Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования “Санкт-Петербургский
Государственный Политехнический Университет”

На правах рукописи

Адамьян Дмитрий Юрьевич

Метод генерации синтетической турбулентности на входных границах для расчета турбулентных течений в рамках вихреразрешающих подходов

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., проф.
Стрелец Михаил Хаимович

Санкт-Петербург – 2011

Содержание

Введение

Большинство течений жидкости и газа, встречающихся в природе и технике, являются турбулентными. При этом во многих случаях турбулентность оказывает существенное влияние на характеристики течения, важные с точки зрения инженерных приложений, такие как сопротивление движению тел в воздухе, интенсивность перемешивания потоков, интенсивность и направленность акустических колебаний, создаваемых течением газа и т.д. Поэтому моделирование турбулентности является чрезвычайно важным для гидродинамических расчетов.

В настоящее время для моделирования турбулентных течений в инженерных расчетах преимущественно используется решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (Reynolds-averaged Navier-Stokes, RANS), замкнутых при помощи той или иной полуэмпирической модели турбулентности. Этот подход является экономичным и дает приемлемые результаты для широкого класса турбулентных течений. Однако, для множества турбулентных течений, особенно для течений с отрывом пограничного слоя, результаты применения полуэмпирических моделей не являются удовлетворительными даже в случае использования наиболее совершенных моделей турбулентности [49]. Кроме того, полуэмпирические модели турбулентности не являются универсальными, что приводит к необходимости выбора и тестирования моделей турбулентности для каждого течения.

Альтернативой применению полуэмпирических моделей турбулентности является использование вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентности, в частности прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) турбулентности [60] и метода моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) [25, 78]. При значительно больших вычислительных затратах эти подходы позволяют получить хорошие результаты как для присоединенных, так и для отрывных течений. При этом результаты применения метода моделирования крупных вихрей лишь слабо зависят от используемой модели подсеточной турбулентности. Кроме того, вихреразрешающие подходы к моделированию турбулентности предоставляют детальную информацию о нестационарных полях флуктуаций скорости и давления, что важно для задач аэроакустики и аэроупругости.

При применении вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентности возникает проблема задания турбулентных пульсаций на входной границе. Поскольку DNS и LES предполагают трехмерную нестационарную постановку задачи, в рамках которой разрешаются все или большая часть турбулентных пульсаций, на входной границе также должны быть заданы турбулентные флуктуации скорости в том случае, когда течение является турбулентным на входной границе. Располагать же входную границу в области ламинарного течения обычно невозможно, так как моделирование перехода к турбулентности весьма сложно и требует чрезвычайно больших вычислительных ресурсов [111]. При этом важен сам способ задания нестационарных полей скорости на входной границе, несоответствие турбулентных флуктуаций скорости на входной границе реальному течению приводит к значительным ошибкам в характеристиках осредненного течения. Так, при задании на входной границе флуктуаций скорости в виде нескореллированных случайных чисел в расчете течения в пограничном слое на плоской пластине [50] трение на стенке снизилось в несколько раз и не восстановилось до физически реалистичного значения.

Кроме расчетов по методу прямого численного моделирования или моделирования крупных вихрей проблема входных граничных условий возникает также и в случае применения комбинированного RANS-LES подхода к моделированию турбулентности, Embedded LES —“встроенного LES” (см. рис. 1, более подробно этот подход рассмотрен в разделе 2.2). Для корректного при-

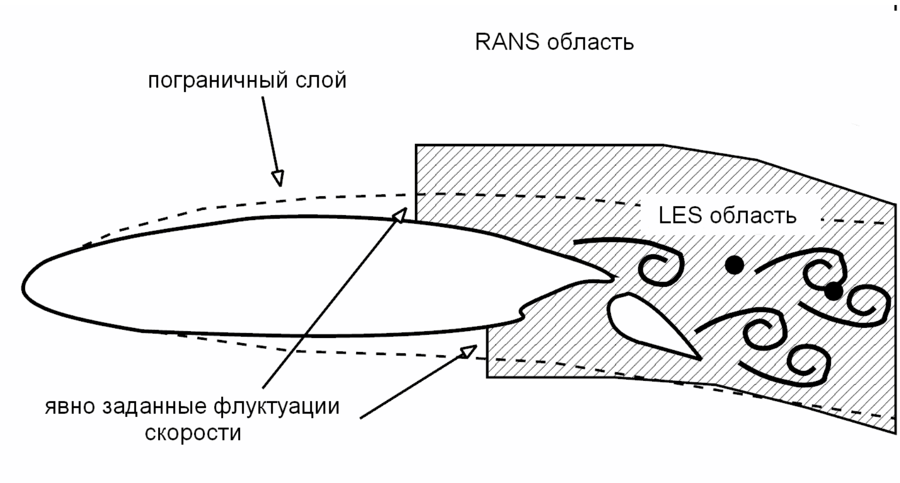

Рис. 1. Схема "встроенного LES" расчета турбулентного течения.

менения этого подхода крайне важным является задание граничных условий на интерфейсе RANS и LES областей.

Таким образом, очевидно, что необходим эффективный и точный способ задания нестационарных входных граничных условий для вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентности. Как будет показано в обзоре литературы (см. главу 1), существующие методы задания входных граничных условий не в полной мере решают эту проблему.

Целью диссертации является построение пригодного для широкого класса течений, обеспечивающего высокую точность, простого в реализации и не требующего больших вычислительных затрат метода задания нестационарных граничных условий на входных границах LES (или LES-подобласти) при расчете сложных турбулентных течений с помощью LES или комбинированных RANS-LES подходов. Конкретные задачи работы состоят в следующем:

1. Разработка и программная реализация метода генерации "синтетической турбулентности"

2. Калибровка и верификация разработанного метода путем его применения к расчету "канонических" сдвиговых турбулентных течений: разви-

того течения в плоском канале, течения в пограничном слое на плоской пластине и течения в плоском слое смешения.

3. Разработка эффективной методики RANS-LES расчета сложных турбулентных течений с использованием разработанного метода генерации "синтетической турбулентности" при постановке граничных условий на границе между RANS и LES подобластями.

4. Тестирование предложенных методов на примере расчета сложных течений с отрывом и присоединением: LES расчет течения в несимметричном диффузоре прямоугольного сечения и RANS-LES расчет обтекания выпуклости на плоской пластине.

Диссертация состоит из введения, пяти основных глав, заключения и списка литературы.

В главе 1 проведен обзор методов задания входных граничных условий для вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентности. В ней также приведено описание двух существующих методов задания входных граничных условий, используемых в данной работе для сравнения с предлагаемым методом.

В главе 2 представлена формулировка предлагаемого метода генерации "синтетической турбулентности" и способа проведения комбинированного RANS-LES расчета с применением разработанного метода.

Глава 3 посвящена описанию используемых в данной работе моделей турбулентности и численных методов решения уравнений движения и переноса характеристик турбулентности.

В главе 4 приведены результаты верификации разработанного метода генерации "синтетической турбулентности" применительно к расчетам "канонических" турбулентных течений. В разделе 4.1 представлены результаты для развитого течения в плоском канале, в разделе 4.2 — для течения в пограничном слое на плоской пластине, а раздел 4.3 посвящен результатам применения предложенного метода к расчету течения в плоском слое смешения.

В главе 5 продемонстрированы возможности разработанного метода задания входных граничных условий применительно к расчету сложных турбулентных течений. В разделе 5.1 приведены результаты расчета трехмерного отрывного течения в диффузоре прямоугольного сечения, а раздел 5.2 посвящен расчету обтекания выпуклости на плоской пластине.

В заключении кратко сформулированы основные результаты, полученные в ходе проведения данной работы.

Глава 1

Методы задания входных граничных условий для вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентности

Исторически вихреразрешающие подходы к моделированию турбулентности использовались для расчета геометрически простых течений, для которых можно было использовать периодические граничные условия. Так, первым применением метода прямого численного моделирования турбулентности был расчет однородной изотропной турбулентности [65]. Затем были проведены расчеты однородной турбулентности под воздействием постоянного сдвига или вращения [71], DNS [42] и LES [19] течения в плоском канале. Однако, для более сложных течений необходимо задание входных граничных условий на части границы расчетной области, так как использование периодических граничных условий невозможно.

В принципе, для многих течений возможно задание стационарных или медленно изменяющихся граничных условий в той области, где течение ламинарно. Однако моделирование перехода к турбулентности само по себе является весьма требовательной к вычислительным ресурсам задачей (см. напр. [111]), такой подход требует чрезмерно больших затрат для практических задач. Поэтому необходим способ задания нестационарных входных граничных условий, при котором задаваемое поле скорости будет близко к реальному полю скорости турбулентного течения.

Проблема постановки входных граничных условий для расчета турбулентных течений вихреразрешающими методами активно разрабатывается уже более 20 лет, для ее решения предложены десятки различных методов, каждому из которых присущи свои достоинства и недостатки. В данной главе приведен обзор существующих методов задания входных граничных условий для расчета турбулентных течений методами DNS и LES, также современное состояние данной проблемы описано в работах [32, 103].

Наиболее важным и сложным случаем с точки зрения постановки входных граничных условий являются пристенные течения. Задание на входной границе поля скорости, существенно отличающегося от физически реалистичного, приводит для пристенных течений к существенным ошибкам в трении на стенке, профилях скорости и напряжений Рейнольдса (см. [34, 40]). Для расчета же сводобно-сдвиговых течений зачастую можно применять стационарные (см. например [56]) или близкие к стационарным (с наложением возмущений малой амплитуды [2]) входные граничные условия. Действительно, турбулентные течения в слое смешения и в струе имеют сильный механизм генерации турбулентных пульсаций, для включения которого достаточно осцилляций скорости, создаваемых неустойчивостью численной схемы на грубой сетке. Это существенно снижает требования к качеству задания нестационарного поля на входной границе.

Расчет непериодического пристенного течения вихреразрешающим методом впервые был проведен Спалартом [92]. Это был расчет пограничного слоя на плоской пластине методом прямого численного моделирования. Проблема входных граничных условий в этой работе была решена следующим образом: с учетом закономерностей развития пограничного слоя на плоской пластине было проведено преобразование уравнений движения жидкости к такому виду, в котором можно использовать условия периодичности в продольном направлении. Сходный метод был применен для расчета течения в пограничном слое с неблагоприятным градиентом давления [98]. Однако, этот подход не оказался популярным, так как он требует значительной модификации вычислительного кода и пригоден только для некоторых классов задач.

Более простой в реализации подход к заданию входных граничных условий для расчета течения в пограничном слое на плоской пластине, основанный на тех же представлениях о закономерностях развития пограничного слоя, был предложен в работе [50]. Этот подход является первым и наиболее часто используемым методом "рециклинга" турбулентности. Методы этого типа используют мгновенное решение внутри расчетной области для задания входных граничных условий, поле скорости переносится на входную границу с выделенной плоскости, параллельной входной границе, с применением того или иного преобразования. Существует целый ряд подобных методов, их краткий обзор представлен в этой главе в разделе 1.1, также в этом разделе приведено описание метода [50].

Другим способом задания входных граничных условий является использование мгновенных полей, полученных в результате вспомогательного расчета более простого течения, например, течения в плоском канале или в пограничном слое. При этом может использоваться то или иное перемасштабирование флуктуаций скорости для соответствия заданным полям средней скорости и напряжений Рейнольдса. Краткий обзор методов этого типа приведен в этой главе в разделе 1.2.

Наиболее универсальным с точки зрения использования для инженерных приложений подходом к заданию входных граничных условий является использование "синтетической турбулентности", т.е. той или иной модели поля скорости турбулентного течения. В разделе 1.3 приведен обзор методов этого класса, также в этом разделе приведено описание метода [33], являющегося одним из лучших существующих методов генерации "синтетической турбулентности".

Сравнение достоинств и недостатков различных методов задания нестационарных входных граничных условий представлено в разделе 1.4.

