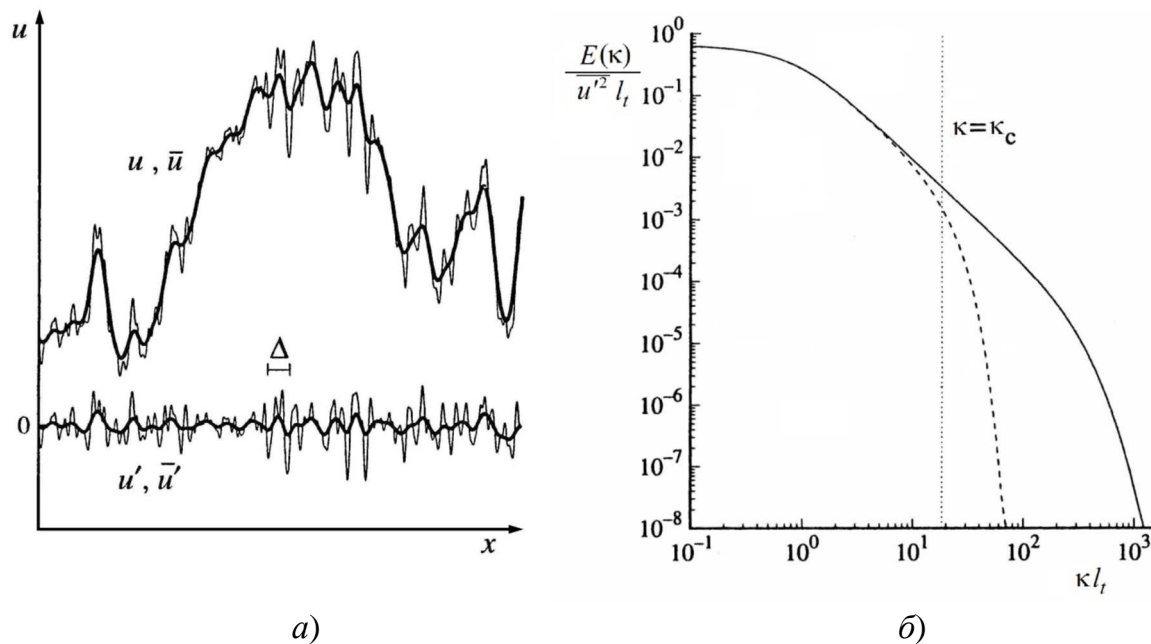


Рис. 22. Фильтрование функции $u(x)$: а) — исходная функция $u(x)$, отфильтрованная функция $\bar{u}(x)$, остаточное поле $u'(x)$, отфильтрованная невязка $\bar{u}'(x)$; б) — энергетический спектр исходной и отфильтрованной функции (число Рейнольдса, построенное по тейлоровскому масштабу, $Re_\lambda = \sqrt{k\lambda}/\nu = \sqrt{10Re_t} = 500$, фильтр — функция Гаусса с $\Delta = l_t/6$, $\kappa = 2\pi/l$, $\kappa_c = 2\pi/\Delta$) [34]

Фильтрование приводит к «обрезке» коротковолновой (высокочастотной) части энергетического спектра колебаний $E(\kappa)$ (см. раздел 1.1) при сохранении длинноволновой части (рис. 22, б). Очевидно, чем меньше ширина фильтра (при неявном фильтровании — размер ячеек сетки), тем большая часть кинетической энергии турбулентности воспроизводится отфильтрованной функцией. В книге [34] предлагается считать, что для корректного применения метода LES в численных расчётах указанная до-

ля энергии должна превышать 80%. Отсюда следует, что отсечка спектра в результате фильтрации должна иметь место на ниспадающем участке $E(k)$, т. е. на инерционном интервале.

Таким образом, вместо процедуры осреднения по времени (57) или по состояниям (20), применяемым в методе RANS, в методе LES применяется осреднение по малой окрестности в пространстве. Принципиальное отличие двух подходов заключается в том, что в случае RANS осреднение охватывает весь спектр турбулентных пульсаций, а в случае LES — только его коротковолновую часть, включая часть инерционного интервала. Неявной формой фильтрации является также интегрирование по контрольному объёму при построении дискретного аналога уравнений переноса. Этот эффект будет обсуждаться особо в разделе 2.2.7.4.

Что касается процедуры осреднения (фильтрации) уравнений Навье–Стокса, то в методах URANS и LES она выполняется аналогично. В результате применения операции фильтрации (126) к *уравнению неразрывности* для несжимаемой жидкости (51) получим:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_j} = 0. \quad (138)$$

В случае переменной плотности фильтрация уравнения неразрывности (48) выполняется с использованием равенства (127), что приводит к отфильтрованному уравнению

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (139)$$

Как и при осреднении по Рейнольдсу, нелинейное конвективное слагаемое в *уравнении движения* порождает тензор остаточных напряжений (residual stress tensor) $\tau_{ij}^r = \overline{u_j u_i} - \bar{u}_j \bar{u}_i$, аналогичный напряжениям Рейнольдса (72):

$$\overline{u_j u_i} = \bar{u}_j \bar{u}_i + (\overline{u_j u_i} - \bar{u}_j \bar{u}_i) \equiv \bar{u}_j \bar{u}_i + \tau_{ij}^r. \quad (140)$$

Величина

$$k^r = \frac{1}{2} \tau_{jj}^r \quad (141)$$

называется остаточной кинетической энергией. Как и прежде (см. раздел 2.2.2.2), изотропная часть тензора остаточных напряжений суммируется с

отфильтрованным давлением и образует модифицированное давление $\bar{p} + 2k^r/3$, а анизотропная часть имеет вид:

$$a_{ij}^r \equiv \tau_{ij}^r - \frac{2}{3}k^r\delta_{ij}. \quad (142)$$

С учётом проделанных операций отфильтрованные уравнения движения жидкости с постоянной плотностью и вязкостью (т.е. уравнения (54)) примут вид:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^r}{\partial x_j}. \quad (143)$$

В случае течений с переменной плотностью фильтрация по правилу (127) применяется к уравнению (53), в результате чего получаются следующие отфильтрованные уравнения:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \bar{\rho} \tau_{ij}^r \right), \quad (144)$$

где $\tau_{ij}^r = \widetilde{u_j u_i} - \tilde{u}_j \tilde{u}_i$.

Видно, что структура отфильтрованных уравнений (144) и (143) идентична уравнениям Рейнольдса (68) и (69). Отметим, что указанные уравнения получены без использования конкретной *формы* фильтра и потому справедливы как при явном, так и неявном фильтровании. В рассматриваемом случае также встаёт проблема замыкания, т. е. определения остаточных напряжений. Однако следует помнить, что в отличие от осреднённых полей отфильтрованные решения описывают случайный, нестационарный, трёхмерный процесс, даже если течение статистически стационарно²⁰. Ещё одно принципиальное отличие заключается в том, что в методе LES значение остаточных напряжений (оно рассматривается в последующих разделах) зависит от *размера* фильтра. Напомним, что в случае неявного фильтрования в качестве размера фильтра выступает та или иная характеристика размера ячейки сетки. Напротив, в моделях турбулентности на основе осреднения по Рейнольдсу используются только

²⁰ Под статистической стационарностью понимают постоянство во времени моментов функции распределения случайной величины, в том числе среднего значения, дисперсии, корреляций.

физические характеристики потока (в том числе, возможно, расстояние до твёрдой поверхности).

В случае явного фильтрования численное решение отфильтрованных уравнений Навье–Стокса (138), (144) неизбежно вносит погрешность в решение $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$. Поэтому для фактически полученного численного решения используют термин *разрешённое поле* (resolved field), имея ввиду разрешающую способность и расчётной сетки, и численного метода. В случае неявного фильтрования понятия отфильтрованного и разрешённого поля совпадают. Разность между точным и разрешённым решением называют *подсеточной* флуктуацией. В связи с этим, остаточные напряжения τ_{ij}^r также называют подсеточными (subgrid stress tensor).

Рассмотрим обмен энергией между отфильтрованным полем скорости $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ и остаточным полем $\mathbf{u}'(\bar{\mathbf{x}}, t)$. По определению, полная кинетическая энергия единицы массы движущейся жидкости равна $E = u_j u_j / 2$, кинетическая энергия отфильтрованного поля скорости составляет $K = \bar{u}_j \bar{u}_j / 2$, а остаточная кинетическая энергия есть $k^r = \tau_{jj}^r / 2$. С учётом определения остаточных напряжений (140) имеем:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \overline{u_j u_j} = \frac{1}{2} \bar{u}_j \bar{u}_j + \frac{1}{2} \tau_{jj}^r = K + k^r. \quad (145)$$

Уравнение переноса кинетической энергии $K = \bar{u}_j \bar{u}_j / 2$ отфильтрованного поля скорости совпадает с уравнением (85), если в качестве рейнольдсовых напряжений $\overline{u'_i u'_j}$ понимать остаточные напряжения τ_{ij}^r :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial u_j K}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{u}_i \tau_{ij}^r + \frac{\bar{u}_j \bar{p}}{\rho} - 2\nu \bar{u}_i \bar{S}_{ij} \right) - \underbrace{\left(-\tau_{ij}^r \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)}_{\substack{\text{Генерация} \\ \text{остаточной} \\ \text{кинетической} \\ \text{энергии}}} - \underbrace{2\nu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}_{\text{Диссипация}}. \quad (146)$$

Кроме того, можно получить и уравнение переноса остаточной кинетической энергии k^r , сходное с (86). Слагаемые в правой части уравнений (146) и (85) интерпретируются аналогично. Как и в методе RANS, при использовании метода LES размер фильтра (при неявном фильтровании — размер ячеек сетки) остаётся существенно больше колмогоровских масштабов, поэтому диссипация энергии $2\nu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}$ непосредственно из отфиль-

трованного поля оказывается относительно малой. Слагаемое $-\tau_{ij}^r \partial \bar{u}_i / \partial x_j$ показывает скорость изъятия энергии турбулентности из отфильтрованного поля и её переход в остаточную кинетическую энергию (энергию подсеточных пульсаций). Интересно отметить, что, вообще говоря, величина $P_k^r = -\tau_{ij}^r \partial \bar{u}_i / \partial x_j$ может быть отрицательной (напомним, что генерация кинетической энергии турбулентности в методе RANS положительна благодаря использованию гипотезы Буссинеска (74) для рейнольдсовых напряжений). Отрицательность скорости генерации энергии подсеточных пульсаций означает передачу энергии от малых масштабов к более крупным (backscatter).

Если выполняется расчёт течения с большим числом Рейнольдса (что означает наличие в энергетическом спектре инерционного интервала, разделяющего область генерации и вязкой диссипации энергии турбулентности), и размер фильтра попадает внутрь инерционного интервала, то большая часть кинетической энергии пульсаций содержится в отфильтрованном поле скорости: $\bar{E} \approx K$. Баланс кинетической энергии \bar{E} описывается уравнением, аналогичным (83), где основным стоком является величина $\varepsilon = 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ji}} \gg 2\nu \overline{S_{ij} S_{ij}}$. Сравнение этого уравнения с (146) приводит к выводу о том, что генерация остаточной кинетической энергии P_k^r приближённо равна ε . Это соответствует представлениям о локальном равновесии генерации и распада вихрей в инерционном интервале. Другими словами, в инерционном интервале энергия турбулентности не образуется и не испытывает вязкой диссипации, а лишь передаётся по спектру.

2.2.7.1. Модель Смагоринского

Для замыкания уравнений движения (144) необходима модель для расчёта остаточных напряжений, которая учитывает влияние подсеточных флуктуаций на численное решение. К настоящему времени предложено множество моделей такого рода, классификация которых приводится, например, в [3]. Простейшей моделью подсеточной турбулентности является модель Смагоринского, в которой делаются два допущения. Во-первых, предполагается линейная связь между тензором остаточных напряжений (точнее, его анизотропной частью) и тензором скоростей деформации осреднённого поля:

$$-\left(\tau_{ij}^r - \frac{2}{3}k^r\delta_{ij}\right) = 2\nu_{SGS}\left(\bar{S}_{ij} - \frac{1}{3}\bar{S}_{kk}\delta_{ij}\right), \quad (147)$$

где ν_{SGS} — остаточная вихревая вязкость, также называемая подсеточной вязкостью. Во-вторых, используется аналогия с моделью длины смешения (94) для расчёта подсеточной вязкости:

$$\nu_{SGS} = l_s^2 |\bar{S}| = (C_s \Delta)^2 |\bar{S}|, \quad (148)$$

где $l_s = C_s \Delta$, Δ — ширина фильтра, и C_s — константа Смагоринского. Отметим, что ширина фильтра вычисляется как характерный размер контрольного объёма расчётной сетки:

$$\Delta = (\Delta V)^{1/3} = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}. \quad (149)$$

С учётом (147) скорость генерации остаточной кинетической энергии равна:

$$P_k^r = -\tau_{ij}^r \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \left(2\nu_{SGS} \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3}(k + \nu_{SGS} \bar{S}_{kk}) \delta_{ij} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad (150)$$

и для несжимаемого течения с $\bar{S}_{kk} = \partial \bar{u}_k / \partial x_k = 0$ будем иметь (см. также равенство (88))

$$P_k^r = \nu_{SGS} (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}). \quad (151)$$

Как следует из (151), $P_k^r > 0$, и поэтому модель Смагоринского предполагает необратимый и односторонний перенос энергии отфильтрованного поля в остаточную кинетическую энергию.

Отметим, что выбор константы C_s влияет на диссипативные свойства модели. Используя энергетический спектр гомогенной турбулентности (17), Лилли в 1967 г. пришёл к выводу, что:

$$C_s = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3C} \right)^{3/4} \approx 0,17, \quad (152)$$

где $C \approx 1,5$ — константа в законе пяти третьих (17) (см. также [34, 3, 26]). Иногда целесообразно несколько уменьшить это значение, чтобы получить лучшее согласие с экспериментами. Несмотря на то, что единого рекомендуемого значения C_s не существует, для пристенных течений чаще всего используется $C_s = 0,1$, а для свободных — $C_s = 0,2$.

2.2.7.2. Динамическое определение подсеточной вязкости

Модель Смагоринского с постоянным значением C_s во всей расчётной области называют «статической». Один из недостатков статической модели Смагоринского (148) заключается в том, что оптимальное значение константы C_s оказывается разным в течениях разных типов. Кроме того, поскольку интенсивность подсеточных флуктуаций затухает вблизи твёрдых поверхностей, следует учитывать зависимость C_s от расстояния до них. На решение указанных проблем нацелен так называемый динамический метод, который определяет своё значение C_s для каждой точки потока.

Динамическая модель предполагает использование не одного, а двух фильтров с разной шириной. Пусть один из них, как и прежде, имеет ширину Δ , в случае неявного фильтрования связанную с характерным размером ячейки сетки. Вторым фильтр, называемый тестовым, имеет ширину $\hat{\Delta}$, причём, как правило, полагают $\hat{\Delta} = 2\Delta$. Каждому фильтру соответствует операция локального осреднения (126):

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \int G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{x}}; \Delta) u(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{r}}, t) d\bar{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \int G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{x}}; \hat{\Delta}) u(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{r}}, t) d\bar{\mathbf{r}}. \quad (153)$$

Можно применить осреднение с тестовым фильтром $\hat{\Delta}$ к решению, которое уже осреднено с фильтром Δ ; пусть $\hat{\hat{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ — результат такого двойного осреднения. Последовательное выполнение осреднения с двумя фильтрами эквивалентно однократному осреднению с некоторым эффективным (комбинированным) фильтром, ширина которого $\hat{\hat{\Delta}}$ зависит от Δ и $\hat{\Delta}$.

Разложение (132) теперь можно представить в следующем виде:

$$\bar{\mathbf{u}} = \underbrace{\hat{\hat{\mathbf{u}}}}_{\substack{\text{Масштаб} \\ \text{пульсаций} \\ \text{более } \hat{\Delta}}} + \left(\underbrace{\bar{\mathbf{u}} - \hat{\hat{\mathbf{u}}}}_{\substack{\text{Масштаб} \\ \text{пульсаций} \\ \text{между } \Delta \text{ и } \hat{\Delta}}} \right) + \underbrace{\bar{\mathbf{u}}'}_{\substack{\text{Масштаб} \\ \text{пульсаций} \\ \text{менее } \Delta}}, \quad (154)$$

где слагаемое $\bar{\mathbf{u}} - \hat{\hat{\mathbf{u}}}$ можно (помимо интерпретации, данной в (154)) рассматривать как носитель наименьших разрешённых масштабов или наибольших неразрешённых масштабов турбулентных пульсаций.

Однократное и двойное осреднение порождает свои остаточные напряжения:

$$\tau_{ij}^r = \overline{u_j u_i} - \bar{u}_j \bar{u}_i, \quad T_{ij}^r = \widehat{u_j u_i} - \widehat{\bar{u}_j} \widehat{\bar{u}_i}. \quad (155)$$

В ходе численного решения приближённо вычисляются величины \bar{u}_j и $\widehat{\bar{u}}_j$ (вторая из которых получается фильтрованием первой), в то время как величины $\overline{u_j u_i}$ и $\widehat{u_j u_i}$ неизвестны и требуют замыкания. В работе [17] было показано, что фильтрование первого из уравнений (155) и вычитание результата из второго уравнения (155) приводит к равенству:

$$L_{ij} = T_{ij}^r - \bar{\tau}_{ij}^r = \widehat{\bar{u}_j \bar{u}_i} - \widehat{\bar{u}}_j \widehat{\bar{u}}_i, \quad (156)$$

причём правая часть равенства (156) не требует замыкания и может быть определена, если известно поле \bar{u}_j . В связи с этим величину L_{ij} называют *разрешённым напряжением* (resolved stress). Величина L_{ij} (156) имеет такой же вид, как и остаточное напряжение τ_{ij}^r , если в качестве точного решения u_j выступает однократно отфильтрованное поле \bar{u}_j , а вместо фильтра Δ используется более широкий фильтр $\widehat{\Delta}$. Следовательно, величину L_{ij} можно понимать как вклад наибольших неразрешённых масштабов турбулентных пульсаций в остаточные напряжения. Как прежде, представляет интерес построение приближённой модели для анизотропной части тензора L_{ij} :

$$a_{ij} = L_{ij} - \frac{1}{3} L_{kk} \delta_{ij}. \quad (157)$$

Такая приближённая модель, построенная на основе модели Смагоринского в работе [16], излагается ниже. Перепишем модель Смагоринского (147), (148) так, чтобы формально допустить отрицательные значения подсеточной вязкости (что соответствует передаче энергии от подсеточных масштабов к масштабам, разрешённым в численном решении):

$$\tau_{ij}^r - \frac{1}{3} \tau_{kk}^r \delta_{ij} = -2(C_s \Delta)^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} = -2c_s \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}. \quad (158)$$

Модель (158) соответствует ширине фильтра Δ . Аналогичное соотношение для комбинированного фильтра, соответствующего двойному осреднению, имеет вид:

$$\mathbf{T}_{ij}^r - \frac{1}{3}\mathbf{T}_{kk}^r\delta_{ij} = -2c_S\widehat{\Delta}^2\left|\widehat{S}\right|\widehat{S}_{ij}, \quad (159)$$

где $\widehat{S}_{ij} = (\partial\widehat{u}_i/\partial x_j + \partial\widehat{u}_j/\partial x_i)/2$, а коэффициенты c_S полагаются идентичными в (158) и (159). Теперь можем записать выражение для разрешённого напряжения (156) с учётом модели Смагоринского:

$$\begin{aligned} L_{ij}^S &= \mathbf{T}_{ij}^r - \overline{\tau}_{ij}^r = -2c_S\widehat{\Delta}^2\left|\widehat{S}\right|\widehat{S}_{ij} + \frac{1}{3}\mathbf{T}_{kk}^r\delta_{ij} - \left(-2c_S\Delta^2\left|\overline{S}\right|\overline{S}_{ij} + \frac{1}{3}\overline{\tau}_{kk}^r\delta_{ij}\right) \\ &\approx c_S\left(2\Delta^2\left|\overline{S}\right|\overline{S}_{ij} - 2\widehat{\Delta}^2\left|\widehat{S}\right|\widehat{S}_{ij}\right) = c_S M_{ij}, \end{aligned} \quad (160)$$

где

$$M_{ij} = 2\Delta^2\left|\overline{S}\right|\overline{S}_{ij} - 2\widehat{\Delta}^2\left|\widehat{S}\right|\widehat{S}_{ij}. \quad (161)$$

Важно отметить, что для вычисления M_{ij} достаточно знание однократно отфильтрованного поля \overline{u}_j , которое приближённо вычисляется в ходе численного решения уравнений (144) с учётом отфильтрованного уравнения неразрывности. Теперь требуется определить такое значение коэффициента c_S , при котором выражение (160) даёт наилучшее приближение к анизотропной части тензора разрешенных напряжений (157). Эта задача была решена в работе [27], где минимизация среднеквадратичного отклонения между L_{ij}^S и a_{ij} позволила получить следующее выражение:

$$c_S = \frac{M_{ij}L_{ij}}{M_{kl}M_{kl}}. \quad (162)$$

Коэффициент c_S , вычисленный по формуле (162), может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В ряде случаев целесообразно искусственно ограничить минимальные и максимальные значения c_S . В частности, отрицательные значения c_S могут вызвать развитие численной неустойчивости. В связи с этим в Ansys Fluent 6.3 [8] изменение c_S ограничено интервалом от нуля до 0,23. Оказалось, что такой способ вычисления c_S приводит к качественно верному определению подсеточной вязкости в случае затухания турбулентности, т. е. в области ламинарно-турбулентного перехода и вблизи твёрдых поверхностей. Однако это не снимает необходимости использования сетки, достаточно мелкой

для разрешения энергосодержащих пульсаций. Отметим, что метод динамического определения c_S на основе модели Смагоринского (158) и формулы Лилли (162) не является единственным. Обзор других динамических моделей можно найти, например, в книгах [34] и [3].

2.2.7.3. Локальная модель вихревой вязкости, адаптированная для пристеночных течений (WALE)

Локальная модель вихревой вязкости, адаптированная для пристеночных течений (Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity, WALE) [32] преследует следующие цели: во-первых, обеспечить затухание подсеточной вязкости в пристеночной области в соответствии с асимптотическими соотношениями теории пограничного слоя ($\nu_{SGS} \propto y^3$), во-вторых, не использовать в явном виде расстояние до поверхности стенки и, в-третьих, учесть зависимость подсеточной вязкости не только от \bar{S}_{kj} (как в модели Смагоринского (148)), но и от $\bar{\Omega}_{kj}$ (как это следует из результатов DNS). В самом деле, модель Смагоринского (148) даёт ненулевую подсеточную вязкость вблизи стенки, если градиент скорости не равен нулю. Модификация (205) или приведённые ниже модификации по ван Дристу и Пиомелли (206, 207, 208) используют расстояние до стенки y , определение которого затруднено в областях сложной геометрии. В работе [32] предложено обойти эти ограничения следующим образом. Рассматривается тензор

$$\bar{S}_{ij}^d = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ij}^2 + \bar{g}_{ji}^2) - \frac{1}{3}\bar{g}_{kk}^2\delta_{ij}, \quad (163)$$

где $\bar{g}_{ij}^2 = \bar{g}_{ik}\bar{g}_{kj}$, $\bar{g}_{ij} = \partial\bar{u}_i/\partial x_j$, для которого можно показать, что

$$\bar{S}_{ij}^d = \bar{S}_{ik}\bar{S}_{kj} + \bar{\Omega}_{kj}\bar{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}(\bar{S}_{mn}\bar{S}_{mn} - \bar{\Omega}_{mn}\bar{\Omega}_{mn}). \quad (164)$$

В отличие от величины $\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}$, используемой в модели Смагоринского (148), величина $\bar{S}_{ij}^d\bar{S}_{ij}^d$ возрастает там, где велики не только значения компонентов тензора скоростей деформации, но и тензора вращения. В то же время, $\bar{S}_{ij}^d\bar{S}_{ij}^d \rightarrow 0$ в тех областях течения, где имеет место простой сдвиг скорости, т. е. непосредственно у стенки. Более того, если течение ламинарно, то величина $\bar{S}_{ij}^d\bar{S}_{ij}^d$ и, следовательно, подсеточная вязкость

также стремятся к нулю. Это открывает принципиальную возможность рассматривать течения с ламинарно-турбулентным переходом, в то время как статическая модель Смагоринского (148) к этому не приспособлена.

Можно показать [32], что $\overline{S}_{ij}^d \overline{S}_{ij}^d \propto y^2$ вблизи стенки ($y \rightarrow 0$). Следовательно, $(\overline{S}_{ij}^d \overline{S}_{ij}^d)^{3/2} \propto y^3$, что и требуется для выполнения условия $\nu_{SGS} \propto y^3$. В результате, подсеточная вязкость в модели WALE вычисляется по формуле [32]:

$$\nu_{SGS} = (C_w \Delta)^2 \frac{(\overline{S}_{ij}^d \overline{S}_{ij}^d)^{3/2}}{(\overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij})^{5/2} + (\overline{S}_{ij}^d \overline{S}_{ij}^d)^{5/4}}, \quad (165)$$

где знаменатель построен так, чтобы, во-первых, обеспечить требуемую размерность подсеточной вязкости и, во-вторых, нигде не стремиться к нулю. Отметим, однако, что в документации Ansys Fluent [8] указано на использование в формуле (165) значения $\min(\kappa, C_w \Delta)$ вместо $C_w \Delta$. Как видно на рис. 23, постоянная C_w по умолчанию имеет значение 0,325.

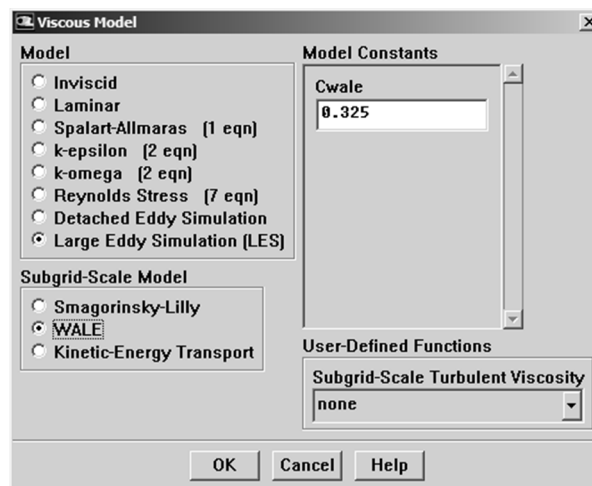


Рис. 23. Окно параметров модели LES WALE в Ansys Fluent 6.3 (Define/Models/Viscous...)

Таким образом, модель WALE не только обеспечивает демпфирование подсеточной вязкости в пристеночной области, но и предлагает отличный от модели Смагоринского метод расчёта подсеточной вязкости

вдали от стенок; в модели WALE этот метод учитывает не только \bar{S}_{kj} , но и $\bar{\Omega}_{kj}$, что лучше согласуется с данными DNS.

2.2.7.4. Модель с уравнением переноса остаточной кинетической энергии

Рассмотренные выше модели предполагают вычисление компонент тензора остаточных напряжений через локальные характеристики отфильтрованного поля скорости. Это значит, что предполагается локальное равновесие между генерацией и диссипацией энергии остаточных пульсаций, а предыстория остаточных напряжений и связанная с конвекцией зависимость от характеристик поля скорости в удалённых областях не принимается во внимание. Естественным способом учёта этих эффектов является построение уравнения переноса для остаточных характеристик, например для остаточной кинетической энергии. Указанная логика повторяет развитие моделей турбулентности на основе осреднения по Рейнольдсу. В самом деле, модель Смагоринского (148) является аналогом модели длины пути смещения (94), а построение уравнения переноса для остаточных напряжений аналогично моделям турбулентности с одним уравнением (см. раздел 2.2.5.2). Отличие заключается в том, что в качестве характерного пространственного масштаба остаточных пульсаций (потерянных в отфильтрованном поле) выступает характерный размер ячейки сетки, одновременно играющий роль ширины фильтра Δ . Кроме того, при использовании метода LES уменьшение размеров ячеек сетки уменьшает и различие между разными подсеточными моделями, в то время как различие между моделями RANS никак не связано с используемой расчётной сеткой.

Ansys Fluent 6.3 предлагает возможность численного решения уравнения переноса остаточной кинетической энергии следующего вида:

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} k \tilde{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_{SGS}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \bar{\rho} C_2 \frac{k^{3/2}}{\Delta}, \quad (166)$$

где подсеточная вязкость вычисляется аналогично формуле (98)

$$\mu_{SGS} = \bar{\rho} C_1 \sqrt{k} \Delta, \quad (167)$$

C_1 и C_2 — модельные коэффициенты, вычисляемые динамически.

Отметим, что Ansys CFX (версии до 11.0 включительно) содержит только модель Смагоринского (147), (148) и не предоставляет возможности динамического определения модельных коэффициентов.

2.2.7.5. Численные эффекты в роли подсеточной вязкости

При численном решении системы уравнений Навье–Стокса (например, в виде (51), (54)) получаются дискретные поля приближённых значений искомых величин в ячейках пространственной сетки. Вместе с ошибкой аппроксимации производной по времени, значительный вклад в отклонение численного решения от точного зачастую вносит ошибка пространственной дискретизации дифференциальных уравнений. Теория численных методов показывает, что численное решение с большей точностью удовлетворяет не исходному уравнению (54), а так называемому *модифицированному* уравнению переноса, которое содержит производные второго и более высокого порядка. При этом слагаемые с производными чётного порядка вносят вклад в диссипативные, а нечётного — в дисперсионные свойства численной схемы. Множители перед указанными производными зависят от шага сетки. Модифицированное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial (\tau_{ij}^r + \tau_{ij}^{num})}{\partial x_j}, \quad (168)$$

где τ_{ij}^{num} — слагаемое, пропорциональное Δ^p при $\Delta \rightarrow 0$ (Δ — размер ячейки сетки, p — порядок аппроксимации дифференциального оператора алгебраическим) и играющее роль дополнительного численного «напряжения». В качестве простого примера рассмотрим одномерное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (169)$$

Используя разложение в ряд Тейлора, можно показать, что если вместо *исходного* уравнения (143) численно решается *дискретное* уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{u(x) - u(x - \Delta)}{\Delta} = \nu \frac{u(x + \Delta) - 2u(x) + u(x - \Delta)}{\Delta^2} \quad (170)$$

(первый порядок аппроксимации конвективной производной), то численное решение удовлетворяет не исходному уравнению (169), а модифицированному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = (v + v^{num}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta^2), \quad (171)$$

где

$$v^{num} = \frac{1}{2} u \Delta \quad (172)$$

— схемная (численная) вязкость. Для противоточной ($u > 0$) аппроксимации (170) диссипативное слагаемое в модифицированном уравнении доминирует, что приводит к выраженным диссипативным свойствам и обеспечивает монотонность численного решения. Другие способы аппроксимации исходного уравнения (169) характеризуются взаимодействием численной диссипации и дисперсии, что одновременно с повышением формального порядка точности может привести к немонотонности или даже неустойчивости численного решения.

Существуют разные точки зрения на роль численной вязкости при использовании метода крупных вихрей. Одна из них заключается в том, что отфильтрованные уравнения должны быть решены с достаточной точностью, исключающей существенное влияние схемных эффектов. Отметим, что схемную диссипацию полностью исключить нельзя, и от неё зависит ширина спектра разрешённых пульсаций. Влияние схемных эффектов можно считать малым, если численное решение воспроизводит значительную часть инерционного интервала.

Противоположное мнение заключается в том, что численная вязкость сама может служить приближённой моделью подсеточной диссипации остаточных пульсаций, не содержащихся в отфильтрованном решении. Таким образом, предлагается концепция *неявного подсеточного моделирования за счёт численной диссипации*, присущей выбранному методу дискретизации (при этом предполагается, что «явные» подсеточные модели, такие как модель Смагоринского, активировать не следует).

В последнем случае выбор метода дискретизации влияет на механизм подсеточной диссипации энергии турбулентности. С одной стороны, метод дискретизации должен иметь достаточно высокий порядок точности, а с другой — оставаться монотонным, чтобы исключить появление

нефизических осцилляций в численном решении. В связи с этим, данный подход иногда обозначают MILES (Monotone Integrated LES).

Преимуществом такого подхода является возможность численного разрешения большей части частотного спектра пульсаций и автоматическая активация схемной диссипации только в областях больших градиентов решения. Очевидным недостатком данного подхода является сильная зависимость результатов расчёта как от выбранного метода дискретизации исходных уравнений, так и от используемой расчётной сетки. Основным аргумент скептиков заключается в том, что неявная численная вязкость (выполняющая функцию подсеточной диссипации) не воспроизводит свойств реальной мелкомасштабной диссипации (например, меру анизотропности подсеточных пульсаций). Кроме того, в численном решении проявляются не только диссипативные, но и дисперсионные свойства схем. Как результат, даже в случае согласия расчётных и измеренных данных требуется дополнительное обоснование того, что такое согласие не является результатом компенсации численных эффектов.

2.2.8. Моделирование отсоединённых вихрей (DES)

Характерные размеры турбулентных вихрей в пограничном слое вблизи твёрдой поверхности гораздо меньше, чем в развитом турбулентном потоке вдали от неё. В связи с этим, явное разрешение даже наиболее крупных вихрей в пограничном слое требует такого измельчения расчётной сетки, которое может привести к недопустимому росту длительности вычислений.

В то же время, для безотрывных пристеночных течений и потоков с небольшим отрывом имеются достаточно надёжные и экономичные модели на основе осреднения по Рейнольдсу. Для указанных течений модели RANS позволяют с достаточной точностью оценивать положение отрыва потока, сопротивление и подъёмную силу без чрезмерного измельчения сетки вблизи обтекаемой поверхности.

Однако для широкого круга практически важных течений, сопровождающихся *обширным* отрывом потока, существующие модели RANS и URANS приводят к большим ошибкам в расчёте указанных величин. Более того, принципиальная возможность создания универсальной модели на основе осреднения по Рейнольдсу ставится под сомнение (независимо от уровня сложности модели и её нестационарности) [45, 3], поскольку такая модель турбулентности не учитывает крупномасштабных возмущений те-

чения, обусловленных граничными условиями, формой и размерами рассматриваемой расчётной области; отметим, что именно на это и нацелен метод LES.

В связи с этим, возникла идея создания гибридного подхода, в рамках которого модель RANS активируется в пристеночной области, а модель LES — вдали от неё.

Наиболее успешным и распространённым гибридным подходом стал так называемый метод отсоединённых вихрей (Detached Eddy Simulation, DES), предложенный в 1997 г. П. Спалартом и позднее развитый в работах М. Стрельца, М. Шура, А. Травина и др. Приведём определение метода DES, данное в [45]: метод отсоединённых вихрей — это численное решение трёхмерных нестационарных уравнений с использованием *единой* модели турбулентности, которая действует как подсеточная модель в областях с высоким сеточным разрешением и как модель URANS в областях, где сеточное разрешение недостаточно.

Возможность выбора указанной модели турбулентности порождает целое семейство DES моделей, и некоторые из них доступны в Ansys Fluent и Ansys CFX.

В частности, Ansys Fluent 6.3 содержит модели DES на основе модели Спаларта–Аллмареса (DES SA), специальной модификации k – ε модели (realizable k – ε модель, DES k – ε) и модели сдвиговых напряжений Ментера (DES SST). В модели DES SA (рис. 24, а), предложенной в работе [37], используются уравнения (103)–(107), где вместо расстояния до стенки d подставляется следующая величина:

$$l_{DES} = \min\left(d, C_{DES} \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)\right), \quad C_{DES} = 0,65. \quad (173)$$

В модели DES k – ε (рис. 24, б) используется уравнение переноса k (91), в котором слагаемое, моделирующее диссипацию, представляется в виде $\rho k^{3/2}/l_{DES}$, где

$$l_{DES} = \min\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_{DES} \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)\right), \quad C_{DES} = 0,61. \quad (174)$$

Наконец, в модели DES SST [43] скорость диссипации кинетической энергии турбулентности в уравнении (117) умножается на величину

$$F_{DES} = \max\left(\frac{l_t}{C_{DES} \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)}, 1\right), \quad (175)$$

где $l_t = \sqrt{k}/C_\mu \omega$ и $C_{DES} = 0,61$ (рис. 25). Отметим, что равенство (175) эквивалентно следующему алгоритму расчёта пространственного масштаба турбулентности

$$l_{DES} = \min\left(\frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega}, C_{DES} \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)\right), \quad C_{DES} = 0,61. \quad (176)$$

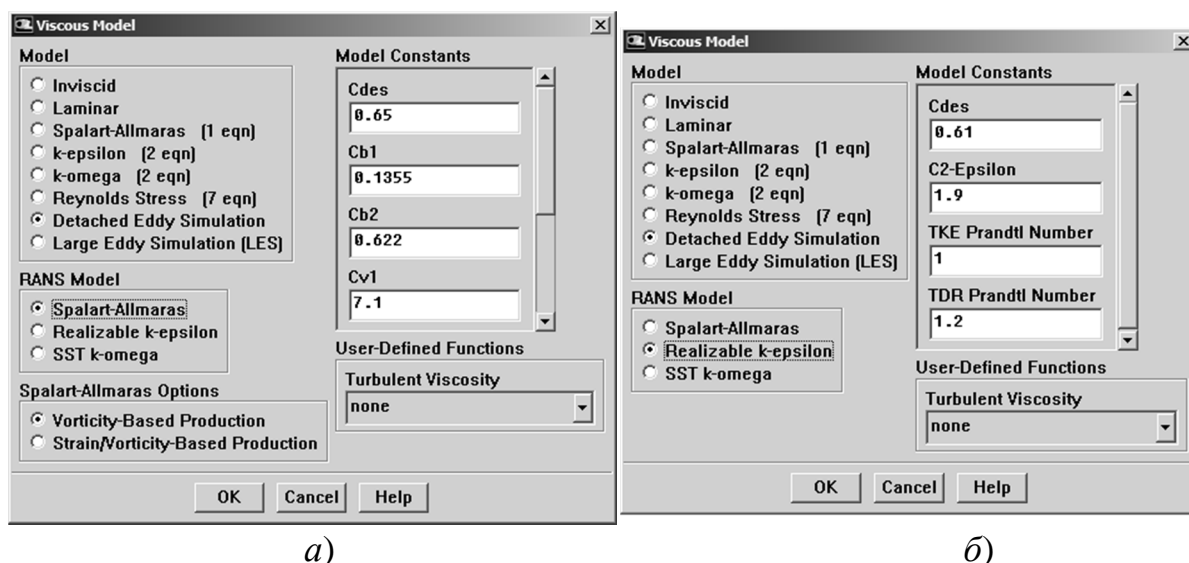


Рис. 24. Окна параметров моделей DES в Ansys Fluent 6.3 (Define/Models/Viscous...): а) — DES на основе модели Спаларта–Аллармареца; б) — DES на основе модели k – ϵ realizable

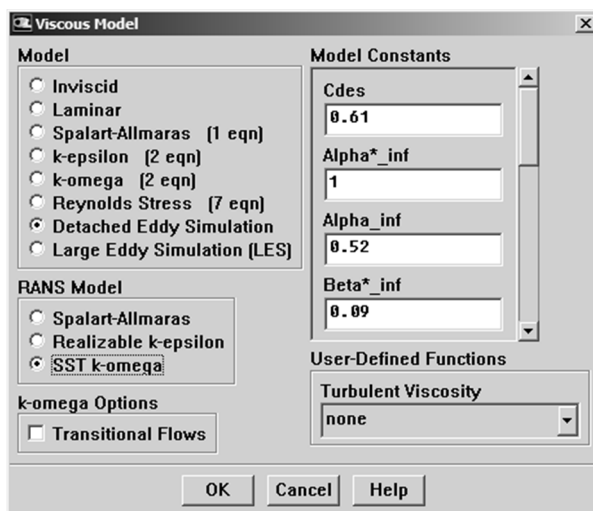


Рис. 25. Окно параметров модели DES SST в Ansys Fluent 6.3 (Define/Models/Viscous...)

Видно, что в каждом случае уравнения модели RANS активируются там, где пространственный масштаб крупных энергонесущих вихрей оказывается *меньше* характерного размера сетки:

$$d, \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega} < C_{DES} \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z). \quad (177)$$

В противном случае скорость диссипации начинает зависеть от размера ячеек сетки (что и характерно для метода LES), а модель RANS трансформируется в свой подсеточный аналог. Таким образом, каждая модель турбулентности порождает *свою* подсеточную модель. Можно показать, что в условиях баланса генерации и диссипации подсеточной кинетической энергии (в этом случае нестационарными, конвективными и диффузионными слагаемыми в уравнениях переноса можно пренебречь) такая подсеточная модель аналогична модели Смагоринского.