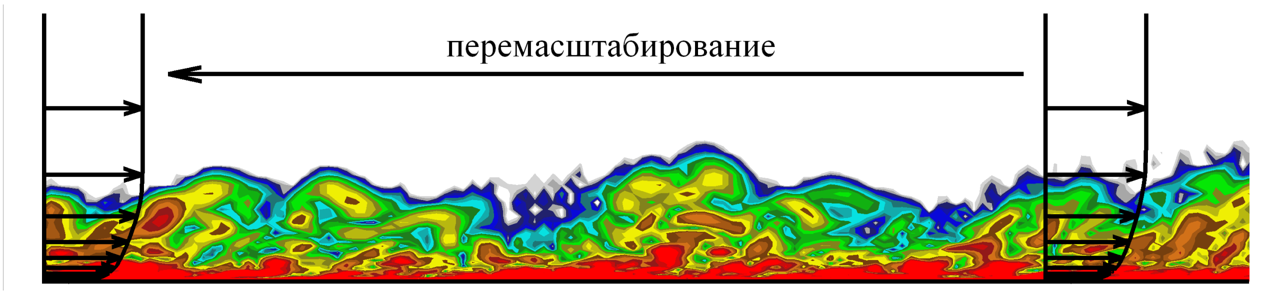

Рис. 1.1. Схема постановки входных граничных условий с использованием “рециклинга” турбулентности.

1.1. Методы “рециклинга” турбулентности

Схематическое изображение методов “рециклинга” турбулентности приведено на рис. 1.1. Исторически первым и наиболее часто используемым методом этого типа является метод, предложенный в работе [50]. Так как этот метод был использован в данной работе, далее приведено его краткое описание в соответствии с оригинальной работой.

Поле скорости на входной границе представляется как сумма полей средней и пульсационной скоростей

$$u_i\left(x,\ y,\ z,\ t\right) = U_i\left(x,\ y\right) + u_i^{'}\left(x,\ y,\ z,\ t\right), \tag{1.1}$$

здесь x направлено вдоль течения, y по нормали к пластине.

Для задания средней скорости используются следующие закономерности для течения в пограничном слое:

- скорость во внутренней области пограничного слоя подчиняется закону стенки
$$U^{\mathrm{inner}} = u_\tau\left(x\right) f_1\left(y^+\right), \tag{1.2}$$
где $u_\tau = \sqrt{\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\mathrm{wall}}}$ — динамическая скорость, $y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$ — координата y, отнесенная к динамической длине.

- скорость во внешней области определяется законом следа

$$U_{\infty} - U^{\text{outer}} = u_{\tau}(x) f_2(\eta), \tag{1.3}$$

где $\eta = \frac{y}{\delta}$ — координата y, отнесенная к толщине пограничного слоя δ, а U_{∞} — скорость невозмущенного течения.

Таким образом, средняя скорость на входной границе U_{inlet} во внутренней и внешней областях пограничного слоя выражается через скорость на выбранной плоскости на удалении от входа U_{recyc}:

$$U_{\text{inlet}}^{\text{inner}}(y) = \gamma U_{\text{recyc}}(\gamma y) \tag{1.4}$$

$$U_{\text{inlet}}^{\text{outer}}(y) = \gamma U_{\text{recyc}}\left(y\frac{\delta_{\text{recyc}}}{\delta_{\text{inlet}}}\right) + (1-\gamma)\, U_{\infty} \tag{1.5}$$

где $\gamma = \left(\frac{u_{\tau,\text{inlet}}}{u_{\tau,\text{recyc}}}\right)$. Для вычисления значений средней скорости U_{recyc} при таких значениях координаты y используется линейная интерполяция.

Для компоненты скорости, направленной по нормали к пластине, подразумевается выполнение следующих закономерностей:

$$V^{\text{inner}} = U_{\infty} f_3\left(y^{+}\right) \tag{1.6}$$

$$V^{\text{outer}} = U_{\infty} f_4(\eta), \tag{1.7}$$

значение этой компоненты скорости во внутренней и внешней области пограничного слоя на входной границе задается как

$$V_{\text{inlet}}^{\text{inner}} = V_{\text{recyc}}(\gamma y) \tag{1.8}$$

$$V_{\text{inlet}}^{\text{outer}} = V_{\text{recyc}}\left(y\frac{\delta_{\text{recyc}}}{\delta_{\text{inlet}}}\right). \tag{1.9}$$

Флуктуационная составляющая скорости на входной границе вычисляется как

$$(u_i^{'})_{\text{inlet}}^{\text{inner}} = \gamma(u_i^{'})_{\text{recyc}}(\gamma y,\ z,\ t) \tag{1.10}$$

$$(u_i^{'})_{\text{inlet}}^{\text{outer}} = \gamma(u_i^{'})_{\text{recyc}}\left(y\frac{\delta_{\text{recyc}}}{\delta_{\text{inlet}}},\ z,\ t\right), \tag{1.11}$$

здесь предполагается, что амплитуда флуктуаций скорости пропорциональна динамической скорости:

$$\sqrt{(u_i')^2} \sim u_\tau(x) \tag{1.12}$$

.

Наконец, для сращивания внешней и внутренней областей пограничного слоя используется весовая функция:

$$(u_i)_{\text{inlet}} = \left[(U_i)_{\text{inlet}}^{\text{inner}} + \left(u_i' \right)_{\text{inlet}}^{\text{inner}} \right] \left[1 - W\left(\frac{y}{\delta_{\text{inlet}}} \right) \right] + \left[(U_i)_{\text{inlet}}^{\text{outer}} + \left(u_i' \right)_{\text{inlet}}^{\text{outer}} \right] \left[W\left(\frac{y}{\delta_{\text{inlet}}} \right) \right], \tag{1.13}$$

определяемая следующим образом

$$W(\eta) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\tanh(\alpha)} \tanh\left[\frac{\alpha(\eta - b)}{(1 - 2b)\eta + b} \right] \right\}, \tag{1.14}$$

где $\alpha = 4$, $b = 0.2$.

На входной границе задается требуемое значение толщины пограничного слоя δ_{inlet}, а динамическая скорость определяется по следующему соотношению:

$$u_{\tau,\text{inlet}} = u_{\tau,\text{recyc}} \left(\frac{\theta_{\text{recyc}}}{\theta_{\text{inlet}}} \right)^{\dfrac{1}{2(n-1)}}, \; n = 5, \tag{1.15}$$

где θ — толщина потери импульса пограничного слоя.

Для получения значений средней скорости используется осреднение по z и скользящее среднее по времени:

$$U^{n+1} = \frac{\Delta t}{T} \left\langle u^{n+1} \right\rangle_z + \left(1 - \frac{\Delta t}{T} \right) U^n, \tag{1.16}$$

где Δt — величина шага по времени, T — характерный интервал осреднения, а $\langle\rangle_z$ означает осреднение по z. Интервал осреднения T на начальном этапе расчета устанавливают достаточно небольшим, рекомендуется значение $T = 10\frac{\delta}{U_\infty}$, после установления статистически стационарного течения рекомендуется увеличить интервал осреднения на порядок.

Этот метод был использован для задания входных граничных условий в большом числе работ по прямому численному моделированию или моделированию крупных вихрей течения в пограничном слое (см. например. [81, 112]), а также лег в основу множества подобных методов. Далее приведен список основных работ, посвященных развитию этого класса методов.

В работах [79, 100, 114] были предложены аналогичные методы для сжимаемых течений. В целом ряде работ [12, 22, 35] были предложены модификации метода [50], отличающиеся применением других соотношений для задания поля скорости на входной границе. В работах [5, 6] был предложен метод "рециклинга" турбулентности, применимый для расчета течений в пограничном слое с градиентом давления, также учитывающий флуктуации температуры.

В работе [97] было предложено существенное упрощение метода [50], основанное на использовании только закона подобия для внешней границе расчетной области.

В работе [90] был предложен метод "рециклинга" турбулентности, позволяющий проводить "встроенный" LES расчет, в котором на входной границе задаются профили скорости и характеристик турбулентности из RANS области выше по потоку.

Все эти методы дают хорошее качество нестационарного поля скорости на входной границе, однако обладают существенным недостатком: они применимы только к течению в пограничном слое с нулевым или небольшим градиентом давления, так как основаны на закономерностях развития автомодельного пограничного слоя. Еще одной проблемой методов "рециклинга" турбулентности является их неприспособленность к областям сложной геометрии. Действительно, для применения методов такого типа необходим участок, на котором течение будет однородным по поперечному направлению и слабо изменяющимся по продольному направлению. Для сложных трехмерных течений такое может быть невозможно.

Также можно отметить еще один недостаток, характерный для методов "рециклинга" турбулентности: эти методы вносят низкочастотную периодическую составляющую в поле скорости, которая может приводить к изменениям в общей картине течения [61].

1.2. Использование вспомогательного расчета

При использовании вспомогательного расчета для задания входных граничных условий, как и при применении методов "рециклинга" турбулентности флуктуации, скорости создаются естественным путем при расчете турбулентного течения. Вспомогательный расчет проводится для какого-либо простого течения, соответствующего геометрическим особенностям задачи. Так, например, в работе [37] для задания граничных условий при расчете течения в двумерном диффузоре использовались мгновенные поля скорости из расчета развитого течения в плоском канале. В работе [109] для расчета течения в трехмерном диффузоре использовался вспомогательный расчет течения в канале прямоугольного сечения.

Для задания входных граничных условий при расчете течений в пограничном слое используется вспомогательный расчет пограничного слоя на плоской пластине с применением "рециклинга" турбулентности, входные граничные условия в основном расчете задаются как поле флуктуаций скорости из этого вспомогательного расчета (см. схему на рис. 1.2). Этот подход был предложен уже в первой работе по "рециклинга" турбулентности [50], и был использован во многих работах по моделированию турбулентных течений (см. напр. [7, 104]).

Использование вспомогательного расчета для определения флуктуаций скорости возможно не только в том случае, когда на входной границе течение

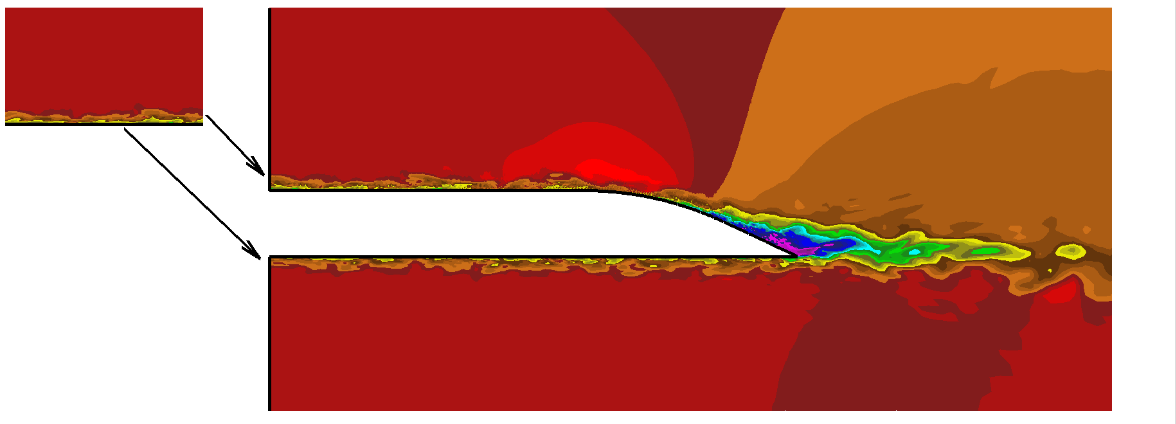

Рис. 1.2. Схема постановки входных граничных условий с использованием вспомогательного расчета.

близко к тому или иному “каноническому”, но и для совместных RANS-LES расчетов в более сложной области. Так, в работе [83] был предложен метод задания входных граничных условий для LES, в котором средние значения скорости определялись по RANS решению, а флуктуации скорости задавались перемасштабированием мгновенных полей флуктуаций скорости из вспомогательного расчета периодического течения. При этом перемасштабирование флуктуаций скорости происходило таким образом, чтобы кинетическая энергия турбулентных пульсаций была равна соответствующей величине из RANS решения. Результаты применения такого подхода можно считать успешными, но он требует существенной модификации вычислительного кода и выбора типа и параметров течения для вспомогательного расчета.