Отметим, что в отличие от (149) в методе DES качестве характерного размера ячейки сетки принимается максимальная протяжённость ячейки, а не кубический корень из её объёма. Необходимость такого выбора связана с тем, что в пристеночных областях один из размеров ячейки (в направлении нормали к стенке) часто оказывается намного меньше двух остальных.

Метод DES показывает хорошие результаты для течений с достаточно тонкими пограничными слоями, в которых пристеночные ячейки сетки сильно вытянуты вдоль твёрдой поверхности (там активируется модель RANS), и обширными зонами отрыва, в которых сетка близка к изотропной (в этой области активируется модель LES). Оказалось, однако, что противоположная ситуация (размер ячеек сетки вдоль твёрдой поверхности меньше толщины пограничного слоя) приводит к необоснованной активации модели LES в пристеночной зоне и чрезмерному снижению турбулентной вязкости. В результате снижается пристеночное трение, а расчётное течение испытывает отрыв, не наблюдающийся в реальности (grid-induced separation). Другими словами, возможно необоснованное включение режима LES на тех участках пристеночного потока, где размер ячеек сетки оказывается меньше толщины пограничного слоя.

Для того чтобы избежать активации модели LES в пристеночной зоне и использовать там уравнения модели RANS независимо от размера сетки, разработана модификация метода DES [41], названная авторами DDES (Delayed DES). С той же целью в Ansys CFX реализована так называемая зонная формулировка DES, которая использует функции-

переключатели модели SST. В результате вместо функции F_{DES} , определяемой равенством (175), используется функция $F_{DES-CFX}$:

$$F_{DES-CFX} = \max \left(\frac{l_t}{C_{DES} \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)} (1 - F_{SST}), 1 \right), \quad (178)$$

где

$$F_{SST} = C_{BF1} F_1 + C_{BF2} F_2, \quad (179)$$

F_1 и F_2 — функции-переключатели, вычисляемые по формулам (121) и (122). В Ansys CFX 10 по умолчанию принимается $F_{SST} = F_2$ ($C_{BF1} = 0$, $C_{BF2} = 1$).

Важно отметить, что в Ansys CFX предусмотрено переключение методов дискретизации уравнений переноса одновременно с переключением RANS и LES режимов: в области RANS используется противопоточная схема второго порядка, а в области LES — схема с центральными разностями [45, 43, 7].

Таким образом, метод DES представляет собой гибридный подход, в котором осуществляется переключение моделей RANS и LES в разных областях пространства. Унифицированная структура осреднённых и отфильтрованных уравнений открывает и другие, отличные от DES, подходы к построению гибридных моделей. В частности, возможно использование средневзвешенных значений рейнольдсовых и остаточных напряжений (или турбулентной и подсеточной вязкости). Обзор современных гибридных моделей приводится в [15].

2.2.9. «Второе поколение» моделей URANS

Несмотря на неоднозначное теоретическое обоснование нестационарных методов RANS (URANS) имеющийся опыт применения URANS к расчёту турбулентных течений с крупномасштабной нестационарностью показал преимущество URANS по сравнению с RANS. Например, стационарное решение для потока вокруг плохообтекаемого тела, если оно существует, воспроизводит симметричное поле скорости, в то время как нестационарное течение зачастую несимметрично. Нестационарное решение открывает возможность расчёта частоты формирования и отрыва крупномасштабных вихрей (в дорожке Кармана) и, как правило, лучше согласу-

ется с измерениями сопротивления и подъемной силы, действующей на обтекаемое тело.

Модели URANS опираются только на физические пространственные масштабы, в то время как модели LES используют характерный размер ячейки сетки в качестве масштаба подсеточных флуктуаций. С этим связаны свойства получаемых решений: в первом случае они достаточно гладкие (влияние турбулентных пульсаций учтено величиной рейнольдсовых напряжений), а во втором — флуктуируют случайным образом, поскольку значительная часть турбулентных пульсаций разрешается явно. В последние годы появились модели турбулентности, которые не используют сеточные характеристики в качестве пространственных масштабов, но, несмотря на это, частично воспроизводят случайные турбулентные флуктуации. Такие модели (их иногда называют «вторым поколением» моделей RANS (2G-URANS) [15]) кратко обсуждаются в данном разделе.

Метод адаптируемых масштабов (Scale-Adaptive Simulation, SAS) представляет относительно новую концепцию использования метода URANS, развитую в работах Ф. Ментера и Ю. Егорова (соответствующие ссылки имеются, например, в обзорах [31, 15] и в документации к Ansys CFX 11.0 [7]). Цель данной концепции — добиться более адекватного описания спектра нестационарных течений, используя уравнения, осреднённые по Рейнольдсу (напомним, что в «традиционном» методе URANS решение воспроизводит лишь очень узкий диапазон вокруг частоты образования и отрыва крупномасштабных вихрей, см. разделы 1.2.4 и 2.2.1). В данном методе вводится дополнительный пространственный масштаб турбулентности — длина Кармана:

$$L_{вк}^2 = \frac{|\bar{S}|^2}{\left| \left(\frac{\partial |\bar{S}|}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial |\bar{S}|}{\partial x_j} \right) \right|}, \quad (180)$$

использование которого в качестве длины пути смешения l_m приводит к нестационарным решениям LES-типа в областях интенсивно пульсирующего течения. В то же время, в областях устойчивого течения поведение численного решения аналогично поведению решения классических уравнений, осреднённых по Рейнольдсу.

Такой характер численных решений, полученных методом SAS, существенно отличается от классического поведения решений, характерных для метода RANS. В самом деле, даже использование нестационарных моделей (URANS) позволяет воспроизвести лишь сглаженные крупные тур-

булентные вихри без маломасштабных структур, свойственных турбулентности. Принято считать, что это является следствием применения осреднения по Рейнольдсу (или Фавру), которое подавляет маломасштабную турбулентность. Однако характер численных решений, полученных методом SAS, позволил заключить [31], что это — не единственная (или даже не главная) причина «гладких» решений, получаемых методом URANS. Основной причиной является использование модельного уравнения (108) для скорости диссипации, свойства которого не допускают негладких и нерегулярных решений. Вместо уравнения переноса для (108) метод SAS предполагает использование уравнение переноса для произведения kl_t , причём в этом уравнении используется длина Кармана (180). Благодаря тому, что значение L_{vK} зависит от вторых производных от поля средней скорости, численное решение приобретает способность воспроизводить маломасштабные, нерегулярные флуктуации турбулентного потока, которые обычно наблюдаются только в методе LES. Такая особенность интерпретируется как способность величины L_{vK} гибко подстраиваться (адаптироваться) к разрешённым масштабам поля скорости без избыточного подавления маломасштабных пульсаций, как это свойственно URANS.

При использовании метода SAS должны применяться схемы с низким уровнем численной диффузии. Оказалось, что характер численного решения не только количественно, но и качественно зависит от размеров ячеек пространственной сетки и от шага по времени: увеличение размеров ячеек и шага по времени приводит к переключению на стационарное численное решение. Такое поведение численного решения, полученного по методу SAS, является ещё одной иллюстрацией его способности адаптироваться к пространственным и временным масштабам, которые могут быть разрешены в данном расчёте. Отмечено также, что SAS приводит к стационарным решениям для безотрывных течений или течений со слабым отрывом и к нестационарным решениям — в случае обширного отрыва потока [31].

В Ansys CFX 11 указанные идеи использованы в моделях турбулентности с одним и двумя уравнениями. Во втором случае базовой моделью является SST модель Ментера.

Ещё одна группа моделей 2G-URANS носит название моделей частичного осреднения (Partially Averaged Navier–Stokes, PANS) [3, 15]. В моделях PANS уравнения для осреднённых величин трансформируются в исходные уравнения Навье–Стокса в зависимости от доли энергии турбу-

лентности, которую должно воспроизвести численное решение (назначается пользователем). Чем выше указанная доля, тем более мелкая сетка требуется для расчёта. Модели PANS пока не получили широкого распространения и в текущих версиях пакетов Ansys Fluent и Ansys CFX не представлены.

2.2.10. Применимость моделирования крупных вихрей

В дополнение к тем особенностям метода LES, которые уже были перечислены в начале этой главы (см. раздел 2.2.1), сделаем ещё несколько замечаний. При этом будем иметь в виду, что режим LES реализуется и при использовании гибридных методов, таких как DES.

В частности, в отличие от RANS, измельчение сетки и уменьшение шага по времени при использовании метода LES не приведёт к сеточно-независимому решению. Влияние сетки сказывается на вкладе подсеточных движений: указанный вклад тем больше, чем грубее сетка. Одновременно, чем грубее сетка, тем больше роль модели подсеточной турбулентности, на которую возлагается функция учёта особенностей используемой сетки. С другой стороны, если сетка достаточно подробна, то подсеточные движения относятся к маломасштабной турбулентности, которая универсальна (т. е. не зависит от истории образования вихрей) и пространственно изотропна²¹. Следовательно, даже весьма простая модель подсеточной турбулентности в LES может быть достаточно адекватной и универсальной, в то время как возможности построения универсальной модели RANS в настоящее время считаются исчерпанными [40, 44].

При использовании LES последовательное измельчение сетки устремляет подсеточную вязкость к нулю, что делает отфильтрованные уравнения, приближённо решаемые на данной сетке, идентичными исходным. Это означает предельный переход к прямому численному моделированию (DNS). Измельчение сетки при использовании RANS влияет лишь на качество численного решения осреднённых уравнений и никак не меняет их физический смысл.

Корректное использование LES требует явного разрешения значительной части энергетического спектра турбулентных пульсаций, включая длинноволновую часть инерционного интервала. Теоретическое обоснование LES предполагает, что инерционный интервал достаточно широк, интегральный и колмогоровский масштабы разделены, а области спектра, где

²¹ Вдали от твёрдых стенок.

происходит генерация и диссипация турбулентности, не перекрываются. В самом деле, только в этом случае открывается возможность построения простой модели подсеточной турбулентности, которую можно считать универсальной и не зависящей от условий образования крупных вихрей. Таким образом, неявно предполагается, что турбулентность полностью развита, а рассматриваемое течение характеризуется большим числом Рейнольдса. По-видимому, это объясняет и то, что успех метода LES хронологически был прежде всего достигнут при численном моделировании крупномасштабных атмосферных течений.

Особенности применения LES в турбулентных течениях с умеренными числами Рейнольдса, где возможно сближение интегральных и колмогоровских масштабов и, следовательно, вырождение инерционного интервала, к настоящему времени исследованы недостаточно. Течения при умеренных и малых числах Рейнольдса особенно трудны для численного моделирования, если в расчётной области имеет место ламинарно-турбулентный переход (как это происходит, например, в естественно-конвективных течениях). Опыт применения метода LES к таким течениям ограничен.

Применение уравнений метода LES на сетке, недостаточной для разрешения инерционного интервала, часто приводит к физически необоснованным результатам расчёта, основные характеристики которых (помимо сильной зависимости от размера сетки) значительно хуже соответствуют данным измерений, чем соответствующие результаты RANS на той же (или даже более крупной) сетке. Причина заключается в том, что генерация турбулентных пульсаций не воспроизводится грубой сеткой, в то время как турбулентная вязкость и, следовательно, турбулентная диссипация оказываются сильно завышенными.

Явное разрешение длинноволновой части инерционного интервала спектра требует подробных сеток, малого временного шага и большого числа шагов по времени для накопления статистики турбулентных пульсаций. Отсюда высокие требования к вычислительным ресурсам, из-за ограниченности которых метод LES долгое время рассматривался лишь как средство для решения академических задач. Однако с появлением и распространением многопроцессорных кластеров и технологий параллельных вычислений метод LES оказался доступным для решения практически важных инженерных задач авиа- и автомобилестроения, энергетики, пожаро- и взрывобезопасности, химической технологии и других областей.

Использование метода LES рекомендуется, в частности, в следующих случаях.

- В течении имеет место крупномасштабная неустойчивость, которая сопровождается сходом крупных вихрей.
- В течении ожидается выраженная пространственная анизотропность крупномасштабных пульсаций.
- Требуется разрешение малых пространственных масштабов, например, в расчётах химически реагирующих течений и при горении.
- Требуется расчёт генерации широкополосного шума турбулентным потоком.
- Имеются мощные вычислительные ресурсы и возможность выполнения расчёта в течение длительного времени (от нескольких дней до нескольких недель).

Информацию о течении, которую можно получить, используя разные подходы к моделированию турбулентности, иллюстрируют рис. 26 и 27, где показаны результаты расчётов обтекания круглого цилиндра при $Re = 50\,000$ [40, 44] и квадратного цилиндра при $Re = 100\,000$ [49] (числа Рейнольдса определены по диаметру цилиндра и стороне квадрата соответственно). Для течений такого типа характерны обширный отрыв потока, квазипериодический сход крупных (когерентных) вихрей с разных сторон цилиндра, формирование нестационарной рециркуляционной зоны, а также (для круглого цилиндра) турбулизация пограничного слоя при достаточно больших числах Рейнольдса (кризис сопротивления). Эти особенности течений затрудняют получение точных численных решений. Отметим также, что обтекание круглого цилиндра — это популярный, ставший классическим, тест, для которого имеются детальные результаты измерений (результаты расчётов для плохообтекаемого тела более сложной формы приведены в главе 3).

Рассмотрим результаты расчётов, представленные на рис. 26. Решение стационарных уравнений, осреднённых по Рейнольдсу (Steady RANS, SRANS), даёт двумерное поле, в то время как результаты расчётов в нестационарной постановке (как URANS, так и DES) дают трёхмерные поля. Оказалось, что метод SRANS даёт заниженное значение коэффициента сопротивления (0,9), метод URANS — завышенное (1,7), в то время как DES приводит к наилучшему согласию расчётных (1,05 на грубой сетке и 1,32 на мелкой сетке) и экспериментальных (1,2) значений [40].

В расчётах, представленных на рис. 27, использовали методы URANS (модель рейнольдсовых напряжений) и LES (модель Смагорин-

ского с пристеночным демпфированием по Ван-Дристу, $C_s = 0,1$). Неструктурированная сетка для метода URANS содержала примерно $0,2 \cdot 10^6$ узлов, а для метода LES — $4,2 \cdot 10^6$ узлов; в обоих случаях использовали одинаковые граничные условия. В расчётах определяли, в частности, характерную частоту схода крупномасштабных вихрей. Безразмерное значение указанной частоты даётся числом Струхалия (произведение частоты на характерный размер, делённое на скорость набегающего потока). Значение числа Струхалия, измеренное в экспериментах, составляет 0,143. Соответствующие значения, полученные численно, составляют 0,121 (URANS) и 0,144 (LES). Таким образом, метод LES позволил получить результат, гораздо более близкий к эксперименту, чем URANS. Кроме того, указанные методы воспроизводят течения существенно разной структуры: метод URANS приводит к практически двумерным полям скорости и давления (рис. 27, в), в то время как соответствующие поля, полученные методом LES, трёхмерны (рис. 27, г).

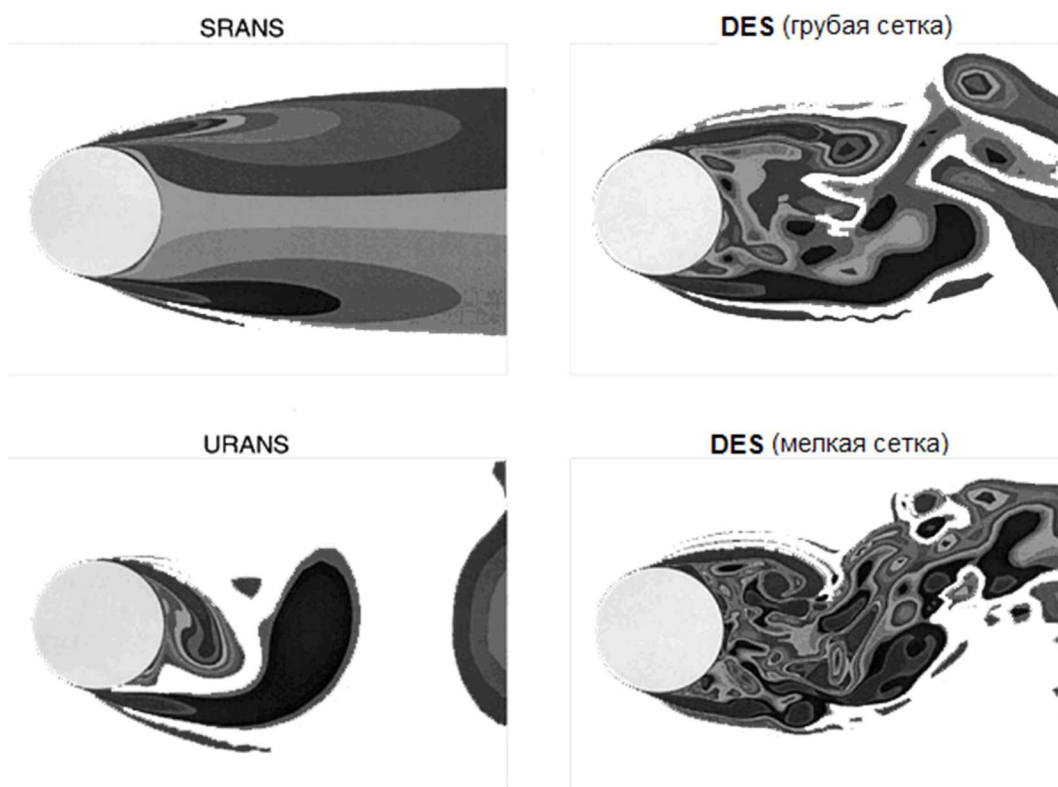


Рис. 26. Расчёт обтекания круглого цилиндра при $Re = 50\,000$ [40, 44] с помощью стационарного (SRANS) и нестационарного (URANS) метода RANS и метода DES на двух сетках (показано поле завихрённости)

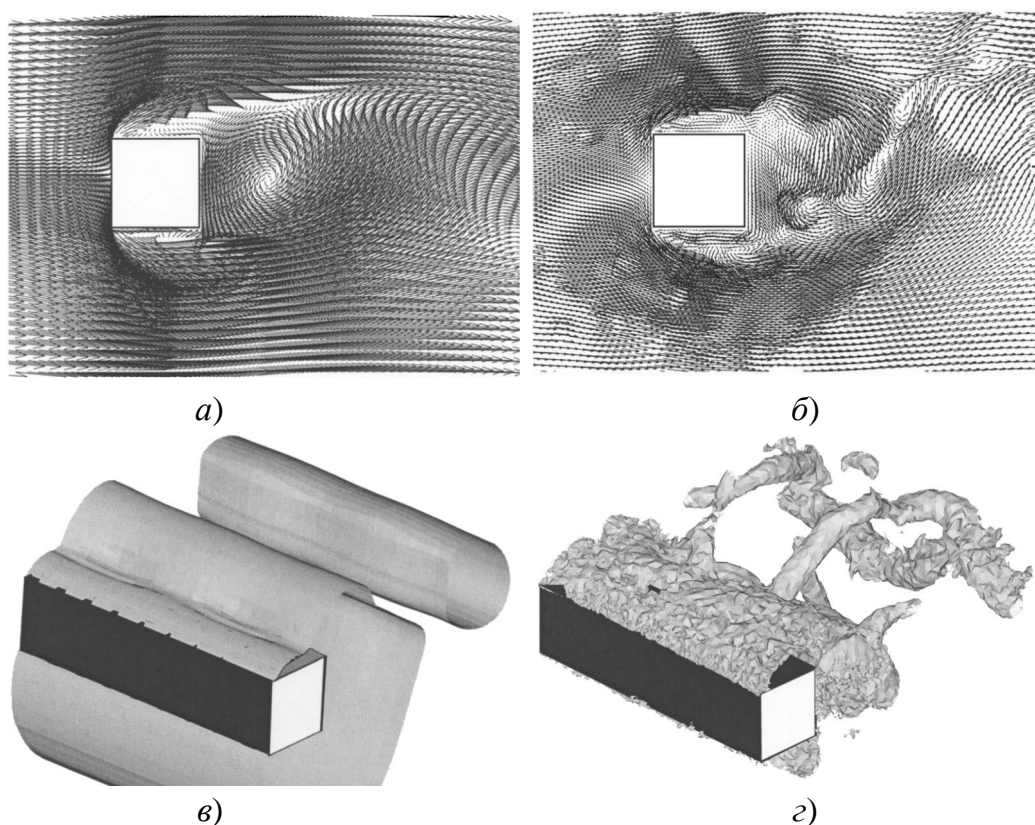


Рис. 27. Расчёт обтекания квадратного цилиндра при $Re = 100\,000$ [49] с помощью нестационарного метода URANS и метода LES: *a)* — URANS, мгновенное поле скорости; *б)* — LES, мгновенное поле скорости; *д)* — URANS, мгновенное поле давления; *е)* — LES, мгновенное поле давления

Вернёмся к рис. 26 и сделаем ещё два полезных наблюдения. Во-первых, поля, осреднённые во времени, качественно отличаются от мгновенных полей. Это уже было отмечено при сопоставлении фотографий турбулентного потока, сделанных с большой и малой выдержкой (рис. 2). Во-вторых, при использовании LES измельчение сетки слабо влияет на крупномасштабную структуру течения, но добавляет в неё всё более маломасштабные элементы.