1.3. Методы “синтетической” турбулентности

Идея создания синтетических полей скорости, сходных с реальной турбулентностью, не нова. Уже в 1970 году Крайчнан [46] использовал в своей работе представление поля скорости однородной изотропной турбулентности как такую суперпозиции синусоидальных мод со случайными параметрами, что спектр этого поля скорости имел определенный вид. Однако, в этой работе не рассматривался вопрос задания граничных условий для расчетов турбулентности, синтетическое поле скорости использовалась как упрощенная модель поля скорости турбулентного течения для изучения его свойств. Такие модели были разработаны для однородной изотропной турбулентности [23], однородной стратифицированной и быстро вращающейся турбулентности [13, 63], а также для течения в плоском канале [16].

Впервые "синтетическая" турбулентность была применена для расчетов турбулентных течений в работе [71], посвященной прямому численному моделированию однородной турбулентности со сдвигом и вращением. В этой работе синтетическое поле скорости, создаваемое методом подобным [46], использовалось для задания начальных условий. Метод такого же типа применялся для постановки входных граничных условий в расчете затухания турбулентности за решеткой в работе [48].

Первое применение "синтетической" турбулентности для расчета неоднородного течения — расчет обтекания обратного уступа в работе [47]. При этом поле флуктуаций скорости на входной границе задавалось как "синтетическая" однородная изотропная турбулентность, построенная по методу [48], масштабированная таким образом, чтобы напряжения Рейнольдса соответствовали заданным профилям. Для достижения этого используется умножение вектора скорости на разложение заданного тензора напряжений Рейнольдса по Холецкому $\mathbf{R} = \mathbf{A^T A}$:

$$u_i^{'} = A_{ij} v_j^{'} \tag{1.17}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ \dfrac{R_{21}}{a_{11}} & \sqrt{R_{21} - a_{21}^2} & 0 \\ \dfrac{R_{31}}{a_{11}} & \dfrac{R_{32} - a_{21}a_{31}}{a_{22}} & \sqrt{R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2} \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

где R_{ij} — компоненты тензора напряжений Рейнольдса, v_j — однородная изотропная “синтетическая” турбулентность. Качество синтетического поля флуктуаций скорости, создаваемого таким методом, оказалось невысоким, для восстановления значения трения на стенке потребовался участок длиной около 20 толщин пограничного слоя, при этом отклонение трения было значительным.

В работе [50] был рассмотрен такой способ задания входных граничных условий для LES: в качестве флуктуаций скорости на входной границе использовались случайные числа такие, что $\langle u_i^{'} \rangle = 0$, $\langle u_i^{'} u_j^{'} \rangle = \delta_{ij}$, с последующим домножением вектора скорости на разложение Холецкого тензора напряжений Рейнольдса. Как показано в этой статье [50], при задании входных граничных условий для пристенного течения таким образом флуктуации скорости быстро затухают, что приводит практически к ламинаризации течения.

Еще один способ создания неоднородной “синтетической” турбулентности, основанный на спектральном представлении поля скорости [46], был предложен в работах [8, 91]. В этом методе параметры мод были определены локально по заданным характеристикам турбулентности. При этом в области сильного изменения характеристик турбулентности (например, вблизи стенки) моды теряют свою форму, а поле скорости получается похожим на коротковолновый шум (иллюстрации см. напр. в [32, 34]). Такое поле флуктуаций скорости быстро затухает, что негативно сказывается на трении. Так, при применении метода [8] для задания входных граничных условий при LES расчете течения в плоском канале падение коэффициента трения на стенке канала составляет $30 - 40\%$, а для восстановления трения требуется участок длиной более 10 величин ширины канала [34].

Причиной быстрого затухания флуктуаций скорости, создаваемых методами “синтетической турбулентности” [8, 48, 50] является несоответствие размеров создаваемых вихревых структур реальному турбулентному течению, поле флуктуаций скорости, создаваемое этими методами содержит преимущественно коротковолновую составляющую, а крупномасштабные вихревые структуры в этом поле практически отсутствуют. Впоследствии был создан целый ряд методов, создающих синтетическое поле флуктуаций скорости с локально заданными линейным размерами вихревых структур и заданными значениями напряжений Рейнольдса (с помощью преобразования (1.17)). Были разработаны метод вихрей (Vortex Method) [54, 55], метод случайных пятен [45], методы цифровой фильтрации случайной последовательности [20, 41, 43, 108, 113], метод синтетических вихрей (Synthetic Eddy Method) [33, 34]. Все эти методы строят разными способами синтетическое поле флуктуаций скорости, вихревые структуры которого имеют заданный масштаб, определяемый по RANS решению. Так, для семейства моделей $k - \omega$ масштаб определяется как

$$l_t = \frac{\sqrt{k_t}}{C_\mu \omega_t}, \tag{1.19}$$

а для $k - \varepsilon$ моделей как

$$l_t = \frac{k_t^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}, \tag{1.20}$$

Необходимо отметить, что во всех этих методах линейный масштаб RANS модели турбулентности определяет размеры вихревых структур во всех направлениях, тогда как в реальном турбулентном течении вблизи стенки наблюдается сильная анизотропия вихревых структур, вытянутых вдоль направления течения. Такое несоответствие “синтетической турбулентности” реальной картине течения приводит к тому, что для всех этих методов при применении для постановки входных граничных условий для LES расчетов пристенных течений наблюдается падение трения на стенке на $20 - 30\%$ с последующим длительным восстановлением трения (длина участка восстановления составляет около 10 толщин пограничного слоя), отклонение профилей скорости и напряжений Рейнольдса вблизи входной границы с “синтетической турбулентностью” также является значительным.

В данной работе для сравнения с предложенным методом генерации “синтетической турбулентности” был использован метод синтетических вихрей [33, 34] как один из представителей методов этого типа. Далее приведено его краткое описание.

Поле скорости на входной границе по методу синтетических вихрей строится как суперпозиция N локальных флуктуаций:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{c}^k f_{l_t(\mathbf{r})} \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}^k\right), \tag{1.21}$$

где $\mathbf{r}^k$ — координаты центров локальных флуктуаций, $\mathbf{c}^k$ — их интенсивности, а величины $f_{l_t(\mathbf{r})} \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}^k\right)$ представляют собой распределение скорости в единичной флуктуации с центром в $\mathbf{x}^k$. В методе используется универсальное распределение скорости для всех флуктуаций, зависящее только от линейного масштаба

$$f_{l_t} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\right) = \sqrt{V_B} l_t^{-3} f \left(\frac{x - x^k}{l_t}\right) f \left(\frac{y - y^k}{l_t}\right) f \left(\frac{z - z^k}{l_t}\right) \tag{1.22}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 - |x|\right) & \text{при } x < 1 \\ 0 & \text{в другом случае} \end{cases}, \tag{1.23}$$

здесь V_B — объем прямоугольного параллелепипеда B, заключающего входную границу. Параллелепипед B определяется как

$$B = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_{i,\min} < x_i < x_{i,\max}, \ i = \{1, 2, 3\}\right\} \tag{1.24}$$

$$x_{i,\min} = \min_{x \in S} \left(x_i - l_t(x)\right), \ x_{i,\max} = \max_{x \in S} \left(x_i + l_t(x)\right), \tag{1.25}$$

где S — множество точек входной границы.

Центры флуктуаций $\mathbf{r}^k$ в начальный момент времени располагают внутри параллелепипеда B с равномерным распределением, а их интенсивности вычисляют как

$$\mathbf{c}^k = a_{ij}\varepsilon_j^k, \tag{1.26}$$

где a_{ij} — компоненты декомпозиции Холецкого тензора напряжений Рейнольдса R_{ij} (см. (1.18)), а ε_j^k — случайная величина, принимающая с равной вероятностью значения 1 и -1.

Метод предусматривает прямолинейное передвижение локальных флуктуаций по области B с постоянной скоростью $\mathbf{U}_c$, характерной для исследуемого течения, например, можно выбрать в качестве $\mathbf{U}_c$ среднерасходную скорость на входной границе.

На каждом временном шаге координаты центров локальных флуктуаций вычисляют как

$$\mathbf{x}^k\left(t + dt\right) = \mathbf{x}^k\left(t\right) + \mathbf{U}_c dt, \tag{1.27}$$

где dt — шаг по времени нестационарного расчета. Если же флуктуация k выходит за пределы области B через боковую поверхность, то она восстанавливается случайным образом на противоположной поверхности с новым вектором интенсивности ε_j^k.

Линейный масштаб синтетических вихрей задается по следующей формуле:

$$l_t = \max\left(\min\left(\frac{\sqrt{k_t}}{C_\mu \omega_t}, \kappa\delta\right), \Delta\right), \tag{1.28}$$

где $\Delta = \max\left(\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z\right)$ — максимальный шаг сетки в данной точке, $\kappa = 0.41$ — постоянная Кармана, δ — линейный масштаб течения (толщина пограничного слоя). Для оценки достаточного количества дискретных локальных флуктуаций используется формула

$$N = \max_{x\in B}\left(\frac{V_B}{l_t^3}\right). \tag{1.29}$$

Метод синтетических вихрей использовался в работах по моделированию турбулентных течений (см. напр. [27, 107]) и является одним из лучших суще-

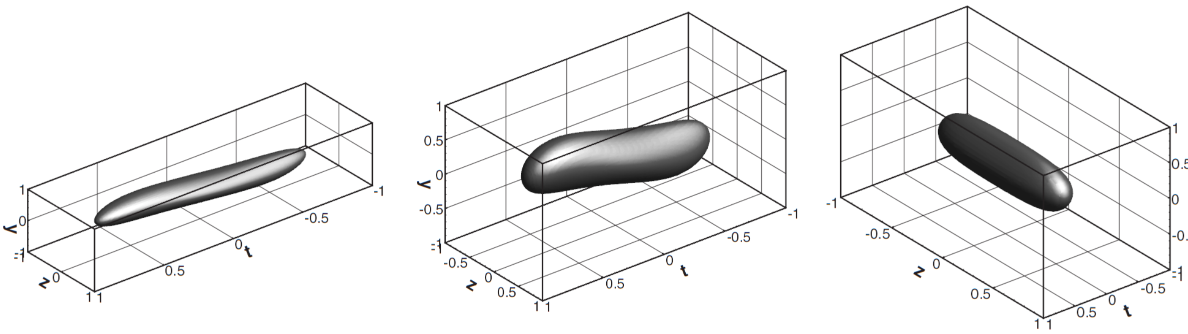

Рис. 1.3. Вытянутые вдоль стенки синтетические вихревые структуры, используемые для создания “синтетической турбулентности” в методе [66]

ствующих методов “синтетической турбулентности” для произвольных течений. Также существует обобщение этого метода для сжимаемых течений [52].

В отдельную группу методов “синтетической турбулентности” можно выделить методы, предназначенные для течения в пограничном слое, строящие поле скорости как суперпозицию структур специального вида, характерных именно для пограничного слоя. Так, в работе [102] используются синтетические подковообразные вихри, в статье [80] предлагается использование структур двух различных видов — для внутренней и внешней областей пограничного слоя. В работе [66] предлагается основанный на методе синтетических вихрей [33] подход к генерации синтетического поля скорости с использованием специального вида синтетических вихревых структур, вытянутых вдоль направления течения вблизи стенки (см. рис. 1.3). Результаты применения такого подхода существенно лучше, чем для исходного метода синтетических вихрей [33]: отклонение трения для течения в пограничном слое не превышает $10-15\%$, а длина участка восстановления составляет $2\delta_0$. Однако, этот метод сформулирован только для течения в пограничном слое и не может быть применен для более общего случая без существенной модификации.

В некоторых работах методы “синтетической турбулентности” использовались в сочетании с методом контролируемого силового воздействия. Впервые такой подход был предложен для улучшения качества поля флуктуаций скорости в работе [99] для течения в пограничном слое. Метод построен следующим образом: в нескольких плоскостях, параллельных входному сечению и отстоящих от него на заданное расстояние, в уравнения движения вводится источниковый член, соответствующий объемной силе, направленной по нормали к стенке. Величина объемной силы задается специальным образом так, чтобы получить заданные профили средней скорости и касательного напряжения Рейнольдса. Плотность объемной силы в сечении $x = x_0$ определяется следующим образом:

$$f\left(x_0, y, z, t\right) = r\left(y, t\right)\left[u\left(x_0, y, z, t\right) - \overline{u}^{z,t}\right] \tag{1.30}$$

$$r\left(y, t\right) = \alpha e\left(y, t\right) + \beta \int\limits_0^t e\left(y, t^{'}\right) \, dt^{'} \tag{1.31}$$

$$e\left(y, t\right) = -\overline{\rho u^{'} v^{'}}^{z,t}\left(x_0, y, t\right) - g\left(x_0, y\right), \tag{1.32}$$

где $\overline{u}^{z,t}$ и $\overline{\rho u^{'} v^{'}}^{z,t}$ — осредненные по z и по времени (скользящее среднее, см. (1.16)) продольная компонента скорости и касательное напряжение Рейнольдса, $g\left(x_0, y\right)$ — заданный профиль касательных напряжений Рейнольдса. α, β — параметры. В работе [99] заданный профиль касательных напряжений Рейнольдса получали перемасштабированием осредненного профиля, взятого ниже по потоку. Однако, для задания касательных напряжений Рейнольдса можно использовать и RANS решение.

Применение контролируемого воздействия в сочетании с заданием "синтетической турбулентности" по методу[47] для течения в пограничном слое на плоской пластине привело к существенно меньшему отклонению коэффициента трения на пластине и существенно более быстрому его восстановлению по сравнению с использованием только "синтетической турбулентности" [99].

В работе [40] метод контролируемого силового воздействия был применен для расчета течения в плоском канале в сочетании с методом "синтетической турбулентности” [8]. По сравнению со случаем применения только “синтетической турбулентности” уменьшилось отклонение трения и длина участка восстановления трения, которая составила около 5 значений ширины канала. В работе [39] этот метод был применен для совмещенного RANS-LES расчета течения в пограничном слое с нулевым, благоприятным и неблагоприятным градиентом давления. При этом профили касательных напряжений $g(x, y)$ задавались по RANS решению по модели Спаларта-Аллмараса. По сравнению с применением только “синтетической турбулентности” [8] совместное использование контролируемого силового воздействия и “синтетической турбулентности” существенно улучшило восстановление трения после RANS-LES интерфейса.

В статье [18] даны рекомендации по определению параметров метода контролируемого силового воздействия, а также проведен расчет трехмерного пограничного слоя с поперечным градиентом давления с применением этого метода.

В работах [76, 115] метод контролируемого силового воздействия успешно использовался в сочетании с методом “синтетической турбулентности” [33, 34] для совместных RANS-LES расчетов обтекания крылового профиля и взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем.

Также метод контролируемого силового воздействия использовался для задания внешней турбулентности при расчете обтекания крылового профиля [26].

В целом опыт применения метода контролируемого силового воздействия можно назвать удачным, так при применении этого метода в сочетании с методом “синтетической турбулентности”, качественно создающим поле флуктуаций скорости [33, 34], для расчетов по технологии “встроенный LES” погрешности, вносимые RANS-LES интерфейсом, невелики и слабо влияют на общую картину течения [76, 115]. Однако, этому методу также присущи определенные недостатки: для развития флуктуаций скорости под воздействием внешней силы требуется некое расстояния, т.е. необходим переходный участок. Также отсутствует опыт применения метода контролируемого силового воздействия для трехмерных течений, т.е. при отсутствии однородности по одной из координат. Для применения методов такого типа для трехмерных течений проблемой может стать необходимость весьма длительного осреднения по времени для получения средних полей скорости.

Кроме постановки входных граничных условий "синтетическая турбулентность" использовалась также при решении задач аэроакустики для создания нестационарного поля скорости по RANS решению. В работах [9, 38] был предложен метод создания однородного изотропного поля скорости с заданным энергетическим спектром, соответствующим модифицированному спектру фон Кармана. Этот метод был использован во многих работах по моделированию задач аэроакустики (см. напр. [1, 11]. Также была предпринята попытка использования поля скорости, создаваемого этим методом, для задания входных граничных условий для LES расчетов [17], впрочем в этой работе не определены рекомендации по выбору параметров метода генерации синтетического поля флуктуаций скорости.

1.4. Сравнение различных классов методов задания входных граничных условий

В заключение обзора методов задания входных граничных условий для расчетов турбулентных течений вихреразрешающими методами необходимо привести краткое перечисление достоинств и недостатков различных классов методов.

Методы "рециклинга" турбулентности отличаются хорошим качеством создаваемого на входной границе поля флуктуаций скорости. Однако методы такого типа не являются универсальными, так как применяемое в них перемасштабирование полей скорости специфично для какого-то типа течения. Другим недостатком является невозможность или сложность применения методов этого типа к течениям в геометрически сложной области и к трехмерным течениям.

Использование вспомогательного расчета для задания входных граничных условий также может быть использовано для создания нестационарного поля флуктуаций скорости хорошего качества. При этом методы такого типа применимы в том числе и к геометрически сложным течениям. Однако необходимость тщательного выбора типа течения для вспомогательного расчета в сочетании со сложностью в реализации и использования таких подходов к заданию входных граничных условий делают их неудобными для практических расчетов.

Только методы генерации "синтетической турбулентности" являются универсальными и простыми как в реализации в программах вычислительной гидродинамики, так и в использовании. В то же время низкое качество поля флуктуаций скорости, создаваемого большинством методов этого типа, приводит к существенной деградации флуктуаций скорости при удалении от входной границе и к значительным отклонениям характеристик осредненного течения. Наиболее существенно это проявляется для пристенных течений. При этом наиболее важным для получения качественного синтетического поля флуктуаций скорости является воспроизведение линейных масштабов вихревых структур.

Качество синтетического поля турбулентных пульсаций скорости может быть существенно улучшено с применением контролируемого силового воздействия, однако применение такого подхода существенно осложнено в случае геометрически сложных течений.

Глава 2

Формулировка метода генерации синтетической турбулентности

В этой главе изложен разработанный метод генерации "синтетической турбулентности" (раздел 2.1), приведено описание комбинированного RANS-LES подхода к моделированию турбулентности и краткий обзор научных работ с применением такого подхода (раздел 2.2) и описаны способы использования разработанного метода для постановки граничных условий на входных границах LES и LES подобласти при проведении комбинированного RANS-LES расчета сложных турбулентных течений (раздел 2.3).

В основе предлагаемого генератора "синтетической турбулентности" лежит идея спектрального представления поля флуктуаций скорости [46], а также некоторые элементы генератора синтетической однородной изотропной турбулентности, разработанного для решения задач аэроакустики [9]. Наиболее важное отличие разработанного метода от его предшественников состоит в том, что он учитывает анизотропию турбулентности в окрестности твердых стенок.

2.1. Описание метода генерации синтетической турбулентности

Скорость на входной границе в LES область или же границе между RANS областью и расположенной вниз по потоку LES областью задается как сумма средней и флуктуационной составляющих скорости

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)\,. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ — поле средней скорости на входной границе, предполагаемое известным, например, из RANS решения, а $\mathbf{u}'(\mathbf{r},t)$ — поле флуктуаций скорости.

Как и во многих других методах генерации "синтетической турбулентности" (см., например, [8, 34]), поле пульсаций скорости $\mathbf{u}'(\mathbf{r},t)$ строится таким образом, чтобы соответствующий тензор вторых моментов $\left\langle u_i' u_j' \right\rangle$ был равен заданному тензору напряжений Рейнольдса $\mathbf{R}$. Выполнение этого требования достигается с помощью разложения тензора $\mathbf{R}$ по Холецкому $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}$, где

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ \dfrac{R_{21}}{a_{11}} & \sqrt{R_{22} - a_{21}^2} & 0 \\ \dfrac{R_{31}}{a_{11}} & \dfrac{R_{32} - a_{21}a_{31}}{a_{22}} & \sqrt{R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2} \end{pmatrix}$$

В результате искомое поле синтетических флуктуаций скорости $\mathbf{u}'(\mathbf{r},t)$ может быть представлено в виде $u_i'(\mathbf{r},t) = a_{ij}(\mathbf{r})\, v_j'(\mathbf{r},t)$, где $\mathbf{v}'(\mathbf{r},t)$ — вспомогательное поле пульсаций скорости, удовлетворяющее условию $\langle v_i' \rangle = 0$, и $\left\langle v_i' v_j' \right\rangle = \delta_{ij}$, а задача генерации поля $\mathbf{u}'(\mathbf{r},t)$ сводится к генерации поля $\mathbf{v}'(\mathbf{r},t)$. Это поле ищется в виде следующей суперпозиции амплитудно-модулированных мод Фурье

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r},t) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{N} \sqrt{q^n} \left[\sigma^n \cos\left(k^n \mathbf{d}^n \cdot \mathbf{r} + \varphi^n + s^n \frac{t}{\tau} \right) \right] \tag{2.2}$$

Здесь:

- N — число мод, которое заранее неизвестно и определяется в процессе расчета;
- q^n — нормированная амплитуда моды, определяемая локальным энергетическим спектром турбулентности (см. далее);
- k^n — модуль волнового вектора n-ой моды, который имеет направление, определяемое случайным ортом $\mathbf{d}^n$, равномерно распределенным

по единичной сфере;

- σ^n — орт, определяющий направление скорости n-ой моды, лежащий в плоскости, нормальной к вектору $\mathbf{d}^n$ ($\sigma^n \cdot \mathbf{d}^n = 0$); направление σ^n в этой плоскости задается углом, являющимся случайным числом, равномерно распределенным в интервале $[0;\ 2\pi)$;

- φ^n — фаза n-ой моды, являющаяся случайным числом, равномерно распределенным в интервале $[0;\ 2\pi)$;

- s^n — безразмерная круговая частота n-ой моды, являющаяся случайной величиной с нормальным распределением и имеющая среднее значение и стандартное отклонение, равные 2π;

- τ — глобальный временной масштаб "синтетической турбулентности" на входной границе.