2.3. ПРИСТЕНОЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

2.3.1. Метод URANS

Напомним, что так называемые высокорейнольдсовы модели турбулентности (например, стандартная k - ϵ модель), справедливы в предположении развитой турбулентности, т. е. при $Re_t = u'l_t/\nu = k^2/\epsilon\nu \gg 1$. Для их применения в пристеночной области, где локальное число Рейнольдса мало, требуется модификация.

С учётом того, что в пограничном слое существует тонкая пристеночная зона (вязкий подслой, viscous sublayer), в которой турбулентные пульсации затухают, а напряжение трения обусловлено молекулярной вязкостью жидкости, указанная модификация выполняется в рамках одного из двух подходов. В первом из них расчётная сетка строится так, что центр первого пристеночного объёма находится *за пределами* вязкого подслоя, а для задания граничных условий в таком узле применяется специальный метод — метод пристеночных функций (wall functions). В этом случае все узлы расчётной сетки находятся в области развитой турбулентности, и потому в них можно применять уравнения высокорейнольдсовых моделей. Такой подход позволяет использовать более грубую сетку вблизи твёрдых поверхностей.

Второй подход для учёта пристеночных эффектов требует построения сетки, узлы которой находятся *внутри* вязкого подслоя. При этом уравнения модели модифицируются таким образом, чтобы они выполнялись как в высокорейнольдсовой области вдали от твёрдых поверхностей, так и в низкорейнольдсовой пристеночной зоне. Модели такого типа называют низкорейнольдсовыми. Некоторые модели турбулентности изначально создавались так, чтобы применяться для расчёта пристеночных течений (SA модель) при условии достаточно мелкой сетки в пограничном слое. Такие модели также относятся к низкорейнольдсовым.

Метод пристеночных функций представляет наиболее экономичный способ приближённого расчёта многих практически важных течений. Если характер течения не соответствует допущениям, сделанным при построении пристеночных функций, данный подход может привести к неприемлемым ошибкам в расчёте напряжения на стенке. В этих случаях может быть полезна низкорейнольдсовая версия модели турбулентности. Отметим, что в Ansys Fluent и Ansys CFX пристеночные функции активируются

автоматически и для низкорейнольдсовых моделей турбулентности, если сетка оказывается слишком грубой вблизи стенок.

Ниже приводится описание метода пристеночных функций для k - ε модели (см., например, [4, 50, 34]), а затем даётся краткий обзор низкорейнольдсовых модификаций k - ε модели.

2.3.1.1. Метод пристеночных функций

При численном решении уравнений переноса расчетная область разбивается на контрольные объемы, причем скалярные величины определены в центрах объемов, а проекции скорости — на гранях. Пример такой ячейки показан на рис. 28. Метод пристеночных функций рассматривает двухслойную структуру пограничного слоя. Предполагается, что вблизи твёрдой поверхности существует тонкий пристеночный слой с малым уровнем турбулентных пульсаций и доминирующим влиянием вязкости (вязкий подслой), в то время как за пределами вязкого подслоя формируется развитый пограничный слой (fully turbulent layer), где, наоборот, турбулентные пульсации велики, а молекулярная вязкость незначительна. Способ расчёта турбулентных характеристик в пристеночном контрольном объёме зависит от того, находится его центр внутри вязкого подслоя или в турбулентном пограничном слое.

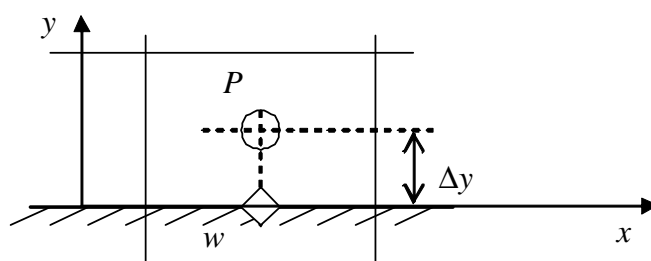


Рис. 28. Пристеночный контрольный объём

Будем использовать следующие допущения.

1. Градиенты компонент скорости и скалярных величин (кроме давления) по нормали к твёрдой поверхности намного превосходят градиенты вдоль указанной поверхности.

2. Можно исключить из рассмотрения производные по времени в уравнениях переноса (в пристеночной области течение считается квази-стационарным).

3. Пренебрегаем вкладом градиента в уравнение движения.

4. Генерация и диссипация турбулентных параметров (кинетической энергии и скорости её диссипации) уравновешивают друг друга: $\rho P_k \approx \rho \epsilon$ или, с учётом (88) и допущения 1,

$$\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \rho \epsilon. \quad (181)$$

Метод пристеночных функций использует приближённые аналитические решения для профиля скорости в вязком подслое и развитом пограничном слое. С учётом принятых допущений уравнение движения (53) в вязком подслое ($y < \delta$) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0, \quad (182)$$

причём для уравнения (182) выполняются следующие граничные условия:

$$y = 0: \quad \bar{u} = 0, \quad \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau_w, \quad (183)$$

где касательное напряжение на стенке обозначено τ_w . Решением задачи (182), (183) является линейный профиль скорости

$$y < \delta: \quad \bar{u} = \frac{\tau_w}{\mu} y. \quad (184)$$

Теперь рассмотрим уравнение движения в развитом турбулентном пограничном слое. Осреднённое уравнение движения (68), в котором учтены принятые допущения, примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) = 0. \quad (185)$$

В качестве граничного условия для уравнения (185) используется равенство

$$y = 0: \quad \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} = \tau_w, \quad (186)$$

поскольку при приближении к твёрдой поверхности имеем $u' \rightarrow 0$, $v' \rightarrow 0$ и $\overline{u'v'} \rightarrow 0$. Интегрирование уравнения (185) с учётом условия (186) даёт

$$\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} = \tau_w. \quad (187)$$

В зоне развитой турбулентности (при $y > \delta$) $\mu \partial \bar{u} / \partial y \ll \overline{\rho u'v'}$, поэтому при $y > \delta$ можно положить

$$\overline{\rho u'v'} \approx \tau_w. \quad (188)$$

Для определения турбулентного напряжения $\overline{\rho u'v'} = \mu_t \left| \partial \bar{u} / \partial y \right|$ используем формулу Прандтля (92) с длиной пути смешения (93):

$$\overline{\rho u'v'} = \mu_t \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \rho (\kappa y)^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (189)$$

С учётом (188) и (189) получим уравнение

$$\rho (\kappa y)^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \tau_w, \quad (190)$$

справедливое при $y > \delta$. Интегрирование уравнения (190) даёт *логарифмический профиль скорости*

$$\bar{u}(y) = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + \text{const}. \quad (191)$$

Здесь оказывается полезным определение так называемой динамической скорости (в англоязычной литературе называемой friction velocity):

$$V^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad \tau_w = \rho V^{*2} \quad (192)$$

и безразмерной координаты

$$y^+ = \frac{y V^*}{\nu}. \quad (193)$$

С учётом определений (192) и (193) равенство (191) можно записать следующим образом:

$$\frac{\bar{u}}{V^*} = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+), \quad (194)$$

где E — константа, которую ещё предстоит определить.

Таким образом, представление о двухслойной структуре пристеночного течения приводит к следующему приближенному выражению для профиля скорости:

$$\bar{U}^+ = \frac{\bar{u}}{V^*} = \begin{cases} y^+, & y^+ \leq y_0^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+), & y^+ > y_0^+ \end{cases} \quad (195)$$

Для постоянной Кармана и значения универсальной координаты, разделяющего вязкий подслой и турбулентный пограничный слой, обычно принимают значения, близкие к $\kappa = 0,41$ и $y_0^+ = 11,5$. Численное значение константы E можно получить из условия сшивки линейного и логарифмического профиля на границе вязкого слоя; в этом случае будем иметь $E = \exp(\kappa y_0^+) / \kappa = 9,705$. Графическое представление профиля скорости в турбулентном течении вблизи твердой поверхности дано на рис. 29.

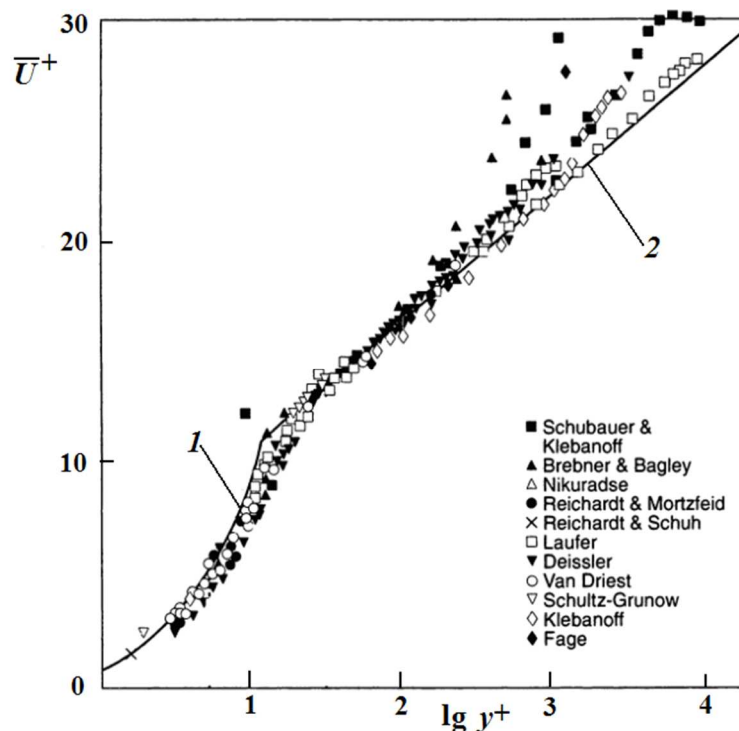


Рис. 29. Профиль скорости в турбулентном течении вблизи твердой поверхности: точки — измерения разных экспериментаторов около гладких стенок в трубах, каналах и пограничном слое, сплошные линии — линейный профиль (1) и логарифмический профиль (2) [11, 6]

Вернёмся к проблеме постановки граничных условий для скорости в пристеночном объёме сетки. Если этот объём достаточно мал, то его центр находится в вязком подслое, где имеет место линейный профиль касательной скорости. В этом случае производная скорости $\partial\bar{u}/\partial y$ по нормали к поверхности хорошо аппроксимируется конечной разностью, а в качестве граничного условия для скорости можно использовать условие прилипания на твёрдой поверхности: $\bar{u} = 0$ при $y = 0$. Такой подход применяется в расчётах ламинарных течений.

Однако в случае турбулентного потока толщина вязкого подслоя δ часто оказывается настолько малой, что допустимая²² расчётная сетка не позволяет разместить первый пристеночный узел внутри вязкого подслоя. В результате может оказаться, что указанный пристеночный узел находится в зоне развитого турбулентного пограничного слоя. Здесь изменение касательной скорости по мере удаления от стенки нелинейно, и использование разностной аппроксимации для производной $\partial\bar{u}/\partial y$ приводит к большой ошибке. Вместо этого применяется приближённое аналитическое решение для скорости в виде логарифмического профиля (194). Отметим, что для нахождения значения \bar{u} из логарифмического профиля (194) требуется вычислить динамическую скорость V^* . Для её определения можно использовать последнее известное значение \bar{u} и решить уравнение (194) относительно V^* методом итераций. Однако чаще используется другой подход, излагаемый ниже²³.

В рамках этого подхода используются следующие выражения для кинетической энергии турбулентности и скорости её диссипации в развитом турбулентном пограничном слое:

$$k = \frac{V^{*2}}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{V^{*3}}{\kappa\Delta y}. \quad (196)$$

Эти соотношения можно получить, используя условия равновесия между генерацией и диссипацией турбулентности (181) и равенства (189), (99) и (102). Подставляя равенства (196) в уравнение для скорости диссипации (108) и учитывая, что $\mu + \mu_t/\sigma_\varepsilon \approx \mu_t/\sigma_\varepsilon$, можно получить для при-

²² Следует отметить, что расчётная сетка не должна допускать больших перепадов размеров соседних контрольных объёмов.

²³ Причина заключается в том, что значение динамической скорости V^* может оказаться равным нулю (например, в точке отрыва потока).

стеночной области, где $\bar{u}_j \approx 0$ и $P_k \approx \varepsilon$, следующую связь между модельными константами:

$$\frac{\sigma_\varepsilon (C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2}) \sqrt{C_\mu}}{\kappa^2} = 1. \quad (197)$$

Используя первое равенство (196), значение динамической скорости можно выразить через значение кинетической энергии турбулентности. Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности (например, уравнение (91) при использовании k - ε модели) решается численно во всех ячейках сетки, причём в качестве граничного условия на твёрдой поверхности можно использовать условие затухания турбулентности $k = 0$. Отметим также, что если первый пристеночный узел находится в развитом турбулентном пограничном слое, то с учётом локального равновесия генерации и диссипации кинетической энергии турбулентности (допущение 4), можно пренебречь переносом k в направлении стенки и вместо условия $k = 0$ использовать условие $\partial k / \partial y = 0$. В результате для динамической скорости получаем следующие соотношения:

$$\rho_P V_P^{*2} = \begin{cases} \mu \frac{u_P}{\Delta y_P}, & y_P^+ \leq y_0^+ \\ \rho_P \sqrt{C_\mu} k_P, & y_P^+ > y_0^+ \end{cases}, \quad (198)$$

где индекс P означает первый пристеночный узел (рис. 28), а u_P — параллельная стенке компонента скорости в точке P .

По известному значению V^* определяется касательное напряжение на твёрдой поверхности $\tau_w = \rho V^{*2}$, значение которого и подставляется в качестве аппроксимации для $\mu \partial u / \partial y - \rho \overline{u'v'}$ (см. формулу (187)) в дискретный аналог уравнения движения в первом пристеночном узле расчётной сетки.

Отметим, что второе равенство (196) определяет значение ε в первом пристеночном узле, которое используется в качестве граничного условия при решении соответствующего уравнения переноса, например (108) (значение ε на стенке не определяется). В случае попадания первого пристеночного узла внутрь вязкого подслоя можно использовать асимптотическое соотношение [50], в соответствии с которым $\varepsilon \approx 2\mu k / \rho \Delta y^2$, если $y < \delta$. Таким образом, граничное условие для ε примет вид:

$$\varepsilon_P = \begin{cases} \frac{2\mu_P k_P}{\rho_P \Delta y^2}, & y_P^+ \leq y_0^+ \\ \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{\kappa \Delta y}, & y_P^+ > y_0^+ \end{cases}. \quad (199)$$

где, как и прежде, индекс P означает первый пристеночный узел (рис. 28), а k_P — значение кинетической энергии турбулентности в точке P .

Остаётся лишь выразить значение универсальной координаты y_P^+ через известные величины. В соответствии с (196) будем иметь:

$$y_P^+ = \frac{C_\mu^{1/4} \rho_P \sqrt{k_P} \Delta y_P}{\mu_P}. \quad (200)$$

В документации Ansys Fluent [8] величина, определяемая равенством (200), обозначена y^* , чтобы подчеркнуть её отличие от определения (193): $y^+ = yV^*/\nu = y\sqrt{\tau_w/\rho}/\nu$. Значения y^+ и y^* близки, если точка находится в области логарифмического пограничного слоя и выполнены условия, использованные при выводе соотношений (196). Отметим, что положение первого пристеночного узла следует учитывать и при дискретизации слагаемого P_k , описывающего генерацию турбулентности в уравнении переноса кинетической энергии. С учётом использованных выше допущений можно положить:

$$P_k = \begin{cases} 0, & y_P^+ < y_0^+ \\ \rho \varepsilon, & y_P^+ \geq y_0^+ \end{cases}, \quad (201)$$

где ε вычисляется по формуле (199).

Изложенный выше метод пристеночных функций принято называть стандартным. Следует помнить, что стандартный метод пристеночных функций имеет теоретическое обоснование лишь для течений с большими числами Рейнольдса, при условии локального равновесия между генерацией и диссипацией турбулентности, в отсутствие градиентов давления и отрыва потока. Несмотря на это метод часто применяется и в тех случаях, когда эти условия не выполнены.

Помимо стандартного алгоритма пристеночных функций современное коммерческое программное обеспечение предоставляет и другие возможности моделирования пристенной турбулентности. В частности, в Ansys Fluent 6.3 имеются следующие модели:

1. стандартные пристеночные функции;
2. неравновесные пристеночные функции (Non-Equilibrium Wall Functions — учёт градиента давления, уточнённый баланс кинетической энергии турбулентности);
3. модифицированные пристеночные функции (Enhanced Wall Functions);
4. модифицированное моделирование в пристенной области (Enhanced Wall Treatment);
5. пристеночные функции, определяемые пользователем (User-Defined Wall Functions).

В Ansys Fluent 6.3 стандартные пристеночные функции используются для k - ε моделей, моделей рейнольдсовых напряжений и LES. Модель Спаларта–Аллмареса и k - ω модель предназначены для использования на всей толщине пограничного слоя (при условии достаточно мелкой сетки в пристеночной области), однако и для них активируются пристеночные функции в случае грубой сетки вблизи твёрдых поверхностей.

При построении расчётных сеток рекомендуется располагать центры пристеночных контрольных объёмов в логарифмической зоне полностью развитого турбулентного пограничного слоя, где $30 < y^+ < 100$ (верхняя граница может быть увеличена в течениях с большим числом Рейнольдса). Кроме того, не следует допускать сильного изменения шага сетки по нормали (не более чем на 20–30 %). Для обеспечения требуемой точности может потребоваться несколько десятков контрольных объёмов, расположенных внутри пограничного слоя по нормали к обтекаемой поверхности.

Ansys CFX также использует аппарат пристеночных функций, в том числе в режиме автоматического определения зоны пограничного слоя (вязкий подслоя или развитый пограничный слой), в которой находится пристеночный контрольный объём (scalable wall function). Пользователь имеет возможность вводить своё определение пристеночных функций (user defined functions).

2.3.1.2. Низкорейнольдсовые модели турбулентности

Низкорейнольдсовые модели турбулентности преследуют следующие цели: во-первых — учесть ослабление турбулентных пульсаций в пристеночной области, где доминирует молекулярная вязкость, а турбулентные пульсации затухают; во-вторых — адекватно воспроизвести

асимптотическую зависимость скорости от расстояния до твёрдой поверхности при $y \rightarrow 0$.

Отметим, что уравнения низкорейнольдсовой модели справедливы как в пристеночной области (малые числа Рейнольдса), так и в развитой турбулентности (большие числа Рейнольдса). Опубликовано большое количество версий низкорейнольдсовых моделей. В качестве примера отметим, что те из них, которые основаны на k - ε модели турбулентности, используют следующие уравнения переноса кинетической энергии турбулентности и скорости её диссипации:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} + \rho P_k - \rho \varepsilon - \rho D, \quad (202)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} f_1 P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \rho E. \quad (203)$$

Турбулентная вязкость определяется по формуле

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (204)$$

Благодаря активации демпфирующих функций f_1 , f_2 и f_μ и дополнительных источников слагаемых D и E в пристеночной области интегрирование уравнений для k и ε возможно во всей расчётной области, включая вязкий подслой вплоть до твёрдой поверхности, на которой полагают $k = 0$ и $\varepsilon = 0$. Описание и обсуждение нескольких низкорейнольдсовых моделей можно найти, например, в книге [50]. Напомним, что применение моделей данного типа требует использования таких расчётных сеток, которые обеспечивают разрешение вязкого подслоя. Это значит, что безразмерная координата первого пристеночного узла $y^+ = yV^*/\nu$ должна быть порядка единицы.

Следует отметить, что в текущей версии Ansys Fluent 6.3 указанные низкорейнольдсовые модели не представлены. Однако для учёта низкорейнольдсовых эффектов в пристеночной области с одновременным разрешением вязкого подслоя Ansys Fluent 6.3 предоставляет модифицированную процедуру для расчёта турбулентной вязкости (enhanced wall treatment) для k - ε и RSM моделей и модифицированные пристеночные функции (enhanced wall functions) для моделей SA и k - ω (а также для метода LES) [8].

2.3.2. Метод LES

Существует несколько подходов к моделированию пристеночных эффектов при использовании LES. В частности, Ansys Fluent 6.3 использует линейный профиль скорости, если первый пристеночный узел попадает в вязкий подслой. В противном случае возможна активация либо стандартных (по умолчанию), либо специальных пристеночных функций (модель WALE, которая кратко обсуждается ниже). Кроме того, в Ansys Fluent модель Смагоринского реализована в виде модификации Смагоринского–Лилли, в которой учитывается снижение подсеточной вязкости при приближении к твёрдой поверхности. Это достигается путём замены длины пути смешения $l_s = C_s \Delta$ на величину, зависящую от расстояния до твёрдой поверхности:

$$C_s \Delta \leftarrow \min(\kappa y, C_s \Delta). \quad (205)$$

Напомним, что в статической версии модели значение C_s одинаково всюду в расчётной области (по умолчанию $C_s = 0,1$, рис. 30, *a*), а в динамической версии (см. рис. 30, *б*) используется алгоритм Германо–Лилли, изложенный в разделе 2.2.7.2.

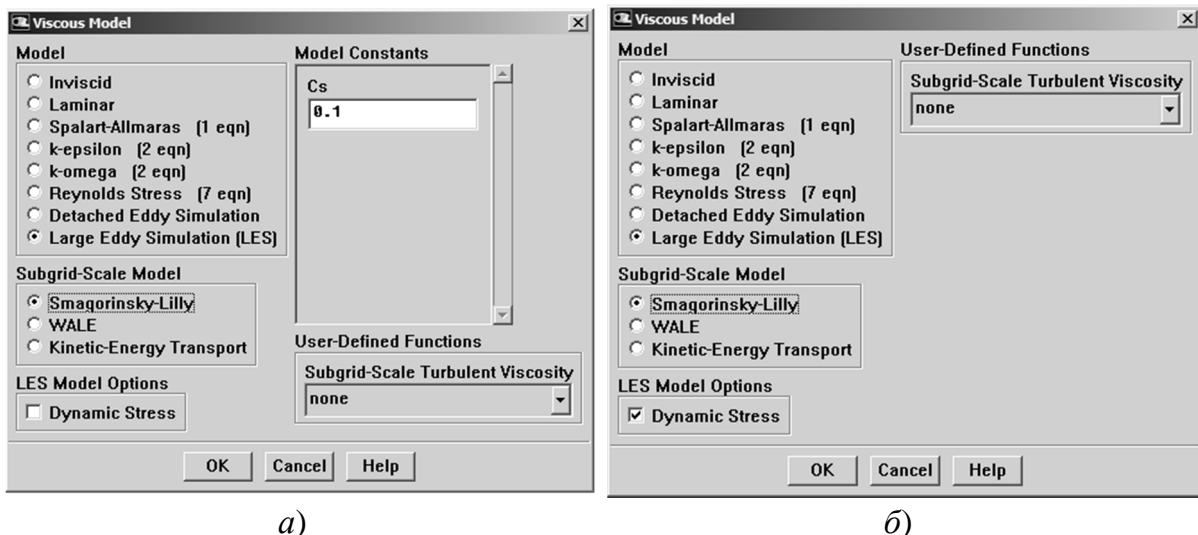


Рис. 30. Окна параметров модели LES Смагоринского–Лилли в Ansys Fluent 6.3 (Define/Models/Viscous...): *a*) — статическая модель; *б*) — динамическая модель

Ещё один метод демпфирования подсеточной вязкости в пристеночной области предлагает модель WALE [32], также представленная в соста-

ве Ansys Fluent 6.3. Как показано выше в разделе 2.2.7.3 модель WALE (помимо её адаптированности к пристеночным течениям) содержит отличный от модели Смагоринского метод расчёта подсеточной вязкости вдали от стен (с учётом не только \bar{S}_{kj} , но и $\bar{\Omega}_{kj}$).

Ansys CFX 11.0 [7] использует модифицированное выражение для подсеточной вязкости (148), где вместо длины пути смешения $l_s = C_s \Delta$ полагают:

$$C_s \Delta \leftarrow \min(\kappa y, f_\mu C_s \Delta). \quad (206)$$

По умолчанию считается, что $f_\mu = 1$ (модель Смагоринского–Лилли), однако имеется возможность использования демпфирующих функций ван Дрифта

$$f_\mu = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A}\right) \quad (207)$$

и Пиомелли

$$f_\mu = \sqrt{1 - \exp\left(-\left(\frac{y^+}{A}\right)^3\right)}. \quad (208)$$

Рекомендуемое значение константы $A = 25$. Отметим, что полезный обзор способов учёта влияния стенок в разных видах течений приведён в книге [3].

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ЗА ПЛОХООБТЕКАЕМЫМ ТЕЛОМ НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной главе показан пример использования многопроцессорных кластеров Информационно-телекоммуникационного комплекса СПбГПУ для расчёта турбулентного отрывного течения за плохообтекаемым телом, закреплённым на плоской поверхности. Задачи такого типа встречаются при проектировании деталей автомобилей, поездов, самолётов, кораблей, строительных конструкций и во многих других практических приложениях. Инженерам и проектировщикам необходимы, в частности, количественные данные о сопротивлении, подъёмной силе, динамике пульсаций, вибрации конструкций, генерации шума турбулентным потоком. В данном разделе приводится расчёт отрывного течения вокруг бокового зеркала автомобиля²⁴.

Современные вычислительные технологии, использующие мощные вычислительные пакеты, такие как Ansys CFX и Ansys Fluent, позволяют в ряде случаев заменить более дорогостоящие натурные и лабораторные эксперименты. В то же время, проверка достоверности результатов расчётов и оценка их точности требует выполнения расчётов для тех сценариев, для которых имеются высокоточные результаты измерений. В данной главе рассматривается течение в расчётной области, представленной на рис. 31. Видно, что плохообтекаемое тело закреплено на столе. Наветренные кромки стола заострены, чтобы на них не происходил отрыв потока. Расчётная область имеет форму параллелепипеда, на входной грани которого задан равномерный профиль скорости $u = V_\infty = 30$ м/с (velocity-inlet condition). Противоположная грань является выходной, и на ней предполагается постоянное давление $p = 0$ (pressure-outlet condition). На верхней и боковых гранях расчётной области поставлено условие проскальзывания и не-

²⁴ Расчёт выполнен по заказу General Motors Corp. в рамках исследовательского проекта по определению характеристик аэродинамического шума, возникающего при турбулентном обтекании деталей автомобиля (2007–2008 гг.).

протекания. На всех твёрдых поверхностях поставлено условие прилипания.

Характерный размер плохообтекаемого тела составляет 14 см, что для заданной скорости набегающего потока соответствует числу Рейнольдса $Re = 2,8 \cdot 10^5$ и значениям турбулентных характеристик, приведённым в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

**Оценка численных значений турбулентных характеристик
в потоке вокруг исследуемого тела**

Величина	Значение
$l_t = 0,5L$	0,07 м
$u' = 0,1V_\infty$	3 м/с
$\tau_t = l_t/u'$	0,023 с
$Re_t = u'l_t/\nu$	14000
$k = 3u'^2/2$	13,5 м ² /с ²
$\varepsilon = u'^3/l_t$	386 м ² /с ³
$\eta_k = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$	5,4·10 ⁻⁵ м
$\tau_k = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$	2·10 ⁻⁴ с
$u_k = (\varepsilon\nu)^{1/4}$	0,28 м/с

3.2. РАСЧЁТНЫЕ СЕТКИ

В расчётах использовали многоблочную сетку, созданную с помощью Ansys ICEM CFD 10.0. Расчётная область делится на несколько подобластей, каждой из которых соответствует сеточный блок, содержащий фрагмент криволинейной, неравномерной, структурированной сетки. Для того чтобы обеспечить достаточное пространственное сеточное разрешение, были сопоставлены результаты расчётов, полученные на сетках с общим числом контрольных объёмов от 2,9 до 26 млн (табл. 3).

Характерные размеры ячеек сетки вблизи исследуемого тела

Обозначение сетки	Характерный размер грани контрольного объёма, мм				Полное число контрольных объёмов	
	Размер грани, ориентированной по касательной к поверхности стола, над поверхностью стола на расстоянии от тела вниз по потоку		Размер грани, ориентированной по касательной к поверхности тела, над вершиной обтекаемого тела	Размер грани, ориентированной по касательной к поверхности тела, над подветренной поверхностью тела		Размер грани, ориентированной по нормали к поверхности тела и стола (все поверхности)
	0,1 м	0,5 м				
RANS	3	10	5	5	1	$1,4 \cdot 10^6$
DES	3	6	5	5	0,1	$2,0 \cdot 10^6$
Coarse LES	10	10	5	5	0,01	$2,9 \cdot 10^6$
Mesh 00	2	10	3	3	0,01	$7,1 \cdot 10^6$
Mesh 01	2	4	0,3 – 0,5	2	0,1	$16,2 \cdot 10^6$
Mesh 02	2	4	0,3 – 0,5	2	0,03	$17,0 \cdot 10^6$
Mesh 03	2	4	0,3 – 0,5	2	0,01	$17,7 \cdot 10^6$
Mesh 04	1,5	2	0,3 – 0,5	2	0,03	$26,3 \cdot 10^6$

Сеточные блоки генерировались с учётом следующих принципов.

- Шаг по нормали к поверхностям обтекаемого тела и стола в зоне отрыва и в следе за телом соответствует значениям y^+ порядка единицы.
- Сетка измельчается в зоне отрыва, прилегающей к обтекаемому телу, для максимального разрешения вихревых структур в рециркуляционной зоне и в области присоединения потока к верхней плоскости стола. Области расчётной сетки вдали от указанных зон заполняются блоками с более крупными контрольными объёмами.
- Отношение характерных размеров соседних контрольных объёмов не превышает 1,3.
- Использованы сетки с разными значениями отношений размеров ячеек по касательной и по нормали к твёрдой поверхности. При этом в сетках с наибольшим числом контрольных объёмов указанное отношение снижали до 3–4.

В расчётах использовали два вычислительных пакета (Ansys CFX 10 и Ansys Fluent 6.3) и несколько подходов к моделированию турбулентности, перечисленных ниже.

1. Метод RANS (стационарный и нестационарный вариант). В этом случае использовали сетки с числом контрольных объёмов до 1,4 млн и модель SST Ментера (Ansys CFX 10).

2. Метод DES с моделью SST Ментера (Ansys CFX 10) на сетках с числом контрольных объёмов до 2 млн. Методы RANS и DES использовали в упрощённой расчётной области, в которой обтекаемое тело полагали расположенным на горизонтальной поверхности, совпадающей с поверхностью стола на рис. 31. Указанная поверхность продолжает поверхность стола до вертикальных границ расчётной области.

3. Метод LES с несколькими моделями подсеточной турбулентности (Ansys CFX 10 и Ansys Fluent 6.3). Наилучшее согласие с результатами измерений удалось получить при использовании динамической модели подсеточной вязкости Смагоринского–Лилли, реализованной в Ansys Fluent 6.3. При этом рассматривали расчётную область (рис. 31), которая воспроизводит геометрию экспериментальной установки, включая стол, на котором установлена исследуемая модель.

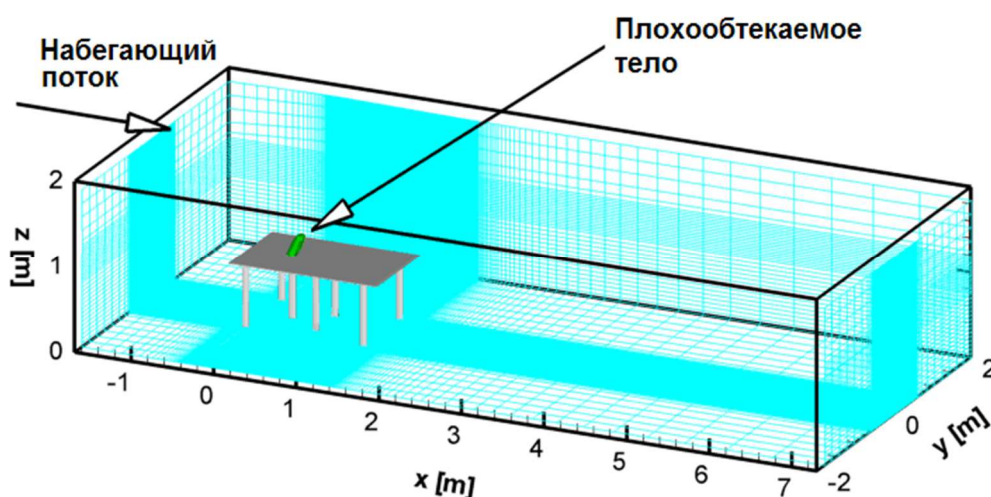


Рис. 31. Расчётная область и расчётная сетка

Одна из использованных сеток (Mesh 02 в табл. 3) показана на рис. 32. Во всех нестационарных расчётах использовали шаг по времени, равный 10^{-5} с.

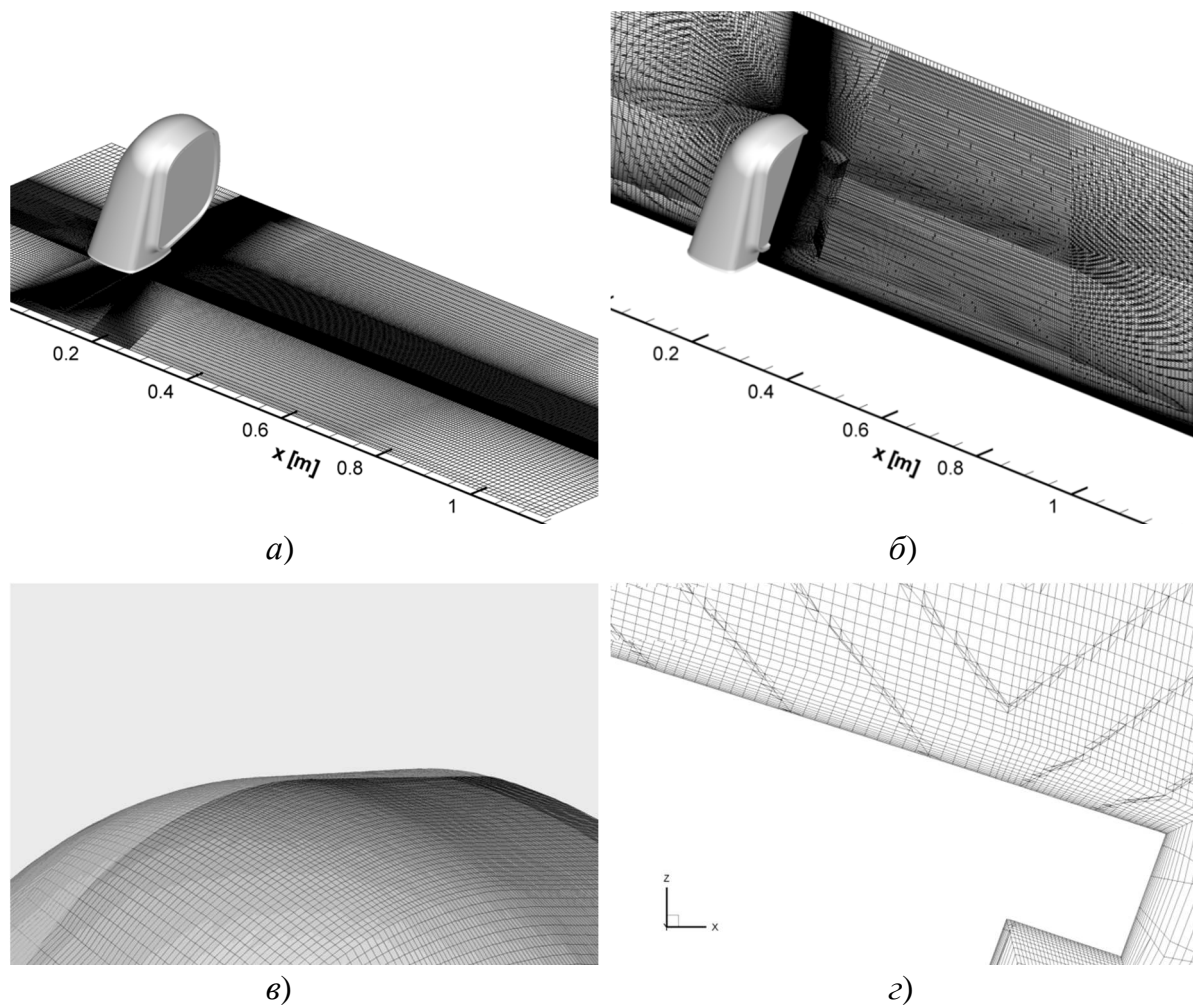


Рис. 32. Расчётная сетка вблизи плохообтекаемого тела: *a)* — прилегающая поверхность стола; *б)* — вертикальная плоскость; *в)* — поверхность тела; *г)* — вертикальная плоскость вблизи кромки тела

3.3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Напомним, что модель SST Ментера предполагает переключение между уравнениями k – ω модели (вблизи поверхностей) и k – ϵ модели (вдали от поверхностей) с помощью специальной функции-переключателя F_1 , вычисляемой по формуле (121). Функция F_1 конструируется таким образом, чтобы принимать значения, стремящиеся к единице внутри пограничного слоя у твёрдых поверхностей и к нулю — вдали от них (123). Как видно на рис. 33, *a*, эти требования выполняются в области, расположенной вниз по потоку (правее обтекаемого тела). В области выше по потоку также имеется тонкий пристеночный слой, где F_1 возрастает до единицы.

Там же видна зона с $F_1 = 1$, не примыкающая к поверхностям и расположенная в набегающем потоке. Такое поведение F_1 определяется параметрами турбулентности, заданными на входной границе (интенсивность турбулентности $I = \sqrt{2k/3}/V_\infty = 0,01$ и интегральный масштаб $l_t = 0,7$ м) и не влияет на результаты расчёта (поток на данном участке ещё не испытывает влияния возмущений, порождаемых телом). При этом следует отметить (рис. 33, *a*), что резкое изменение размеров и формы соседних контрольных объёмов сетки в области межблочных интерфейсов также порождает локальные экстремумы функции F_1 .

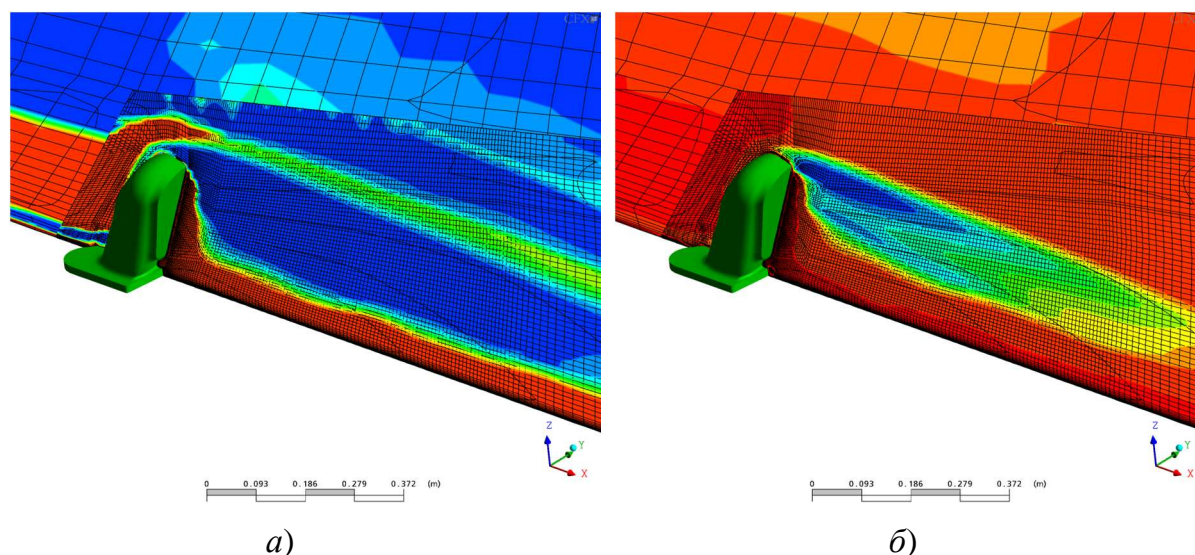


Рис. 33. Распределение значений функций-переключателей F_1 и F_2 в вертикальной плоскости, пересекающей тело (SST модель, Ansys CFX 10, скорость набегающего потока 30 м/с): *a*) — функция F_1 ; *б*) — функция F_2

Вторая функция-переключатель F_2 , вычисляемая по формуле (122), определяет метод расчёта турбулентной вязкости (120): при $F_2 \rightarrow 0$ имеем линейную комбинацию $k-\omega$ и $k-\epsilon$ моделей, а при $F_2 \rightarrow 1$ активируется SST модель. На рис. 33, *б* показано распределение значений F_2 в вертикальной плоскости, пересекающей тело. Видно, что SST-модификация турбулентной вязкости активируется вокруг твердых поверхностей и отключается в рециркуляционной зоне за препятствием.