Входящие в (2.2) нормированные амплитуды мод

$$q^n = \frac{E\left(k^n\right)\Delta k^n}{\sum\limits_{n=1}^{N} E\left(k^n\right)\Delta k^n},\ \sum_{n=1}^{N} q^n = 1$$

вычисляются с использованием модифицированного безразмерного энергетического спектра фон Кармана (см. рис. 2.1):

$$E\left(k\right) = \frac{\left(k/k_e\right)^4}{\left[1 + 2.4\left(k/k_e\right)^2\right]^{17/6}} f_\eta f_{cut}. \tag{2.3}$$

Введенные в (2.3) эмпирические функции f_η и f_{cut} предназначены соответственно для учета изменения формы спектра при приближении к колмогоровскому волновому числу k_η и для обеспечения его быстрого падения в окрестности максимального разрешаемого на используемой сетке волнового числа k_{cut}. Выражения для этих функций имеют вид:

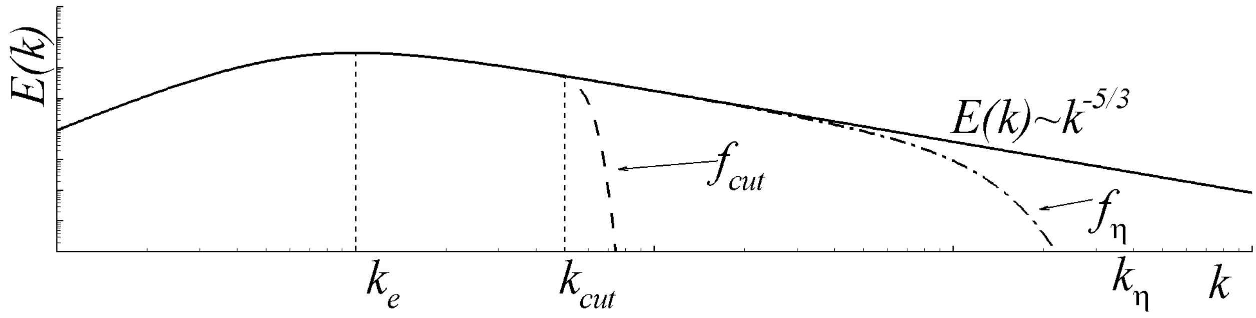

Рис. 2.1. Энергетический спектр фон Кармана [4] (сплошная линия), модифицированный спектр (2.3) при $k_{cut} < k_\eta$ (штриховая линия) и спектр (2.3) при $f_{cut} = 1$ (штрихпунктирная линия).

$$f_\eta = \exp\left(-\left[12\frac{k}{k_\eta}\right]^2\right),\ f_{cut} = \exp\left(-\left[\frac{4\max\left(k - 0.9k_{cut},\ 0\right)}{k_{cut}}\right]^3\right), \quad (2.4)$$

где $k_\eta = \frac{2\pi}{l_\eta} = \frac{2\pi}{\left(\nu^3/\varepsilon\right)^{1/4}}$ (l_η — длина волны, отвечающая волновому числу k_η, ν — молекулярная вязкость, ε — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, определяемая из RANS решения), а $k_{cut} = \frac{2\pi}{l_{cut}}$, причем величина l_{cut} (минимальная разрешаемая на сетке длина волны) определяется эмпирическим выражением

$$l_{cut} = 2\min\left\{\left[\max\left(h_y,\ h_z,\ 0.3h_{\max}\right) + 0.1d_w\right], h_{\max}\right\}, \quad (2.5)$$

в котором h_x, h_y и h_z — локальные шаги сетки во входном сечении LES области, $h_{\max} = \max\left(h_x,\ h_y,\ h_z\right)$, а d_w — расстояние от рассматриваемой точки до стенки. В частном случае равномерной сетки величины l_{cut} равна ее удвоенному шагу.

Наконец, входящее в (2.3) волновое число k_e, при котором достигается максимум энергетического спектра (2.3), соответствует длине волны наиболее энергонесущих мод синтезированного поля флуктуаций скорости или, иными словами, размеру наиболее энергонесущих вихрей “синтетической турбулентности” l_e, то есть $k_e = \frac{2\pi}{l_e}$.

Следует подчеркнуть, что правильное определение величины l_e является крайне важным для обеспечения быстрой адаптации синтетического поля пульсаций скорости, задаваемого на входе в расчетную область, к “реальной” турбулентности, соответствующей LES решению внутри расчетной области. В предложенном методе величина l_e задается следующим выражением:

$$l_e = \min\left(2d_w, C_l l_t\right) \tag{2.6}$$

где $C_l = 3$ — эмпирическая константа, а l_t — линейный масштаб модели турбулентности, используемой при расчете осредненного профиля скорости в (2.1) или в RANS подобласти при использовании комбинированного RANS-LES подхода. Например, в случае использования $k-\omega$ модели турбулентности $l_t = \frac{k_t^{1/2}}{C_\mu \omega_t}$.

Как видно из (2.6), в пристеночной области течения величина l_t определяется расстоянием до стенки, а при удалении от нее — линейным масштабом RANS модели. Примеры распределений $l_e\left(y\right)$ в канонических сдвиговых течениях, рассчитанных с использованием $k-\omega$ SST модели Ментера, показаны на рис. 2.2. [1]

Набор векторов волновых чисел, используемых в генераторе турбулентности (2.2), является общим для всего входного сечения LES, причем их модули задаются по закону геометрической прогрессии

$$k^n = k^{\min} \cdot \left(1+\alpha\right)^{n-1}, \; n = 1 \div N, \; \alpha = 0.01 \div 0.05 \tag{2.7}$$

Здесь $k^{\min}$ — минимальное волновое число, которое определяется через волновое число $k_e^{\min}$, соответствующее максимальному по всему рассматриваемому сечению значению величины l_e с помощью эмпирического соотношения

$$k^{\min} = \beta k_e^{\min}, \; \beta < 1, \; k_e^{\min} = \frac{2\pi}{l_e^{\max}}, \; l_e^{\max} = \max_{\mathbf{r}}\left\{l_e\left(\mathbf{r}\right)\right\}, \tag{2.8}$$

[1] При расчете слоя смешения величина d_w в (2.6) полагается равной бесконечности.

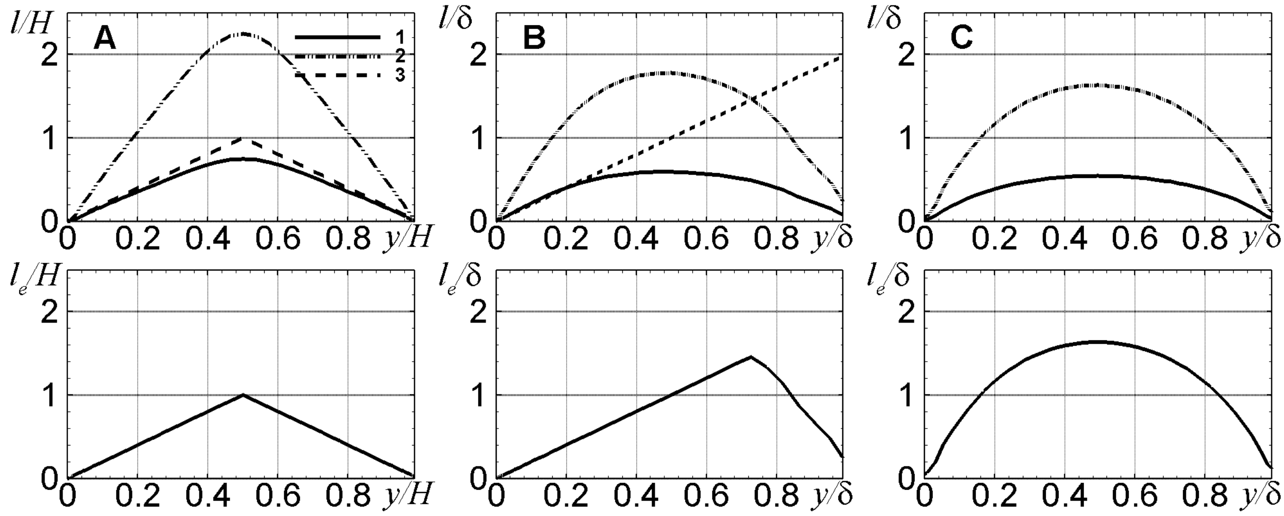

Рис. 2.2. Распределения входящих в правую часть формулы (2.6) величин l_t (1), $C_l l_t$ (2) и $2d_w$ (3) (верхний ряд) и линейного масштаба l_e, вычисленного по (2.6) (нижний ряд), в установившемся течении в плоском канале (A), в пограничном слое на плоской пластине (B) и в плоском слое смешения (C).

где $\beta = 0.5$ — эмпирическая константа, а число мод N определяется как максимальное целое число, для которого k^N, рассчитанное по (2.7), не превышает величины $k_{\max} = 1.5 \max\limits_{\mathbf{r}} \{k_{cut}(\mathbf{r})\}$.

Для окончательной формулировки алгоритма генерации турбулентности необходимо определить входящий в (2.2) временной масштаб τ. Этот масштаб рассчитывается по величине $l_e^{\max}$ и характерному значению скорости во входном сечении U (например, по максимальной или среднерасходной скорости):

$$\tau = C_\tau l_e^{\max}/U, \tag{2.9}$$

где $C_\tau = 2$ — эмпирическая константа.

В сочетании с локальным определением масштаба энергонесущих вихрей l_e (2.6) такой (единый для всего рассматриваемого сечения потока) выбор масштаба времени позволяет генерировать близкие по форме к реальным (вытянутые вдоль по потку в пристеночной части и практически изотропные во внешней области пограничного слоя) вихревые структуры.

Значения эмпирических констант, входящих в (2.6)–(2.9) были получены на основе расчетов развитого течения в плоском канале и в пограничном слое на плоской пластине, результаты которых представлены в главе 4. Отметим, что предварительные расчеты, выполненные с использованием различных значений констант C_l и C_τ, лежащих в достаточно широкой окрестности их "оптимальных" значений, показали, что чувствительность полученных решений к этим константам невелика.

В качестве примера "синтетической турбулентности", создаваемой разработанным генератором, на рис. 2.3 представлено мгновенное поле скорости, построенное с его помощью по профилям скорости и характеристик турбулентности, полученным из RANS расчета установившегося течения в плоском канале с использованием $k-\omega$ SST модели Ментера. Как видно из сравнения этого поля с соответствующим "эталонным" полем, полученным из LES расчета данного течения (детали расчета см. в разделе 4.1), как форма, так и характерные размеры синтетических турбулентных структур, построенных с помощью предлагаемого метода, весьма близки к соответствующим "реальным" (разрешенным с помощью LES) характеристикам турбулентности.

Для проверки корректности метода генерации синтетической турбулентности приведем сравнение профилей скорости и напряжений Рейнольдса, полученных осреднением синтетического поля скорости, с заданными профилями скорости и напряжений Рейнольдса на рис. 2.4 (рассматривается течение в плоском канале). Видно, что синтетическое поле скорости, создаваемое разработанным методом, полностью воспроизводит заданные профили скорости и напряжений Рейнольдса.

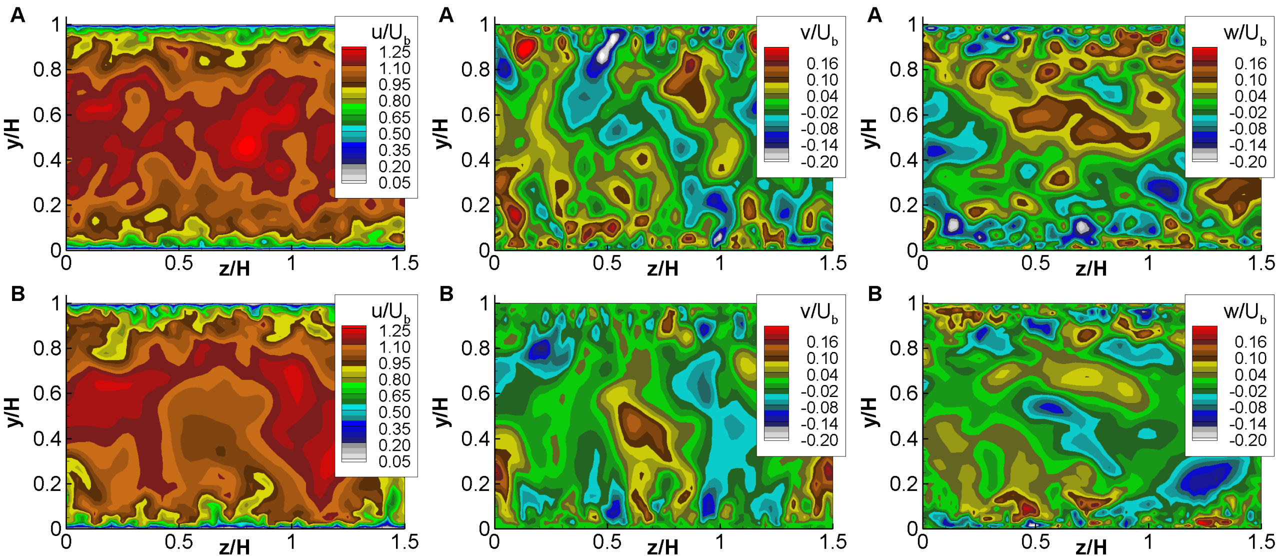

Рис. 2.3. Синтетическое (верхний ряд) и “эталонное” (нижний ряд) поля компонент скорости в поперечном сечении плоского канала при $Re_{tau} = 400$.