Применение метода DES, реализованного в Ansys CFX 10, предполагает использование ещё одной функции-переключателя, которая активируется

вирует уравнения RANS или LES на разных участках потока. В данном случае используется функция $F_{DES-CFX}$, заданная равенством (159) так, чтобы исключить необоснованное включение режима LES на тех участках пристеночного потока, где размер ячеек сетки оказывается меньше толщины пограничного слоя. Распределение значений $F_{DES-CFX}$ в потоке показано на рис. 34. Видно, что режим LES активируется в зоне отрыва позади тела, где формируется пульсирующее рециркуляционное течение. В пристеночных областях решаются уравнения RANS, в данном случае — уравнения SST модели Ментера.

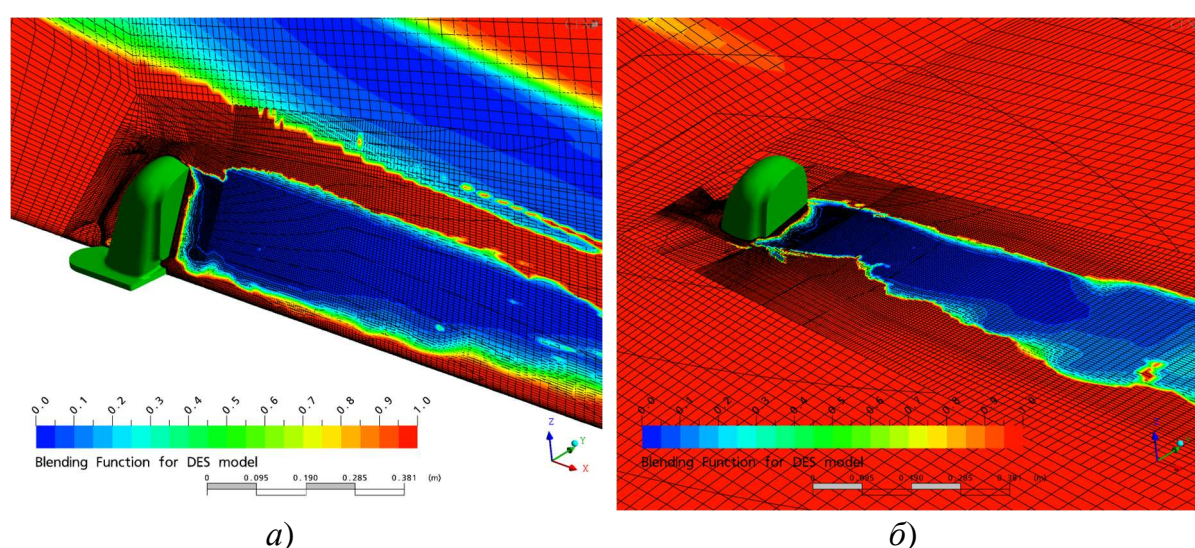


Рис. 34. Распределение значений функции-переключателя F_{DES} (формула (179)) (SST модель, Ansys CFX 10, скорость набегающего потока 30 м/с): *а)* — вертикальная плоскость; *б)* — горизонтальная плоскость

Стационарное решение методом RANS (SST модель Ментера) приводит к распределению среднего поля давления, показанному на рис. 35. Видно, что на наветренной стороне тела формируется область повышенного давления, а с подветренной стороны, в зоне отрыва потока, давление снижается. Далее на поверхности стола наблюдается максимум среднего давления, соответствующий присоединению потока. Стационарное решение позволяет приближённо оценить средние во времени характеристики течения, например среднее сопротивление тела. Однако на практике, как правило, представляют интерес нестационарные колебания мгновенных значений, что требует выполнения нестационарных расчётов.

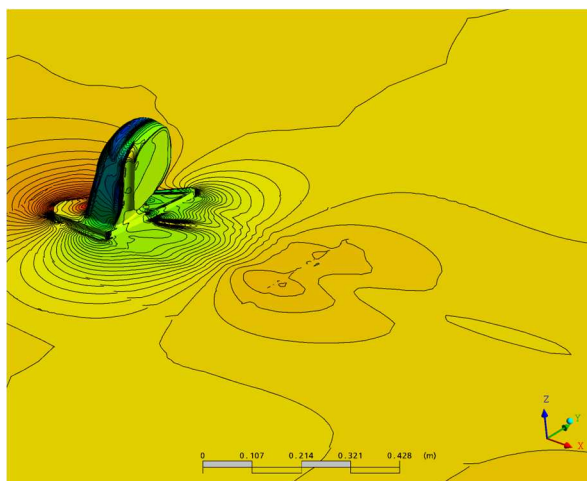


Рис. 35. Распределение давления по плоской поверхности при турбулентном обтекании закреплённого на ней тела (Ansys CFX 10, скорость набегающего потока 30 м/с, RANS SST модель, стационарное решение)

Расчёты показали, что течение вокруг рассматриваемого тела сопровождается формированием крупных вихревых структур, аналогичных вихрям в дорожке Кармана (например, за цилиндром [2]). Расчёт методом URANS предсказывает почти периодический отрыв таких вихрей от одной из кромок тела, причём расчётная частота отрыва (52 Гц) согласуется с данными измерений (45,6 Гц). Указанные структуры имеют вид вихревых трубок, в центре которых возникают локальные минимумы давления. Формирование и отрыв вихревых трубок сопровождается их взаимодействием с поверхностью стола, на которой образуется дорожка чередующихся минимумов и максимумов давления (рис. 36, а). Использование более подробной сетки и метода DES позволило воспроизвести детали течения со значительно меньшим пространственным масштабом, как показано на рис. 36, б. Важно отметить, что мгновенное поле, полученное в нестационарном расчёте (рис. 36), резко отличается от стационарного поля, показанного на рис. 35.

Для визуализации вихревых структур в турбулентном потоке используют так называемый Q -критерий:

$$Q = \frac{1}{2} (S_{ij} S_{ij} - \Omega_{ij} \Omega_{ij}), \quad (209)$$

определяемый через компоненты тензора скоростей деформации (95) и скоростей вращения (97).

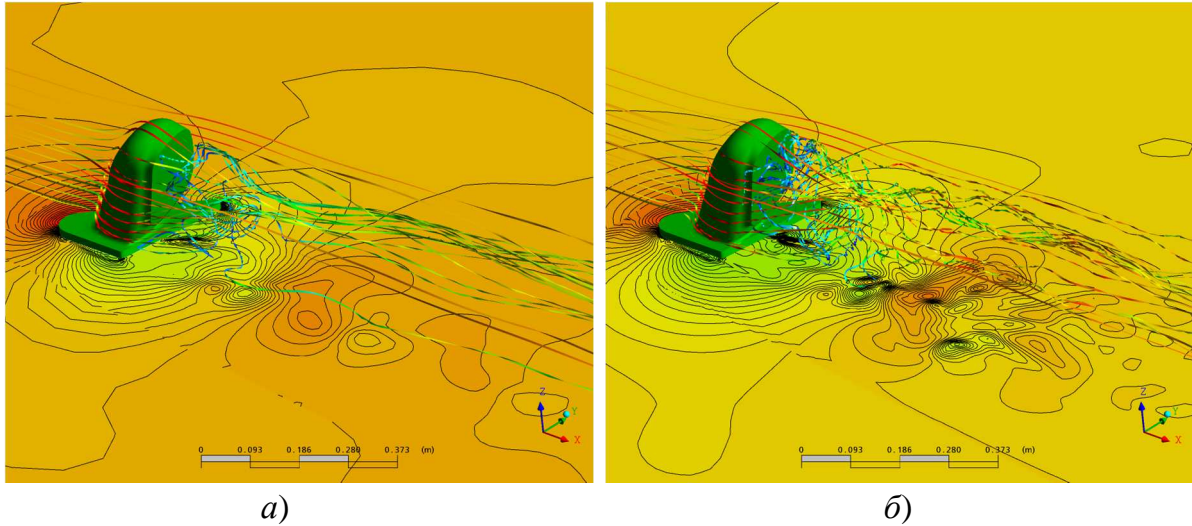


Рис. 36. Распределение давления по плоской поверхности при турбулентном обтекании закреплённого на ней тела (Ansys CFX 10, скорость набегающего потока 30 м/с): *а*) — URANS SST модель; *б*) — метод DES SST

Q -критерий (209) связан с полем давления, и можно показать, что в несжимаемом течении [26]

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{2\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (210)$$

Изоповерхности $Q = \text{const}$ позволяют выделить области вихревого течения, что хорошо видно на рис. 37, *а*, где показано чередование вихрей, отрывающихся от кромки тела и сносимых вниз по потоку. Кроме того, рис. 37, *а* показывает наличие горизонтальной вихревой трубки, зарождающейся вблизи вершины обтекаемого тела.

Интересно отметить, что расчёт с использованием LES (рис. 37, *б*, где даны результаты метода DES) приводит к гораздо менее упорядоченному, более хаотичному полю течения. В самом деле, несмотря на одну и ту же постановку задачи, поля на рис. 37, *а* и *б* резко отличаются друг от друга. Однако наиболее крупные вихревые структуры (их называют когерентными) по-прежнему можно идентифицировать; видно, что при достаточно высоком сеточном разрешении они, в свою очередь, распадаются на совокупность нескольких взаимодействующих вихрей.

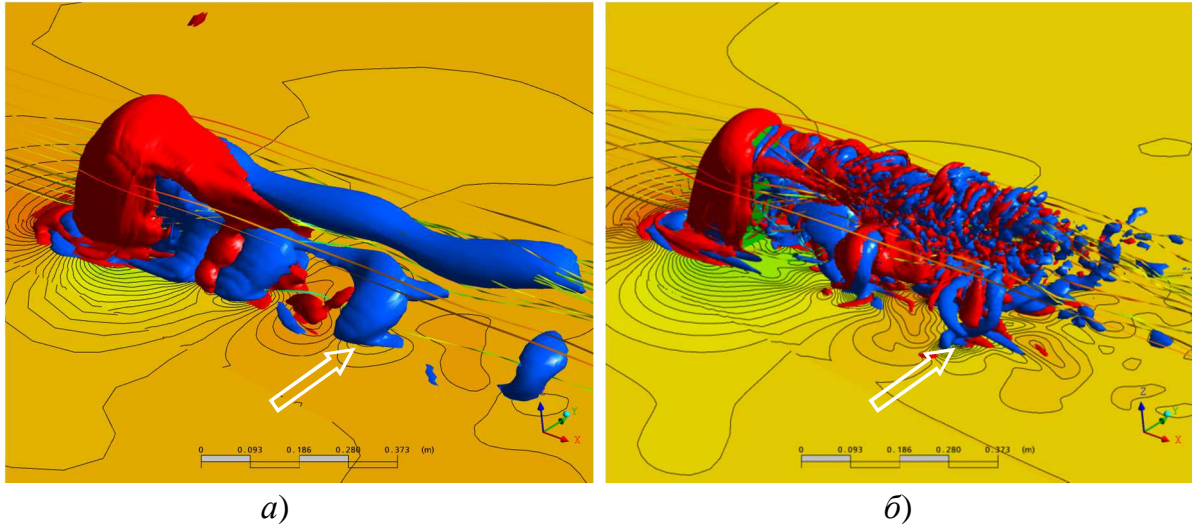


Рис. 37. Изоповерхности структурной функции Q (формула (209)) при турбулентном обтекании тела, закреплённого на плоской поверхности (Ansys CFX 10, скорость набегающего потока 30 м/с): *a)* — URANS SST модель; *б)* — метод DES SST. Стрелками показаны когерентные вихревые структуры

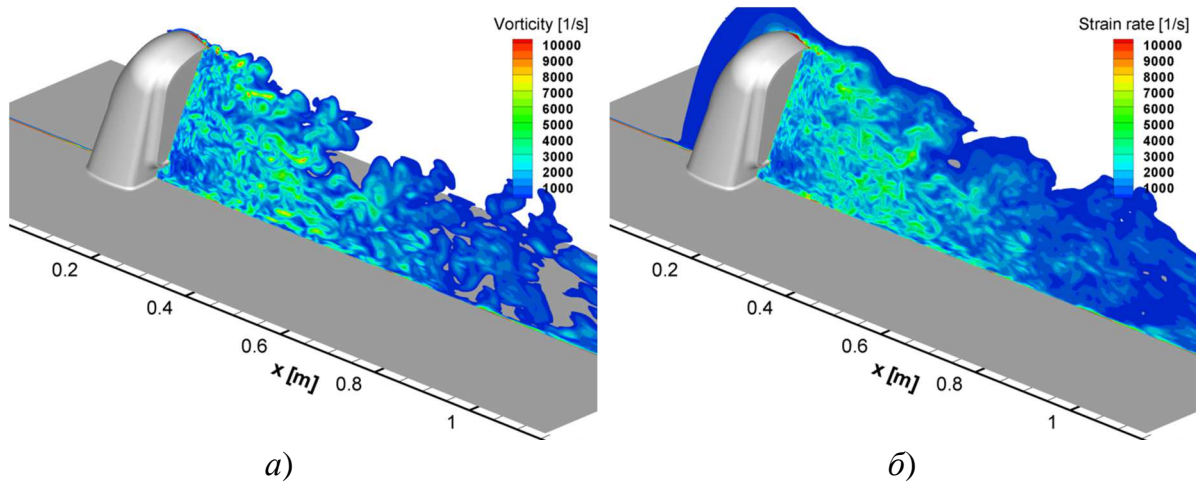


Рис. 38. Разрешённые поля завихрённости $|\Omega|$ (*a)* и деформации скорости $|S|$ (*б)*) (скорость набегающего потока 30 м/с, динамическая модель подсеточной вязкости Смагоринского–Лилли, Fluent 6.3)

Другой способ визуализации вихревой структуры течения заключается в построении полей завихрённости $|\bar{\Omega}| = \sqrt{2\bar{\Omega}_{ij}\bar{\Omega}_{ij}}$ или скорости деформации $|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ji}}$, показанных на рис. 38. Видно, что безвихревое течение в набегающем потоке турбулизуется в зоне отрыва, которая

наполняется вихрями разных размеров. Распределения значений подсеточной вязкости ν_{SGS} (равенство (148)) и коэффициента c_s , определяемого по динамической модели (162), приведены на рис. 39. Видно, что в значительной части турбулентного потока подсеточная вязкость полагается равной нулю. Следует отметить, что измельчение сетки приводит к снижению уровня подсеточной вязкости.

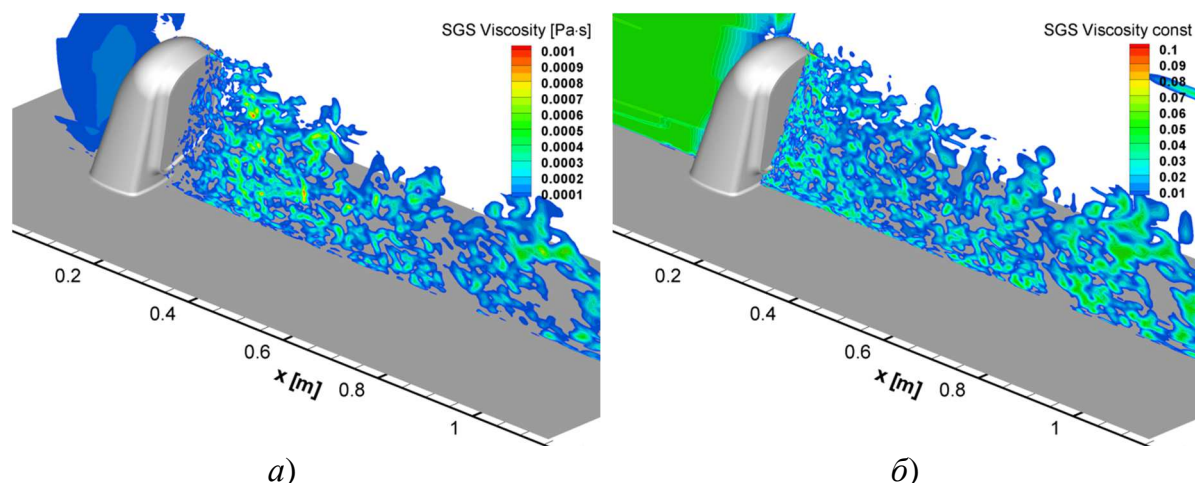


Рис. 39. Распределения значений подсеточной вязкости (а) и коэффициента c_s (б) (скорость набегающего потока 30 м/с, динамическая модель подсеточной вязкости Смагоринского–Лилли, Fluent 6.3)

Сделанные наблюдения полностью согласуются с принципами метода LES, результатом применения которого являются случайным образом пульсирующие нестационарные поля, в которых проявляются всё более мелкомасштабные структуры по мере измельчения расчётной сетки. Корректное применение метода LES требует разрешения низкочастотной части инерционного интервала энергетического спектра пульсаций скорости. В связи с этим, представляет интерес проверка существования такого интервала в энергетическом спектре расчётной скорости, в котором приближённо воспроизводится колмогоровский спектр (17) (закон пяти третьих). С учётом гипотезы Тейлора (равенство (45) и комментариев к нему), вместо распределения по пространственным масштабам l можно рассматривать распределение по частоте f . Для этого при выполнении расчёта течения записывали зависимости абсолютного значения скорости от времени в нескольких точках, показанных на рис. 40, а и 41, а. Видно, что точки 1–6

находятся в зоне отрыва, а точка 7 — в следе за рассматриваемым телом. Абсолютное значение разрешённой скорости и её энергетический спектр в следе за телом приведены на рис. 40, б и в, причём рис. 40, в показывает, что участок спектра, пропорциональный $f^{-5/3}$, воспроизводится на интервале частот шириной около одной декады изменения f .

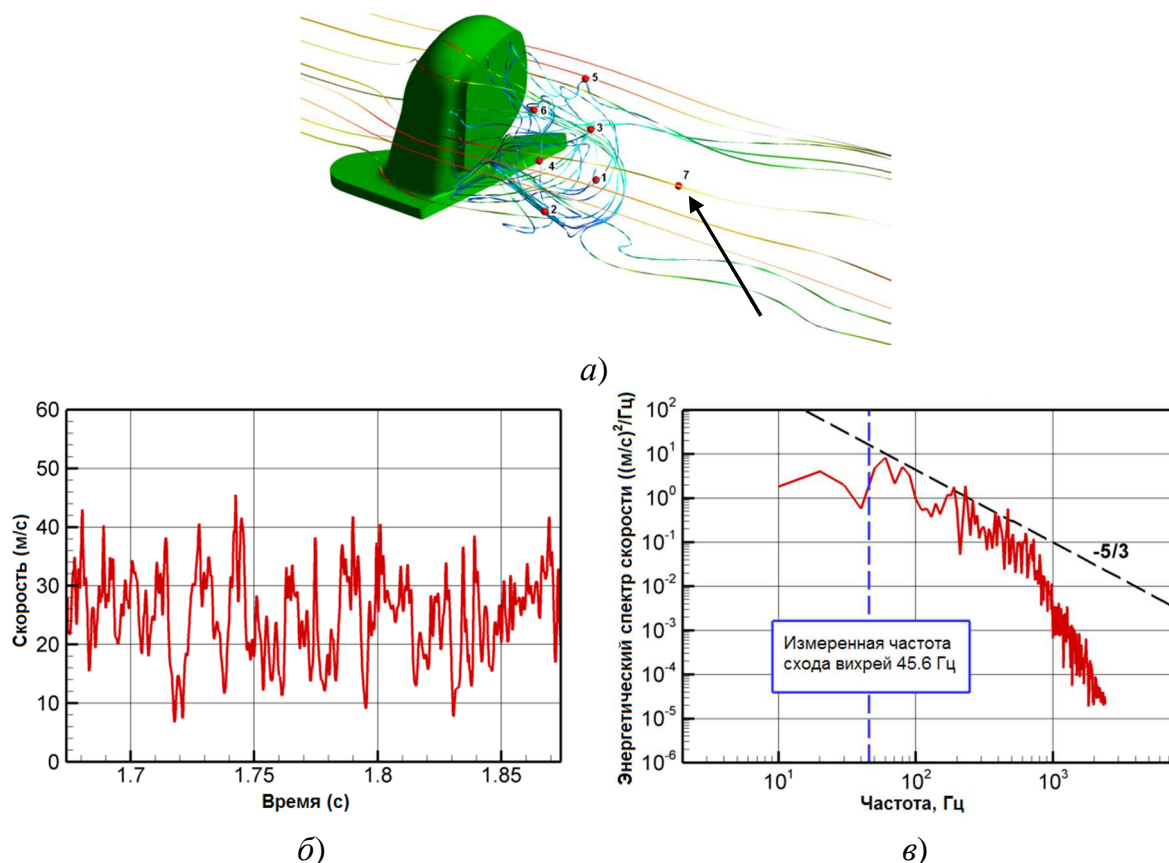


Рис. 40. Абсолютное значение разрешённой скорости и её энергетический спектр (скорость набегающего потока 30 м/с, динамическая модель подсеточной вязкости Смагоринского–Лилли, Fluent 6.3): а) — положение точки в следе (показано стрелкой); б) — изменение скорости во времени; в) — энергетический спектр

В рециркуляционной зоне (в зоне отрыва) указанный участок спектра менее выражен, однако прослеживается его формирование по мере увеличения скорости набегающего потока и, следовательно, характерного числа Рейнольдса (рис. 41, в). Причиной отсутствия инерционного интервала в расчётном энергетическом спектре может быть как недостаточное численное разрешение, так и малое число Рейнольдса в набегающем потоке.

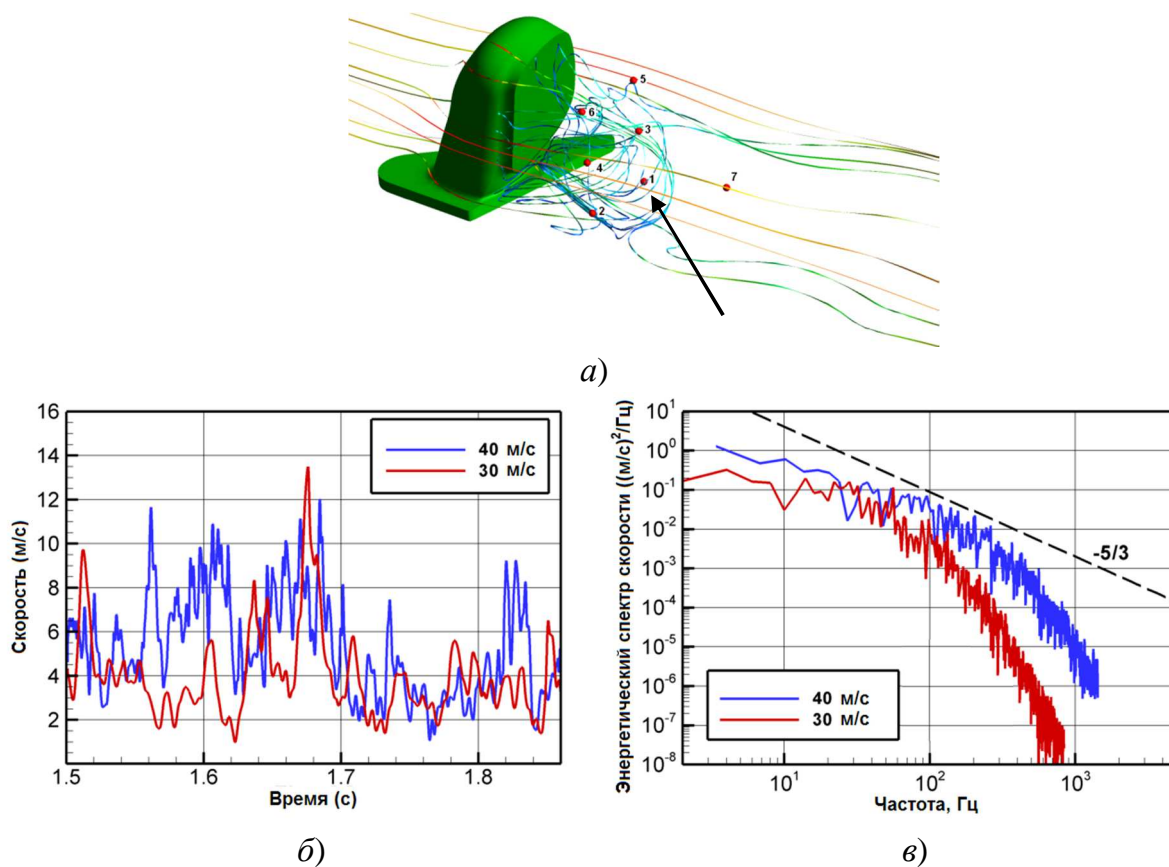


Рис. 41. Абсолютное значение разрешённой скорости и её энергетический спектр (скорость набегающего потока 30 м/с, динамическая модель подсеточной вязкости Смагоринского–Лилли, Fluent 6.3): а) — положение точки в рециркуляционной зоне (показано стрелкой); б) — изменение скорости во времени; в) — энергетический спектр

При оптимизации формы тел, обтекаемых с отрывом потока, особое значение имеет возможность точного расчёта распределения давления по твёрдой поверхности. При этом представляет интерес как среднее значение давления (и, следовательно, среднее значение сопротивления), так и пульсационные характеристики, в число которых входят среднеквадратичная флуктуация и частотный спектр. На рис. 42 показаны результаты расчётов некоторых из указанных характеристик. На рис. 42, а–в, в частности, показана центральная линия, на которой имеются значения среднего давления, измеренные в экспериментах. Соответствующие расчётные и экспериментальные результаты сравниваются на рис. 42, г, где на их основе построена зависимость коэффициента давления от координаты x :

$$C_p(x) = \frac{p(x) - p_{ref}}{\rho V_\infty^2 / 2}. \quad (211)$$

В формуле (211) координата x отсчитывается от условного начала координат, расположенного на поверхности стола внутри тела, а давление p_{ref} принимали равным давлению в точке $x = 1$ м на центральной линии.

Как уже отмечалось при сравнении фотографий реального течения (рис. 2) и, затем, при сравнении результатов стационарных и нестационарных расчётов (рис. 35 и 36), мгновенное и осреднённое по времени поля давления существенно отличаются друг от друга. Осреднённой по времени мерой отклонения мгновенного поля от среднего является среднеквадратичная флуктуация давления, распределение которой по твёрдым поверхностям показано цветом на рис. 42, *в*, а вдоль центральной линии — вертикальными планками на рис. 42, *г*.

В заключение отметим, что сеточное разрешение должно быть достаточным для воспроизведения структурных особенностей течения, таких как возможный отрыв течения в диффузорных областях с отрицательным градиентом давления. Такие участки течения видны на рис. 43, *а*, где синим цветом показаны области пониженного давления вблизи верхней и боковой частей рассматриваемого тела. Снижение давления особенно выражено в верхней части тела, представленной на рис. 43, *б–ж*. Хорошо видно, что снижение давления обусловлено расширением потока из-за понижения поверхности тела.

Оказалось, что расчёт на слишком грубой сетке (рис. 43, *б*) не только не воспроизводит маломасштабные пульсации давления (рис. 43 *г*), которые получаются в аналогичном расчёте на более мелкой сетке (рис. 43, *в*, *д*). Более важно то, что может «потеряться» отрыв потока, отсутствующий на грубой сетке (рис. 43, *е*), но отчётливо наблюдаемый в результатах расчёта на более мелкой сетке (рис. 43, *в*, *ж*). Наличие (или отсутствие) отрыва течения существенно влияет на сопротивление, уровень вибраций и интенсивность шума, производимого турбулентным потоком.

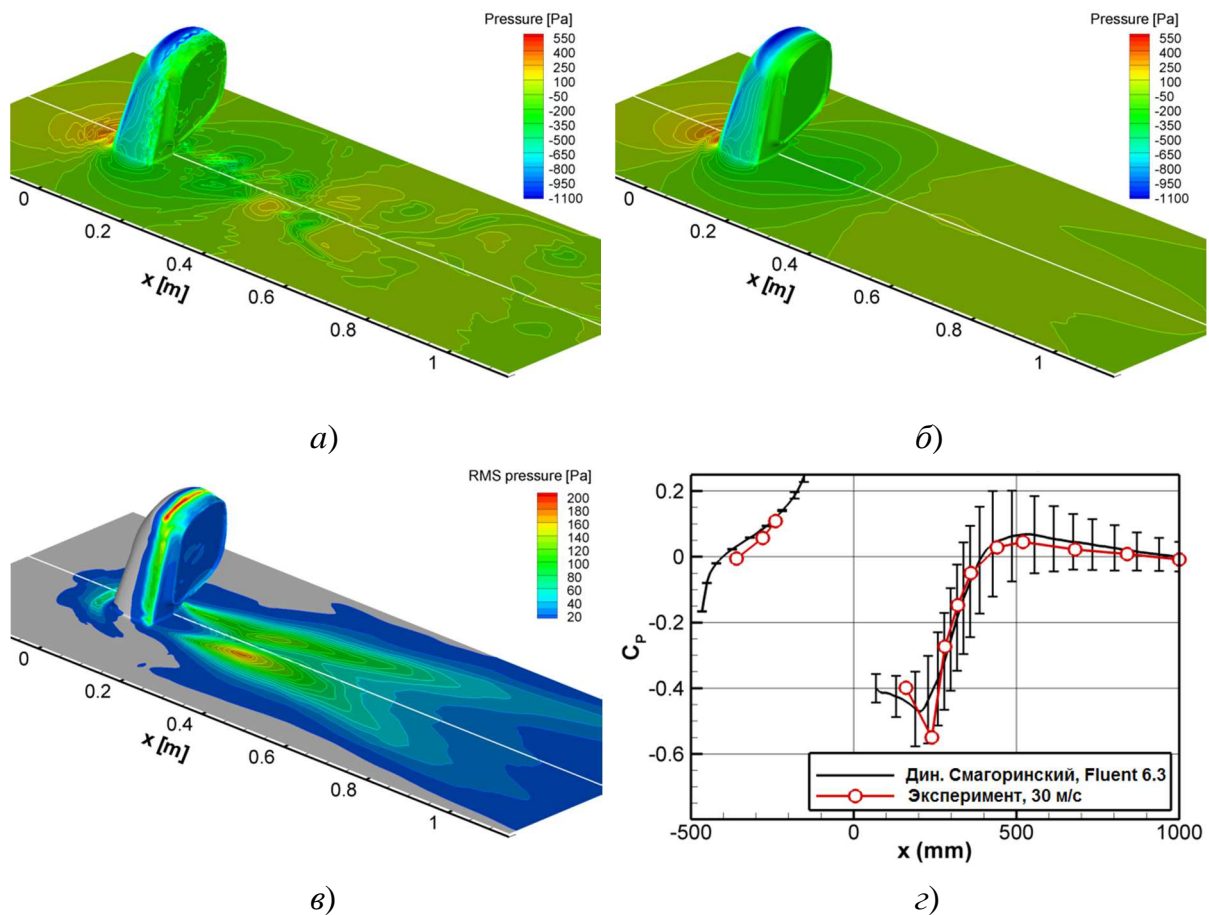


Рис. 42. Распределение давления по твёрдым поверхностям (скорость набегающего потока 30 м/с, динамическая модель подсеточной вязкости Смагоринско–Лилли, Fluent 6.3, Mesh 02): а) — мгновенное разрешённое давление; б) — разрешённое давление, осреднённое во времени; в) — среднеквадратичная флуктуация разрешённого давления; г) — распределение коэффициента давления вдоль центральной линии (сплошная линия — разрешённое давление, осреднённое во времени; вертикальные планки — среднеквадратичная флуктуация; точки — эксперимент)

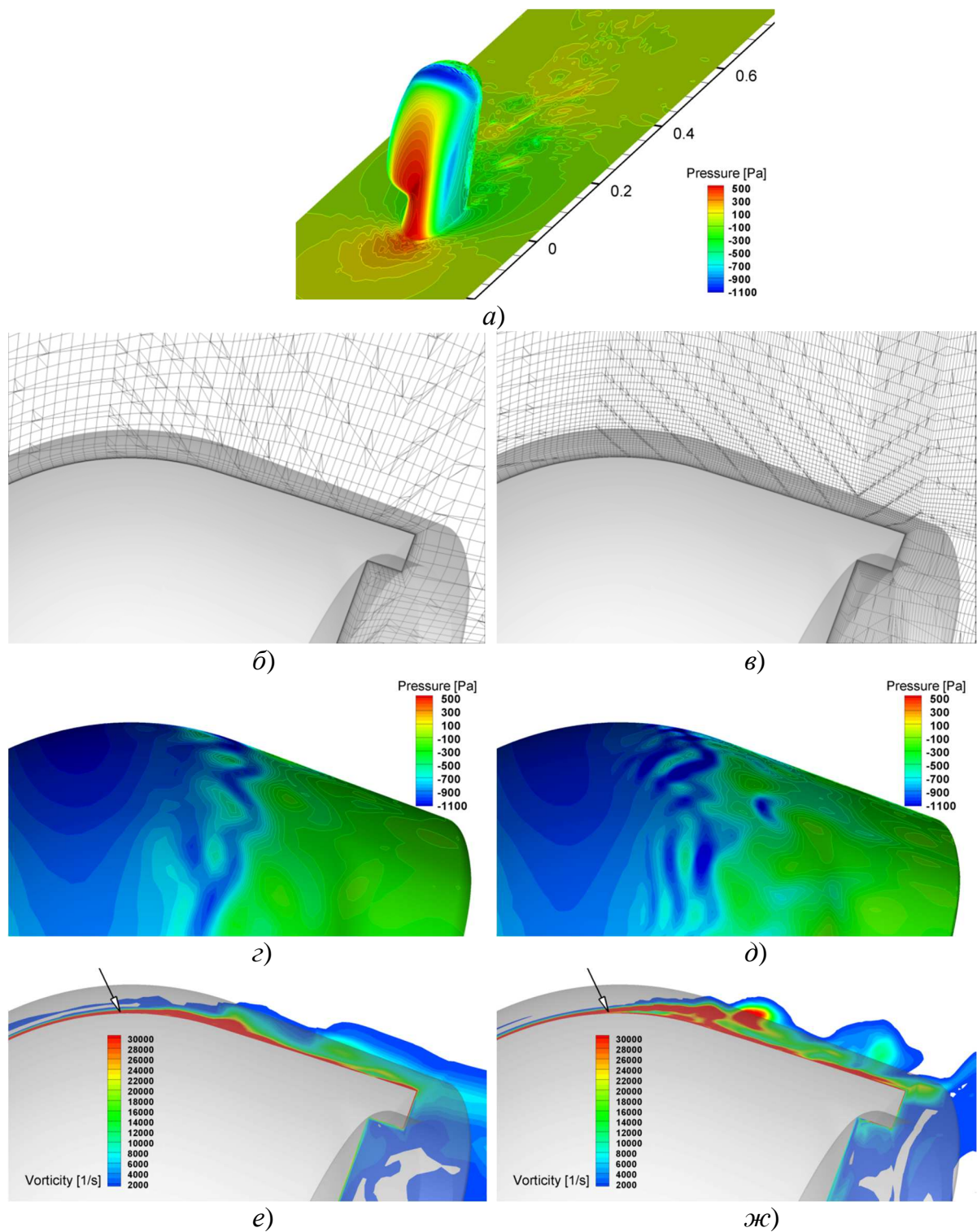


Рис. 43. Расчёт пристеночного течения в областях возможного отрыва (скорость набегающего потока 30 м/с, динамическая модель подсеточной вязкости Смагоринского–Лилли, Fluent 6.3): *а)* — распределение мгновенного разрешённого давления по наветренной поверхности обтекаемого тела; *б), в)* — сетки Mesh 00 и Mesh 02 вблизи вершины тела; *з), д)* — распределение мгновенного разрешённого давления по поверхности вблизи вершины тела; *е), ж)* — завихрённость разрешённого поля скорости в пограничном слое вблизи вершины тела

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. РОЛЬ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Следует отметить особую роль давления в рассматриваемой модели движущейся сплошной среды. Если среда несжимаема, то уравнением состояния является соотношение $p = \text{const}$ (50), в состав которого давление не входит. Для того чтобы выявить роль давления в несжимаемых течениях, следует взять дивергенцию от левой и правой части уравнения движения (54) и учесть, что в соответствии с уравнением неразрывности (48) дивергенция скорости равна нулю. Можно показать (см., например, [34]), что в результате получается уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_j} = -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (212)$$

которому удовлетворяет поле давления. В качестве граничных условий на участке границы, где задано распределение скорости (в том числе — на твёрдой поверхности, где все компоненты скорости равны нулю) для уравнения (212) можно использовать проекцию уравнений движения (54) на нормаль к указанному участку границы

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_n} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n^2}. \quad (213)$$

Видно, что (213) представляет граничное условие второго рода (условие Неймана). На открытой поверхности следует задать значение давления p (граничное условие первого рода, условие Дирихле). Важно отметить, что поле давления однозначно определяется текущим состоянием поля скорости и не зависит от его предыстории. Если условия Неймана поставлены на всей границе расчётной области, то давление p определяется с точностью до константы, которую можно выбрать произвольно (отметим также, что давление p входит в уравнения движения только через пространственные производные $\partial p / \partial x_i$).

Особая роль давления в течениях несжимаемых сред отражается в методах численного решения уравнений (48) и (54). Особенность заключается в том, что для решения уравнений движения (54) необходимо знать поле давления p , для которого нет специального уравнения (каким могло бы быть уравнение состояния, если бы мы имели дело с термодинамиче-

ским давлением). При этом оказывается, что давление можно определить из условия выполнения уравнения неразрывности (48). В этом заключается основная идея многих численных методов расчета течений несжимаемых сред. Соответствующий численный алгоритм использует представление искомого давления в момент времени $n+1$ в виде $p^{n+1} = p^n + p^*$, где p^n — известное давление в момент времени n , p^* — искомая поправка к давлению. Для продвижения на один шаг по времени при численном решении системы (48), (54) можно выполнить последовательность из двух действий. На первом шаге численно решается уравнение движения (54):

$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \left(-\frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right), \quad (214)$$

в результате чего определяется «промежуточное» поле скорости u_i^* , которое *не удовлетворяет* уравнению неразрывности (48). В связи с этим выполняют второй шаг

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i}, \quad (215)$$

целью которого является такое поле скорости u_i^{n+1} , которое *удовлетворяет* уравнению неразрывности (48). Очевидно, что сумма (214) и (215) даёт аппроксимацию исходного уравнения (54). Подстановка соотношения (215) в уравнение неразрывности (48) приводит к уравнению Пуассона для поправки к давлению:

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i}, \quad (216)$$

где правая часть может быть вычислена, если известно «промежуточное» поле скорости u_i^* . Решая уравнение (216), находят поправку к давлению p^* , после чего корректируют скорость с помощью (215). Методы такого типа называют методами коррекции давления (pressure correction methods) и методами проекций (projection methods). Разработка численных методов данного типа началась в середине 60-х годов прошлого века (см., например, [18]). Программные пакеты Ansys Fluent и Ansys CFX содержат наиболее распространённые версии указанного подхода: SIMPLE [47] и PISO [22]. Отметим, что в современных версиях Ansys Fluent (начиная с 6.3) содержатся процедуры коррекции давления, предназначенные не

только для несжимаемых течений (предел малых чисел Маха), но и для сверхзвуковых сжимаемых течений.

В алгоритмах коррекции давления наибольшие вычислительные затраты соответствуют численному решению уравнения Пуассона (216), поэтому разработка методов быстрого численного решения уравнений данного типа играет важную роль.

Отметим, что предел постоянной плотности сплошной среды соответствует бесконечной скорости звука (число Маха, $Ma = u/c$, равно нулю). Однако аналогичный подход применяется и в тех случаях, когда плотность является переменной, но зависит только от температуры и состава и не зависит от давления. Последнее условие выполняется лишь в пределе скоростей течения, малых по сравнению со скоростью звука c (предел малых чисел Маха: $Ma = u/c \ll 1$). Такой подход, называемый *существенно дозвуковым приближением* [4], широко используется при численных расчётах дозвуковых реагирующих течений. В данном приближении давление можно представить в виде суммы $P(x_j, t) = P_0(t) + p(x_j, t)$ «фонового» давления $P_0(t)$, одинакового во всех точках расчётной области, и «динамического» давления $p(x_j, t)$, обусловленного движением среды.