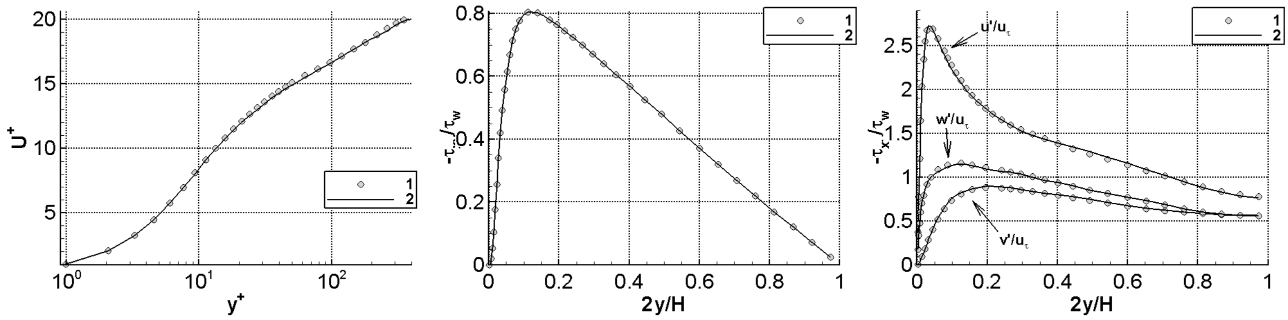

Рис. 2.4. Профили скорости и напряжений Рейнольдса, полученные осреднением синтетического поля скорости (1) в сравнении с заданными профилями скорости и напряжений Рейнольдса (2). Течение в плоском канале при $Re_\tau = 400$.

При применении разработанного метода для задания входных граничных условий в случае использования дифференциальных подсеточных моделей необходимо задание также и мгновенных полей характеристик подсеточной турбулентности. Для этого возможно использование следующего способа: подсеточная вязкость на входной границе задается по алгебраической подсеточной модели (см. раздел 3.1.3), а в случае применения подсеточных моделей с двумя уравнениями для k_{sgs} и ω_{sgs} или ε_{sgs}, удельная плотность диссипации кинетической энергии подсеточной турбулентности ω_{sgs} задается равной соответствующей величине в RANS области, а кинетическая энергия подсеточной турбулентности k_{sgs} определяется по формуле

$$k_{sgs} = \omega_{sgs} \min\left(\nu_{RANS}, \nu_{sgs}\right). \tag{2.10}$$

2.2. Комбинированный RANS-LES подход к моделированию турбулентных течений

В последние годы широкое распространение получили гибридные RANS-LES подходы к моделированию турбулентности, в которых в части расчетной области для моделирования турбулентности используется метод моделирования крупных вихрей, а в остальной части расчетной области — нестационарный RANS подход. Высокая эффективность таких подходов объясняется тем, что RANS требует сравнительно небольших вычислительных ресурсов, но не обеспечивает приемлемой точности для отрывных течений, а LES дает хорошие результаты как для присоединенных, так и для отрывных течений, но требует чрезвычайно больших вычислительных затрат для присоединенного пограничного слоя (см. напр. [96]).

Гибридные RANS-LES методы могут быть разделены на два класса: с явным внесением флуктуаций скорости при переходе от RANS к LES и без него. Наиболее популярны методы без явного внесения флуктуаций скорости, к числу которых относится и метод моделирования отсоединенных вихрей DES [93], являющийся исторически первым и наиболее часто используемым гибридным RANS-LES подходом к моделированию турбулентности.

Гибридные RANS-LES подходы без явного внесения флуктуаций скорости при переходе от RANS к LES значительно проще в реализации и удобнее в использовании. Они хорошо зарекомендовали себя для расчета течений с обширной отрывной зоной. Так, уже первые работы по расчету методом отсоединенных вихрей отрывного обтекания крылового профиля при закритическом угле атаки [87] и обтекания круглого цилиндра [105] показали хорошее соответствие результатов расчетов экспериментальным данным, подтвердив перспективность такого подхода.

Однако, при применении указанного класса гибридных RANS-LES подходов возникает следующая проблема: переключение между RANS и LES режимами происходит не мгновенно, присутствует область, в которой модель функционирует как нечто среднее между RANS и LES. Кроме того, так как в RANS решении отсутствуют флуктуации гидродинамических величин, в LES области они должны быть тем или иным образом созданы. Это происходит не мгновенно, поэтому в области переключения между RANS и LES режимами уровень разрешенных турбулентных флуктуаций не соответствует реальному течению. В целом проблема переключения между RANS и LES проиллюстрирована на рис. 2.5.

При расчете течений с обширной отрывной зоной область переключения между RANS и LES занимает лишь небольшую по сравнению с размером отрывной зоны область, а неточность решения в этой области не приводит к заметному ухудшению решения. В случае же расчета течений с неглубоким отрывом вся область отрыва, для которой целесообразно использование LES, может попасть в эту область переключения, что приводит к значительному

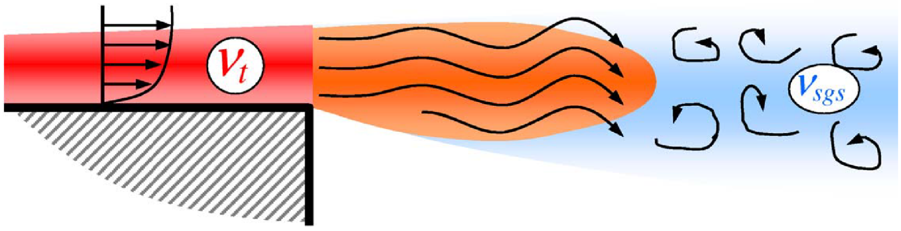

Рис. 2.5. Проблема переключения между RANS и LES режимами в гибридных подходах без явного внесения пульсаций скорости на входе в LES область

отклонению результатов. Так, например, при расчете методом DES обтекания задней кромки крылового профиля с отрывной зоной малого размера [67] расчетное положение точки отрыва существенно отличалось от экспериментальных данных, а для расчета обтекания выпуклости на плоской пластине различными вариантами метода DES [51] положение точки присоединения и профиль средней скорости в области отрыва существенно отличаются от результатов эксперимента.

Отмеченная проблема гибридных RANS-LES методов без явного внесения флуктуаций скорости при переходе от RANS к LES стимулировала развитие другого класса гибридных RANS-LES подходов, в котором флуктуации скорости искусственно вносятся при переходе от RANS к LES. Такие подходы предполагают явное выделение LES области, в литературе они называются "встроенным LES" (Embedded LES). В рамках Embedded LES в RANS и LES областях используются разные модели, а на границах областей задаются условия согласования RANS и LES решений (см. рис. 1).

Этот подход к моделированию турбулентных течений активно развивается в последние годы и нашел применение в целом ряде работ. Так, в работах [82, 84] предлагается использование RANS и LES подходов для последовательных ступеней турбомашин. В исследованиях [54, 106] был проведен зонный RANS-LES расчет обтекания задней кромки крылового профиля с применением различных методов генерации “синтетической турбулентности”. В статье [90] представлены результаты зонного RANS-LES расчета обтекания дворников ветрового стекла пассажирского самолета. В работе [53] был проведен “встроенный” LES расчет отрывного течения в трехмерном диффузоре. В статьях [76, 115] приведены результаты зонных RANS-LES расчетов внешнего обтекания многоэлементного крылового профиля и взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем. Результаты приведенных выше исследований показывают перспективность комбинированного RANS-LES подхода к моделированию турбулентных течений в том числе для присоединенных течений и течений с отрывной зоной небольшого размера.

2.3. Методика задания входных граничных условий для комбинированных RANS-LES расчетов.

В этом разделе описаны два способа применения представленного выше (раздел 2.1) генератора “синтетической турбулентности” для постановки граничных условий на входных границах при проведении расчетов турбулентных течений в рамках вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентности.

Первый (традиционный) способ состоит в следующем.

При проведении LES расчетов параметры осредненного течения на входной границе, знание которых необходимо для задания средней скорости и для генерации “синтетической турбулентности”, определяются точно также как это делается в рамках RANS походов. При использовании комбинированных RANS-LES методов расчет проводится в два этапа. Сначала выполняется RANS расчет всего течения или его части, заведомо включающей входную границу предполагаемой LES подобласти, и лишь после этого производится LES расчет, в котором поле скорости на этой границе определяется как сумма

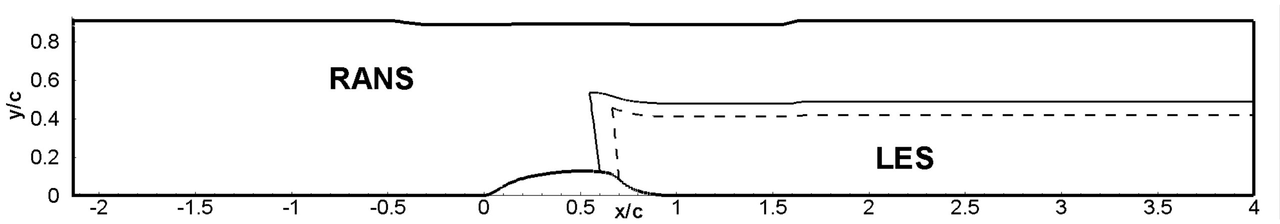

Рис. 2.6. Расположение RANS и LES подобластей при проведении расчетов с использованием перекрывающихся сеточных блоков: сплошная линия — граница “LES блока”, штриховая — граница “RANS блока”.

вектора скорости из RANS решения и синтетических флуктуаций скорости (см. соотношение (2.1)).

Второй способ, предложенный в настоящей работе для расчетов в рамках комбинированных RANS-LES подходов, реализуется в один этап и в этом смысле является более удобным, но его применение возможно лишь в том случае, когда вычислительный код, с помощью которого производится расчет, допускает использование перекрывающихся многоблочных сеток. В этом случае расчетная область разбивается на перекрывающиеся сеточные блоки (см. схему на рис. 2.6), соответствующие RANS и LES подобластям (рекомендуемая глубина перекрытия подобластей составляет 10-20 ячеек сетки). При этом, наряду с граничными условиями на входной границе LES подобласти, расположенной вверх по потоку от выходной границы RANS подобласти (эти условия задаются точно также, как в описанном выше двухэтапном подходе), необходимо поставить граничные условия на выходной границе RANS подобласти. Для этой цели используется LES решение в точках этой границы на предыдущем временном шаге.

Глава 3

Основные уравнения и методы их решения

В этой главе представлены уравнения движения жидкости, описывающие рассматриваемые течения и методы их решения. В разделе 3.1 приведены осредненные по Рейнольдсу и пространственно отфильтрованные уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, а также представлено описание моделей турбулентности, используемых для замыкания этих уравнений: для RANS расчетов использовались $k-\omega$ SST модель Ментера [57] и явная алгебраическая модель напряжений Рейнольдса [59], а для LES расчетов использовалась алгебраическая модель подсеточной вязкости или же гибридный RANS-LES метод IDDES [89] с использованием $k-\omega$ SST модели Ментера в качестве базовой. В разделе 3.2 представлено описание вычислительного кода NTS, используемого в данной работе, и кратко изложены характеристики вычислительной схемы, применяемой для решения уравнений движения несжимаемой жидкости.

3.1. Основные уравнения

В данной работе рассматриваются только течения несжимаемой жидкости. Основной системой уравнений, описывающей движение жидкости, являются уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{3.1}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{V} \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V}, \tag{3.2}$$

где V — скорость, ρ — постоянное значение плотности, μ — постоянное значение динамической вязкости.

В принципе, моделирование турбулентных течений возможно путем численного решения уравнений Навье-Стокса в исходном виде, без привлечения дополнительных гипотез, методом прямого численного моделирования (DNS). Однако, такой подход требует чрезвычайно высоких вычислительных затрат, особенно для высоких значений числа Рейнольдса, так как необходимо разрешать весь спектр масштабов турбулентных пульсаций. Поэтому для практических расчетов турбулентных течений применяют два различных полуэмпирических подхода.