Поскольку $\frac{p}{P_0} \propto \frac{\rho V^2}{\rho RT/M} \propto \gamma Ma^2$ и $Ma \ll 1$, динамическое давление оказывается намного меньше фонового: $p(x_j, t) \ll P_0(t)$. Это позволяет использовать уравнение состояния $P_0(t) = \rho RT/M$ для того, чтобы выразить плотность через температуру и состав (от него зависит средняя масса моля M) при известном фоновом давлении $P_0(t)$. Как и в «несжимаемом» случае, динамическое давление $p(x_j, t)$, градиент которого присутствует в правой части уравнения движения (53), определяется так, чтобы выполнялось уравнение неразрывности (48). Соответствующие аналоги уравнений (214), (215) и (216) принимают вид (напомним, что $P^{n+1} = P^n + P^*$):

$$\frac{\rho^{n+1} u_i^* - \rho^n u_i^n}{\Delta t} = -\frac{\partial P^n}{\partial x_i} + \text{остальные слагаемые}, \quad (217)$$

$$\frac{\rho^{n+1} u_i^{n+1} - \rho^{n+1} u_i^*}{\Delta t} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i}, \quad (218)$$

$$\frac{\partial^2 P^*}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \frac{\partial \rho^{n+1} u_i^*}{\partial x_i} \right). \quad (219)$$

Если процесс протекает в закрытом (герметичном) объёме, то зависимость $P_0(t)$ можно определить из условия сохранения массы и интегрального баланса энергии. Если же помещение сообщается с атмосферой, то фоновое давление принимают постоянным и равным атмосферному. В рамках такого подхода нельзя рассчитать распространение возмущений со скоростью, близкой или превышающей скорость звука. Однако на практике такой подход оказывается чрезвычайно полезным, поскольку охватывает широкий класс течений, в том числе, возникающих при пожарах в помещениях.

Таким образом, процедура численного решения при моделировании существенно дозвуковых (в том числе – несжимаемых) течений использует принцип расщепления или дробных шагов (fractional steps). При этом выделяется специальный этап, на котором учитывается движение среды под действием градиента давления (формулы (215) и (219)) и решается эллиптическое уравнение для поправки к давлению (pressure correction). В связи с этим данная группа методов называется методами коррекции давления. Примерами соответствующих процедур, широко используемыми в вычислительной практике, являются методы SIMPLE [33], SIMPLEC [47] и PISO [22].

Отметим, далее, что в случае сверхзвукового течения с числом Маха больше единицы *качественно* изменяется как само течение, так и свойства описывающих его уравнений. В самом деле, при больших скоростях кинетическая энергия потока превышает внутреннюю энергию среды, а роль молекулярного переноса незначительна. Поэтому для анализа сверхзвукового течения применяют систему уравнений Эйлера, в которой уравнения переноса импульса (53) и энергии принимают вид:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad (220)$$

$$\frac{\partial \rho (e + u_i u_i / 2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j (e + u_i u_i / 2)}{\partial x_j} = - \frac{\partial P u_j}{\partial x_j}, \quad (221)$$

где $e = h - P/\rho$, h — внутренняя энергия и энтальпия единицы массы. Внутренняя энергия связана с давлением через уравнение состояния, которое в случае идеального не реагирующего газа можно записать в виде

$P = (\gamma - 1)\rho e$, где $\gamma = C_p/C_v$ — показатель адиабаты. Уравнения Эйлера допускают существование разрывных решений, что соответствует формированию скачков уплотнения (ударных волн) в сверхзвуковых потоках. Отметим, что при формировании ударных волн в реакционноспособных смесях возникает *детонация*. Поскольку, в отличие от исходных уравнений, уравнения Эйлера являются *гиперболическими*, методы их численного решения существенно отличаются от методов решения *эллиптических* систем. Можно отметить, в частности, что граничные условия в этом случае задаются только на входных («наветренных») участках границ, в то время как исходные уравнения требуют задания граничных условий на всей границе.

Большое практическое значение имеет создание численных алгоритмов, которые были бы эффективны как для дозвуковых, так и для сверхзвуковых течений. Тем не менее, создание такого алгоритма затруднено фундаментальным условием, обеспечивающим *устойчивость* численного решения при продвижении по времени. При решении исходной системы уравнений Навье–Стокса данное условие, называемое условием Куранта–Фридрихса–Леви (КФЛ), налагается на шаг по времени Δt и имеет вид $\Delta t < \Delta x/(u + c)$, где Δx — шаг пространственной сетки в направлении скорости u . Если в рассматриваемой задаче $u \ll c$, то применение алгоритма, разработанного для *сверхзвукового* течения, приведёт к неприемлемо (и неоправданно) малому шагу по времени. В то же время, при использовании *существенно дозвукового* приближения условие КФЛ принимает вид $\Delta t < \Delta x/u$, поскольку акустические возмущения «отфильтрованы». В результате для численного моделирования дозвуковых течений используют численные алгоритмы с использованием процедуры коррекции давления, пример которой кратко обсуждался выше.

Важное практическое значение имеют так называемые *трансзвуковые* течения, в которых есть до- и сверхзвуковые участки. Примером такого течения является так называемая недорасширенная струя, при истечении которой вблизи сопла формируется система скачков уплотнения. Проходя через эти скачки, поток газа ускоряется до сверхзвуковых скоростей, а затем замедляется и становится дозвуковым. Кроме того, возможны ситуации, когда характер течения изменяется во времени.

Для моделирования таких течений должна быть решена полная система уравнений Навье–Стокса, которая описывает течение вязкой среды с

произвольной — до- или сверхзвуковой — скоростью. К настоящему времени сформировались две стратегии расчёта таких течений.

Первая из указанных стратегий использует процедуры коррекции давления, модифицированные для течений со сверхзвуковой скоростью (см., например, [23, 14, 20]). В документации современных компьютерных кодов [8] такие методы называются *pressure based*. Соответствующий решатель (*pressure based solver*) определяет плотность из уравнения состояния, а поле давления находит из уравнения неразрывности. Таким образом, основная идея данной стратегии заключается в том, чтобы распространить методы, ранее разработанные для несжимаемых течений, на случай переменной плотности не только при малых скоростях (предел малых чисел Маха), но и на сверхзвуковые течения (произвольные числа Маха).

Основная идея второй стратегии, наоборот, заключается в использовании методов, изначально предназначенных для сверхзвуковых сжимаемых течений, в расчётах дозвуковых течений. Для того чтобы ослабить ограничение $\Delta t < \Delta x / (u + c)$ на шаг по времени (это ограничение неоправданно в случае дозвуковых скоростей), применяются специальные процедуры (*preconditioning*), изменяющие спектр матриц дискретных уравнений и уменьшающие различие между наибольшими и наименьшими собственными значениями матриц. Метод такого типа (он называется *density based*) определяет плотность из уравнения неразрывности, а поле давления находит из уравнения состояния. Обзор методов данного типа приведён, например, в работе [46].

В последние годы обе группы методов были внедрены в коммерческое программное обеспечение для гидродинамических расчётов. Широко распространённым примером являются продукты компании Ansys Inc. (рис. 44).

Классификация методов численного решения системы уравнений Навье–Стокса, предлагаемых программным обеспечением Ansys Fluent 6.3 [8], показана на рис. 44, где использована следующая терминология.

Segregated — метод расчёта, в котором процесс численного решения уравнений переноса импульса (53) и процедура коррекции давления выполняются последовательно.

Coupled — метод расчёта, в котором процесс численного решения уравнений переноса импульса (53) и процедура коррекции давления совмещены и выполняются одновременно путём решения совместной системы дискретных уравнений.

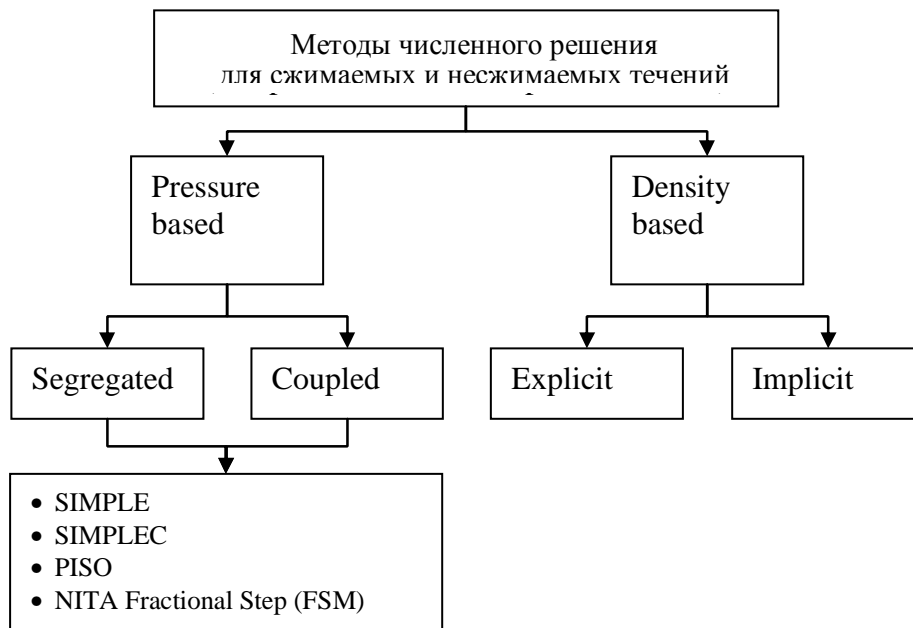


Рис. 44. Методы численного решения системы уравнений Навье–Стокса в Ansys Fluent 6.3 [8] (см. обозначения в тексте)

Explicit, Implicit — явные или неявные методы аппроксимации дискретных уравнений переноса.

SIMPLE, SIMPLEC, PISO — методы коррекции давления, предложенные в работах [33, 47, 22].

NITA Fractional Step (FSM) — метод дробных шагов без глобальных итераций. Данный метод предполагает последовательное выполнение коррекции давления и решение уравнений переноса проекций импульса и скалярных уравнений. Для неизвестных величин используются значения, соответствующие предыдущему шагу по времени.

Методам численного решения системы уравнений Навье–Стокса для каждого из трёх рассмотренных классов течений (несжимаемое, существенно дозвуковое, сверхзвуковое) посвящено большое количество специализированных и учебных изданий, изложение которых выходит за рамки данной книги.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. РАССТОЯНИЕ ДО БЛИЖАЙШЕЙ ТВЁРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В Ansys CFX используется алгоритм определения расстояния до ближайшей поверхности, основанный на решении уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} = -1, \quad (222)$$

в расчётной области с граничным условием $\varphi_{wall} = 0$ на твёрдых поверхностях. На тех участках границы, где твёрдой поверхности нет, ставится условие равенства нулю производной по нормали к поверхности границы. Искомое расстояние до ближайшей поверхности равно

$$y = -\sqrt{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}} + \sqrt{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + 2\varphi}. \quad (223)$$

Такой подход позволяет формализовать определение y , в том числе в случае криволинейных поверхностей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. Учебное пособие. — СПб: Изд-во БГТУ, 2001. — 108 с.
2. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. — М.: Мир, 1986. — 184 с.
3. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Моделирование крупных вихрей в расчётах турбулентных течений. — М.: Физматлит, 2008. — 368 с.
4. Лапин Ю. В., Стрелец М. Х. Внутренние течения газовых смесей. — М.: Наука, 1989. — 368 с.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. — 840 с.
6. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности. Том 1. — СПб: Гидрометеиздат, 1992. — 694 с.
7. ANSYS CFX, Release 11.0. Ansys Inc., 2007.
8. ANSYS FLUENT 6.3 Documentation. Ansys Inc., 2007.
9. Baldwin B. S., Lomax H. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows // AIAA Paper 78-257, 1978.
10. Behnia M., Parneix S., Shabany Y., Durbin P. A. Numerical Study of Turbulent Heat Transfer in Confined and Unconfined Impinging Jets // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1999. Vol. 20, No 1. P. 1–9.
11. Bernard P. S., Wallace J. M. Turbulent Flow. Analysis, Measurement, and Prediction. — New Jersey: Wiley, 2002 — 497 p.
12. Braza M., Perrin R., Hoarau Y. Turbulence properties in the cylinder wake at high Reynolds numbers // Journal of Fluids and Structures. 2006. Vol. 22, No 6–7. P. 757–771.
13. Dacles-Mariani J., Zilliac G.G., Chow J.S., Bradshaw P. Numerical / Experimental Study of a Wingtip Vortex in the Near Field // AIAA Journal, 1995, Vol. 33, No 9. P. 1561–1568.
14. Edwards J.R., Liou M.-S. Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for Flows at all Speeds // AIAA Journal. 1998. Vol. 36, No. 9. P. 1610–1617.
15. Fröhlich J., von Terzi D. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows // Progress in Aerospace Sciences. 2008. Vol. 44, No 5. P. 349–377.
16. Germano M., Piomelli U., Moin P., and Cabot W. H. A dynamic sub-grid-scale eddy viscosity model // Physics of Fluids. 1991. Vol. 3, No 7. P. 1760–1765.

17. *Germano M.* Turbulence: the filtering approach // *Journal of Fluid Mechanics*. 1992. Vol. 238. P. 325–336.
18. *Harlow F. H., Welch J. E.* Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free surface // *Physics of Fluids*. 1965. Vol. 8, No 12. P. 2182–2189.
19. *Harlow F. H., Nakayama P. I.* Transport of turbulence energy decay rate, Los Alamos Scientific Laboratory report LA-3854, 1968.
20. *van der Heul D.R., Vuik C., Wesseling P.* A conservative pressure-correction method for flow at all speeds // *Computers and Fluids*. 2003. Vol. 32, No 8, P. 1113–1132
21. *Hirsch C.* Numerical Computation of Internal and External Flows. Vol. 1. Fundamentals of Computational Fluid Dynamics / 2nd ed. — Amsterdam: Elsevier, 2007. — 656 p.
22. *Issa R. I.* Solution of Implicitly Discretized Fluid Flow Equations by Operator Splitting // *Journal of Computational Physics*. 1986. Vol. 62, No 1. P. 40–65.
23. *Karki K.C., Patankar S.V.* Pressure-Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations // *AIAA Journal*. 1989. Vol. 27, No. 9. P. 1167–1174.
24. *Launder B. E., Spalding D. B.* Lectures in Mathematical Models of Turbulence. London: Academic Press, 1972.
25. *Launder B. E., Reece G. J., Rodi W.* Progress in the developments of a Reynolds-stress turbulence closure // *Journal of Fluid Mechanics*. 1975. Vol. 68. P. 537–566.
26. *Lesieur M., Metais O., Comte P.* Large-Eddy Simulations of Turbulence. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005. — 219 p.
27. *Lilly D. K.* A Proposed Modification of the Germano Subgrid-Scale Closure Model // *Physics of Fluids*. 1992. Vol. 4, No 3. P. 633–635.
28. *Menter F. R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA Journal*. 1994. Vol. 32, No 8. P. 1598–1605.
29. *Menter F. R.* Eddy Viscosity Transport Equations and their Relation to the Model // *ASME Journal of Fluids Engineering*. 1997. Vol. 119, No 4. P. 876–884.
30. *Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.* Ten Years of Experience with the SST Turbulence Model // *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4* / Ed. by K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers. Begell House Inc., 2003. P. 625–632.
31. *Menter F. R.* Review of the shear-stress transport turbulence model experience from an industrial perspective // *International Journal of Computational Fluid Dynamics*. 2009. Vol. 23, No 4, P. 305–316.

32. *Nicoud F., Ducros F.* Subgrid-Scale Stress Modelling Based on the Square of the Velocity Gradient Tensor // *Flow, Turbulence, and Combustion*. 1999. Vol. 62, No 3. P. 183–200.

33. *Patankar S.V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. — Washington DC: Hemisphere, 1980. — 214 p.

34. *Pope S. B.* Turbulent Flows. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. — 771 p.

35. *Reynolds W., Hussain A.* The mechanism of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3: Theoretical models and comparison with experiments // *Journal of Fluid Mechanics*. 1971. Vol. 54. P. 263–288.

36. *Shih T.-H., Liou W. W., Shabbir A., Yang Z., Zhu J.* A New $k-\varepsilon$ Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows — Model Development and Validation // *Computers and Fluids*. 1995. Vol. 24, No 3. P. 227–238.

37. *Shur M., Spalart P. R., Strelets M., Travin A.* Detached-Eddy Simulation of an Airfoil at High Angle of Attack / 4th Int. Symposium on Eng. Turb. Modeling and Experiments (Corsica, France, May 1999), 1999.

38. *Smagorinsky J.* General Circulation Experiments with the Primitive Equations. I. The Basic Experiment // *Monthly Weather Review*. 1963. Vol. 91, No 3. P. 99–164.

39. *Spalart P., Allmaras S.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. Technical Report AIAA-92-0439. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992.

40. *Spalart P. R.* Strategies for turbulence modelling and simulations // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2000. Vol. 21, No 3. 252–263.

41. *Spalart P. R., Deck S., Shur M. L., Squires K. D., Strelets M. Kh., Travin A.* A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities // *Theoretical Computational Fluid Dynamics*. 2006. Vol. 20. P. 181–195.

42. *Speziale C. G., Sarkar S., Gatski T. B.* Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach // *Journal of Fluid Mechanics*. 1991. Vol. 277. p. 245–272.

43. *Strelets M.* Detached eddy simulation of massively separated flows // *AIAA Paper 2001-0879*, 2001.

44. *Strelets M.* Turbulence modeling in convective flow of fires. / *Proc. of the Fourth Int. Seminar on Fire and Explosion Hazards (Ulster, 8-12 September 2003)*. — Ulster: Univ. of Ulster, 2004. — P. 53–67.

45. *Travin A., Shur M., Strelets M., Spalart P.* Detached-Eddy Simulations Past a Circular Cylinder // *Flow, Turbulence and Combustion*. 1999. Vol. 63, No 1-4. P. 293–313.
46. *Turkel E.* Preconditioning Techniques In Computational Fluid Dynamics // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1999. Vol. 31. P. 385–416.
47. *Vandoormaal J. P., Raithby G. D.* Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows // *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. 1984. Vol. 7, No 2. P. 147–163.
48. *Wallin S., Johansson A.* A complete explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows // *Journal of Fluid Mechanics*, 2000. Vol. 403. P. 89–132.
49. *Wienken W., Stiller J., Keller A.* A method to predict cavitation inception using large-eddy simulation and its application to the flow past a square cylinder // *Journal of Fluids Engineering*. 2006. Vol. 128, No 316. P. 316–325.
50. *Wilcox D. C.* *Turbulence Modeling for CFD*. La Canada, California: DCW Industries Inc., 1998. — 477 p.
51. *Yakhot V., Orszag S. A.* Renormalization Group Analysis of Turbulence: I. Basic Theory // *Journal of Scientific Computing*. 1986. Vol. 1, No 1. P. 1–51.
52. CFD Online, an online center for Computational Fluid Dynamics <http://www.cfd-online.com>.

СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ

ASM	Algebraic Stress Model
CFD	Computational Fluid Dynamics
DES	Detached Eddy Simulation
DDES	Delayed DES
DNS	Direct Numerical Simulation
EARSM	Explicit Algebraic Reynolds Stress Model
LES	Large Eddy Simulation
LES-NWM	LES Near-Wall Modeling
LES-NWR	LES Near-Wall Resolution
MILES	Monotone Integrated LES
PDF	Probability Density Function
PANS	Partially Averaged Navier–Stokes
RANS	Reynolds Averaged Navier–Stokes
RSM	Reynolds Stress Modeling
RNG	Renormalization Group model
SA	Spalart–Allmaras model
SAS	Scale Adaptive Simulation
SRANS	Steady RANS
SST	Shear Stress Transport model
URANS	Unsteady RANS
WALE	Wall Adapting Local Eddy Viscosity
2G-URANS	Second Generation URANS

Снегирёв Александр Юрьевич

**ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ
В ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 — учебная литература

Подписано в печать 23.12.2008. Формат 60×84/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 9,0. Уч.-изд. л. 9,0. Тираж 100+100 экз. Заказ 4619б.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором,
в Цифровом типографском центре Издательства Политехнического
университета

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

Тел. (812) 550-40-14

Тел./факс: (812) 297-57-76