Первый из этих подходов — решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса. Это стационарные уравнения, записанные для средних гидродинамических величин — скорости и давления.

$$(\mathbf{V}\nabla)\,\mathbf{V} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{V} + \nabla\cdot\tau_{turb}$$

Здесь τ_{turb} — тензор напряжений Рейнольдса, $\tau_{ij} = -\rho\overline{u_i'u_j'}$, описывающий действие пульсационного движения на осредненное течение. Компоненты тензора напряжений Рейнольдса неизвестны, для их задания требуется применение той или иной модели турбулентности.

Несмотря на то, что осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса стационарны, в расчетах турбулентных течений с низкочастотной нестационарностью используются так называемые нестационарные осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (Unsteady RANS, URANS), имеющие следующий вид:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\,\mathbf{V} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{V} + \nabla\cdot\tau_{turb} \tag{3.3}$$

Второй подход к моделированию турбулентных течений — моделирование крупных вихрей, основанный на процедуре пространственной фильтрации. Применение пространственной фильтрации к уравнениям Навье-Стокса приводит к уравнению, аналогичному (3.3), в котором вместо τ_{turb} — тензора напряжений Рейнольдса стоит τ_{sgs} — тензор подсеточных напряжений, описывающий действие неразрешенных ("подсеточных") пульсаций на среднее течение и разрешенные пульсации. Аналогично случаю осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для определения подсеточных напряжений применяются соответствующие модели.

В данной работе для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса использовалась $k-\omega$ SST модель Ментера [57], а также явная алгебраическая модель рейнольдсовых напряжений [59]. Для LES расчетов применялись две модели подсеточных напряжений, принадлежащие к классу моделей турбулентной вязкости: алгебраическая модель и метод IDDES (Improved Delayed Detached Eddy Simulation) — модификация метода DES, предназначенная для LES с пристеночным моделированием. Далее следует описание этих моделей

3.1.1. $k-\omega$ SST модель Ментера

SST модель Ментера принадлежит к классу дифференциальных моделей вихревой вязкости с двумя уравнениями. Она представляет собой комбинацию $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделей, обеспечивающую сочетание лучших качеств этих моделей. Так, $k-\varepsilon$ модель хорошо зарекомендовала себя при расчете свободных и струйных сдвиговых течений, для анализа которых собственно и была предназначена ее первая версия, предложенная Харлоу [30], а $k-\omega$ модель обеспечивает существенно более точное описание пристеночных пограничных слоев [110]. С учетом этих обстоятельств Ментером [57] было предложено объединить эти модели с использованием специально сконструированной для этого эмпирической функции F_1 (см. далее), которая обеспечивает близость суммарной модели к модели $k-\varepsilon$ вдали от твердых стенок и к модели $k-\omega$

в пристеночной части потока.

В первой редакции [57] формулировка этой “гибридной” модели, записанной в величинах k (кинетическая энергия турбулентности) и ω (удельная скорость диссипации кинетической энергии турбулентности), выглядит следующим образом:

$$\frac{d(\rho k)}{dt} = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \sigma_k \mu_T \right) \nabla k \right] + P_k - \beta^* \rho \omega k \tag{3.4}$$

$$\frac{d(\rho \omega)}{dt} = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \sigma_\omega \mu_T \right) \nabla \omega \right] + \gamma \frac{\rho}{\mu_T} P_k - \beta \rho \omega^2 + \left(1 - F_1 \right) D_{k\omega} \tag{3.5}$$

Расчет генерационного члена в уравнениях переноса (3.4), (3.5) производится по формуле

$$P_k = \min\left(\mu_t S^2,\ 20\beta^* \rho k \omega \right),\ S^2 = 2 S_{ij} S_{ij},$$

а последний член в правой части уравнения переноса ω (так называемый член с перекрестной диффузией — cross-diffusion term) определяется соотношением

$$D_{k\omega} = \frac{2\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \left(\nabla k \right) \cdot \left(\nabla \omega \right)$$

Для определения турбулентной вязкости по известным значениям k и ω вместо обычного для $k - \omega$ моделей соотношения $\nu_T = \frac{k}{\omega}$ в SST модели используется выражение

$$\nu_T = \frac{a_1 k}{\max\left(a_1 \omega,\ \Omega F_2 \right)}, \tag{3.6}$$

которое ограничивает вязкость в пристеночном пограничном слое с использованием формулы Брэдшоу и позволяет избежать характерного для $k - \varepsilon$ моделей затягивания отрыва.

Эмпирическая функция F_2, входящая в (3.6), рассчитывается по формуле

$$F_2 = \tanh\left(\arg_2^2 \right),\ \arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09 \omega d_w},\ \frac{500\nu}{d_w^2 \omega} \right),$$

где d_w — расстояние до ближайшей точки твердой поверхности.

Наконец, эмпирические константы модели определяются через соответствующие константы $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделей с помощью упоминавшейся выше эмпирической "весовой" функции F_1:

$$\sigma_k = F_1\sigma_{k1} + (1-F_1)\,\sigma_{k2},\ \ \sigma_\omega = F_1\sigma_{\omega 1} + (1-F_1)\,\sigma_{\omega 2},\ \ \beta = F_1\beta_1 + (1-F_1)\,\beta_2, \tag{3.7}$$

где

$$F_1 = \tanh\left(\arg_1^4\right),$$
$$\arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d_w},\ \frac{500\nu}{d_w^2\omega}\right),\ \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{\max\left\{D_{k\omega},\ 10^{-20}\right\}d_w^2}\right].$$

Индексы "1" и "2" в (3.7) относятся соответственно к константам $k-\omega$ и $k-\varepsilon$ моделей:

$$\sigma_{k1} = 0.85,\ \sigma_{\omega 1} = 0.5,\ \beta_1 = 0.075,$$
$$\sigma_{k2} = 1.0,\ \sigma_{\omega 2} = 0.856,\ \beta_2 = 0.0828,$$

а остальные константы равны

$$\beta^* = 0.09,\ \kappa = 0.41,\ a_1 = 0.31,\ \gamma = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma_\omega\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}.$$

Граничные условия к уравнениям $k-\omega$ SST модели (3.4), (3.5) задаются следующим образом: на твердой стенке кинетическая энергия турбулентности k полагается равной нулю, а ее удельная диссипация определяется по формуле

$$\omega_w = 10\frac{6\nu}{\beta_1\Delta y_1^2},$$

где ν — молекулярная кинематическая вязкость, $\beta_1 = 0.075$, а Δy_1 — первый пристеночный шаг сетки.

На входных участках внешней границы расчетной области задается значение удельной диссипации

$$\omega_\infty = C\frac{U_\infty}{L},$$

где U_∞ и L — характерные для данного течения скоростной и линейный масштабы, а рекомендованные в [57] значения константы C лежат в диапазоне $1 \div 10$.

Что касается величины кинетической энергии турбулентности на входных границах k_∞, то она задается непосредственно (если она известна из эксперимента или определена из каких-либо иных физических соображений) либо рассчитывается по предполагаемой известной величине кинематической турбулентной вязкости на входной границе $(\nu_T)_\infty$:

$$k_\infty = (\nu_T)_\infty \omega_\infty$$

3.1.2. Явная алгебраическая модель напряжений Рейнольдса

Применяемая в данной работе явная алгебраическая модель напряжений Рейнольдса [59] использует $k-\omega$ BSL модель Ментера [57]. Уравнения для переноса k и ω в этой модели выглядят следующим образом

$$\begin{cases} \dfrac{Dk}{Dt} = \nabla\cdot\left(\left(\nu+\sigma_k\nu_t\right)\nabla k\right) + \tilde{P}_k - \beta^* k\omega \\ \dfrac{D\omega}{Dt} = \nabla\cdot\left(\left(\nu+\sigma_\omega\nu_t\right)\nabla\omega\right) + \dfrac{\gamma\omega}{k}\tilde{P}_k - \beta^*\omega^2 + \dfrac{\sigma_d}{\omega}\left(\nabla k\right)\cdot\left(\nabla\omega\right) \end{cases},$$

где генерационный член $\tilde{P}_k$ определяется с использованием ограничителя, как и в $k-\omega$ SST модели

$$\tilde{P}_k = \min\left(-\tau_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}, 10\cdot\rho\beta^* k\omega\right)$$

Константы базовой модели определяются через соответствующие константы $k-\varepsilon$ (индекс "1") и $k-\omega$ (индекс "2") ветвей BSL модели с применением весовой функции F_1

$$\sigma_k = F_1\sigma_{k1} + (1-F_1)\,\sigma_{k2}, \sigma_\omega = F_1\sigma_{\omega 1} + (1-F_1)\,\sigma_{\omega 2},$$
$$\beta = F_1\beta_1 + (1-F_1)\,\beta_2, \sigma_d = 2\,(1-F_1)\,\sigma_{\omega 2},$$
$$\sigma_{k1} = 0.5, \sigma_{k2} = 1.0, \sigma_{\omega 1} = 0.5, \sigma_{\omega 2} = 0.856,$$
$$\beta_1 = 0.075, \beta_2 = 0.0828, \beta^* = C_\mu = 0.09, \gamma = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma_\omega \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}.$$

где функция F_1 определяется как (здесь d — расстояние до ближайшей стенки)

$$F_1 = \tanh\left(\arg_1^4\right), \arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega d}, \frac{500\nu}{\omega d^2}\right), \frac{2k\omega}{d^2\,(\nabla k)\cdot(\nabla\omega)}\right].$$

Тензор напряжений Рейнольдса определяется следующим образом

$$\tau_{ij} = \overline{u_i^{'} u_j^{'}} = k\left(a_{ij} + \frac{2}{3}\delta_{ij}\right),$$

где тензор анизотропии a_{ij} представляется в виде разложения

$$a_{ij} = \beta_1 T_{1,ij} + \beta_2 T_{2,ij} + \beta_3 T_{3,ij} + \beta_4 T_{4,ij} + \beta_6 T_{6,ij}. \tag{3.8}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &T_{1,ij} = S_{ij};\ T_{2,ij} = S_{ik}S_{kj} - \frac{1}{3}II_S\delta_{ij}; \\ &T_{3,ij} = \Omega_{ik}\Omega_{kj} - \frac{1}{3}II_\Omega\delta_{ij}; T_{4,ij} = S_{ik}\Omega_{kj} - \Omega ik S_{kj}; \\ &T_{6,ij} = S_{ik}\Omega_{kl}\Omega_{lj} + \Omega_{ik}\Omega_{kl}S_{lj} - \frac{2}{3}IV\delta_{ij} - II_\Omega S_{ij}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Величины S_{ij} и Ω_{ij} в (3.9) представляют собой безразмерные тензоры скоростей деформации и завихренности осредненного течения

$$S_{ij} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \quad \Omega_{ij} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right),$$

где τ — временной масштаб с ограничителем [21]

$$\tau = \max\left(\frac{1}{C_\mu \omega}, 6 \cdot \sqrt{\frac{\nu}{C_\mu k \omega}}\right),$$

а тензорные инварианты II_S, II_Ω и IV определяются как

$$II_S = S_{ij}S_{ji},\ II_\Omega = \Omega_{ij}\Omega_{ji},\ IV = S_{ik}\Omega_{kj}\Omega_{ji}.$$

Коэффициенты тензорного разложения (3.8) определяются следующим образом

$$\beta_1 = -\frac{N}{Q},\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = -\frac{2IV}{NQ_1},\ \beta_4 = -\frac{1}{Q},\ \beta_6 = -\frac{N}{Q_1}$$

где

$$Q = \frac{N^2 - 2II_\Omega}{A_1},\ Q_1 = \frac{Q}{6}\left(2N^2 - II_\Omega\right),\ N = C_1' + \frac{9}{4}\frac{P_k}{\varepsilon},$$

а $A_1 = 1.245$ и $C_1' = \dfrac{9}{4}(C_1 - 1)$, $C_1 = 1.8$ — константы.

Величина N является корнем кубического уравнения

$$N^3 - C_1'N^2 - (2.7 \cdot II_S + 2 \cdot II_\Omega)\, N + 2C_1' II_\Omega = 0$$

и вычисляется по формуле

$$\begin{cases} N = \dfrac{C_1'}{3} + \left(P_1 + \sqrt{P_2}\right)^{\frac{1}{3}} + \operatorname{sign}\left(P_1 - \sqrt{P_2}\right)\left|P_1 - \sqrt{P_2}\right|^{\frac{1}{3}} & \text{при} \quad P_2 \geq 0 \\ N = \dfrac{C_1'}{3} + \left(P_1^2 - P_2\right)^{\frac{1}{6}} \cos\left(\dfrac{1}{3}\arccos\left(\dfrac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right)\right) & \text{при} \quad P_2 < 0 \end{cases}$$

где

$$P_1 = C_1'\left(\frac{C_1'^2}{27} + \frac{9}{20}II_S - \frac{2}{3}II_\Omega\right),\ P_2 = P_1^2 - \left(\frac{C_1'^2}{9} + \frac{9}{10}II_S + \frac{2}{3}II_\Omega\right)^3.$$

3.1.3. Алгебраическая модель подсеточной вязкости

Эта модель представляет собой модификацию модели Смагоринского со специальным выбором линейного масштаба и демпфирующим множителем Пиомелли [69]

$$\nu_{sgs} = (C_{smag}\Delta)^2 \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{y^+}{25}\right)^3\right)\right] S, \tag{3.10}$$

где $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, S_{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций, y^+ — расстояние до стенки в единицах закона стенки, Δ — подсеточный масштаб, C_{smag} — константа Смагоринского, выбранная равной 0.2. Такое значение константы Смагоринского обеспечивает наилучшее соответствие спектра, полученного при расчете затухания однородной изотропной турбулентности, закону "$\frac{5}{3}$".

Подсеточный масштаб, входящий в (3.10), определялся в соответствии с работой [89]:

$$\Delta = \min\left[\max\left(C_w d_w,\ C_w h_{\max}, h_{wn}\right), h_{\max}\right]. \tag{3.11}$$

где $h_{\max}$, h_{wn} — шаги сетки, максимальный и по нормали к стенке, $C_w = 0.15$ — эмпирическая константа. Как показано в работе [89], такой выбор Δ обеспечивает весьма точное описание пристенных течений при стандартном значении $C_{smag} = 0.2$, определенном для свободных турбулентных течений.

3.1.4. Метод Improved Delayed Detached Eddy Simulation

Гибридный RANS-LES подход к моделированию турбулентности IDDES [89] является развитием метода моделирования отсоединенных вихрей DES [101]. Метод DES основан на использовании единой модели, функционирующей как полуэмпирическая модель турбулентности для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса вблизи стенки (RANS область) и как модель подсеточных напряжений для LES расчета в области свободного течения.

В оригинальной версии метода DES [101] для достижения этой цели используется модификация модели турбулентности, основанная на замене линейного масштаба. Так, в модели Спаларта-Аллмараса [94] линейный масштаб, равный в исходной модели расстоянию до стенки, заменяется на выражение

$$l_{DES}^{SA} = \min\left(d_w,\ C_{DES}^{SA}\Delta_{\max}\right),$$

где $\Delta_{\max}$ — максимальный из шагов сетки. В модели $k-\omega$ SST Ментера модифицируется диссипативный член в уравнении переноса кинетической энергии: вместо

$$D_{RANS}^{k} = \rho\beta^{*}k\omega = \rho\frac{k^{3/2}}{l_{SST}}$$

диссипативный член имеет вид

$$D_{DES}^{k} = \rho\frac{k^{3/2}}{l_{DES}^{SST}}$$

здесь l_{SST} — линейный масштаб модели $k-\omega$ SST Ментера, $\beta^{*} = 0.09$, l_{DES}^{SST} — линейный масштаб модифицированной модели:

$$l_{DES}^{SST} = \min\left(l_{SST}, C_{DES}^{SST}\Delta\right),\ C_{DES}^{SST} = \left(1-F_1\right)C_{DES}^{k-\varepsilon} + F_1 C_{DES}^{k-\omega},$$

где F_1 — функция, переключающая между $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ ветвями модели $k-\omega$ SST Ментера.

Константы $C_{DES}^{SA} = 0.65$, $C_{DES}^{k-\varepsilon} = 0.61$ и $C_{DES}^{k-\omega} = 0.78$ определяются путем калибровки в задаче о затухании однородной изотропной турбулентности: выбор этих констант позволяет получить наилучшее согласование спектра энергии с законом “$\frac{5}{3}$” [101].

Одной из проблем, возникающих при применения метода DES в оригинальной формулировке, является значительное падение напряжений турбулентного трения в том случае, если переключение в LES режим происходит внутри пограничного слоя: в этом случае разрешенные напряжения Рейнольдса малы, так как размер шага сетки слишком большой для LES расчета пограничного слоя, а модельная часть напряжения трения тоже мала, так как модель функционирует не в RANS режиме. Такое падение трения может привести к существенным ошибкам в описании течения, вплоть до преждевременного отрыва пограничного слоя при измельчении сетки [58]. Для решения этой проблемы был предложен метод Delayed Detached Eddy Simulation (DDES) [95].

Метод DDES, отличается от оригинальной версии метода DES блокировкой переключения модели в LES режим в присоединенном пограничном слое. Линейный масштаб в этом методе определяется как

$$l_{DDES} = d_w - f_d \max\left(0,\ d_w - l_{LES}\right),\ l_{LES} = C_{DES}\Delta_{\max}$$

где f_d — эмпирическая функция, принимающая значение близкое к 0 в пограничном слое и 1 во внешнем потоке:

$$f_d = 1 - \tanh\left(\left[8r_d\right]^3\right),\ r_d = \frac{\nu + \nu_T}{\kappa^2 d_w^2 \max\left(\sqrt{U_{ij}U_{ij}},\ 10^{-10}\right)},$$

где $U_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

При таком определении линейного масштаба преждевременное переключение в LES режим внутри пограничного слоя эффективно блокируется, решая проблему падения трения в пограничном слое на мелкой сетке [95].

Линейный масштаб модели в LES режиме для метода DDES определяется как $l_{DES} = C_{DES}\Psi\Delta_{\max}$, где Ψ — поправка, компенсирующая низкорейнольдсовые члены тех RANS моделей, в которых они содержатся, например, в модели Спаларта-Аллмараса [94] (подробнее см. [95]). Без учета этой поправки подсеточная вязкость модели оказывается заниженной в случае мелкой сетки, так как низкорейнольдсовая коррекция модели турбулентности снижает подсеточную вязкость при уменьшении сетки ниже определенного размера.

При построении методов DES и DDES предполагается, что расчет присоединенного пограничного слоя производится в RANS режиме. В то же время использование этих методов для LES расчета с пристеночным моделированием (WMLES), хотя и возможно, но приводит к существенным ошибкам: например, для WMLES расчета течения в плоском канале при большом числе Рейнольдса, профиль средней скорости имеет два логарифмических участка, с правильным наклоном, но смещенных относительно друг друга (так называемый “log-layer mismatch”) [64].

Метод IDDES, являющийся дальнейшим развитием методов семейства DES, пригоден в том числе и для WMLES расчета. Этот метод совмещает DDES и дифференциальную подсеточную модель, предназначенную для LES с пристеночным моделированием. При этом в случае отсутствия турбулентных пульсаций активна DDES ветвь метода IDDES, а в случае их наличия используется WMLES ветвь этого метода.

Линейный масштаб модели в этом методе определяется как

$$l_{IDDES} = \tilde{f}_d \left(1 + f_e\right) l_{RANS} + \left(1 - \tilde{f}_d\right) l_{LES},$$

где l_{RANS} — линейный масштаб базовой RANS модели турбулентности, $l_{LES} = C_{DES}\Psi\Delta$, $\tilde{f}_d$ и f_e — эмпирические функции.

В отличие от методов DES и DDES, в этом методе для определения линейного масштаба модели в LES режиме используется другое значение Δ, явно включающее в определение расстояние до стенки, такое же как и для алгебраической модели подсеточной вязкости (3.11)

Функция $\tilde{f}_d$, обеспечивающая переключение между RANS и LES значениями линейного масштаба, определяется как

$$\tilde{f}_d = \max\left(1 - f_{dt}, f_B\right),\ f_{dt} = 1 - \tanh\left(\left[8 r_{dt}\right]^3\right),$$
$$r_{dt} = \frac{\nu_T}{\kappa^2 d_w^2 \max\left(\sqrt{U_{ij}U_{ij}},\ 10^{-10}\right)},$$

здесь f_{dt} и r_{dt} аналогичны f_d и r_d в методе DDES, отличаясь только используемым значением вязкости. Функция f_B переключает линейный масштаб между RANS и LES значениями для WMLES ветви модели и зависит от соотношения расстояния до стенки и максимального шага сетки:

$$f_B = \min\left[2\exp\left(-9\alpha^2\right),\ 1.0\right],\ \alpha = 0.25 - \frac{d_w}{h_{\max}}$$

Функция f_e обеспечивает поддержание достаточного уровня модельных напряжений в той области, где сетка недостаточно подробна для LES с разрешением пристеночной области, но модель функционирует в LES режиме. Эта функция определяется как

$$f_e = \max\left(f_{e1} - 1,\ 0\right)\Psi f_{e2},$$

$$f_{e1} = \begin{cases} 2\exp\left(-11.09\alpha^2\right), & \alpha \geq 0 \\ 2\exp\left(-9.0\alpha^2\right), & \alpha < 0 \end{cases},\ f_{e2} = 1 - \max\left(f_t,\ f_l\right).$$

Функции f_t и f_l определяются через "ламинарный" и "турбулентный" аналоги величины r_d: $f_t = \tanh\left[\left(c_t^2 r_{dt}\right)^3\right]$, $f_l = \tanh\left[\left(c_l^2 r_{dl}\right)^{10}\right]$, $r_{dl} = \frac{r_d \nu}{\nu + \nu_T}$. Константы c_t и c_l имеют значение 3.55 и 1.63 для модели Спаларта-Аллмараса и 5.0 и 1.87 для модели $k-\omega$ SST Ментера.

3.2. Численный метод решения уравнений движения и переноса характеристик турбулентности

Для численного решения уравнений движения и переноса характеристик турбулентности использовался вычислительный код NTS, описанный в работах [3, 24, 101] и примененный в многочисленных работах по моделированию турбулентных течений [87, 89, 90, 95, 101, 105]. В этом коде для расчета течений несжимаемой жидкости применяется метод Роджерса и Квака [72], базирующийся на комбинации классического приема введения искусственной сжимаемости Яненко-Чорина [15] для отыскания стационарного решения исходных уравнений и схемы расщепления разностей векторов газодинамических потоков для гиперболических систем уравнений.

Далее в этом разделе описаны введение искусственной сжимаемости в уравнения движения жидкости и переход к криволинейной системе координат (раздел 3.2.1), расщепление якобианов невязких потоков на части, отвечающие положительным и отрицательным собственным числам (раздел 3.2.2), "базовая" неявная итерационная схема расчета нестационарных течений (раздел 3.2.3) и основанные на ней алгоритмы решения стационарных (раздел 3.2.4) и нестационарных (раздел 3.2.5) задач, а также способ расчета правой части разностной схемы, основанный на схеме расщепления разностей векторов газодинамических потоков (раздел 3.2.6).

3.2.1. Введение искусственной сжимаемости и запись уравнений через векторы потоков в декартовой и криволинейной системах координат

В соответствии с методом искусственной сжимаемости [15] при отыскании стационарного решения системы уравнений (3.1), (3.2) уравнение неразрывности этой системы (3.1) заменяется следующим уравнением:

$$\frac{1}{\rho\beta}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \tag{3.12}$$

в которое искусственно добавлен член с производной по времени от давления[1]. Благодаря этому, система уравнений (3.12), (3.2) в отсутствие вязких членов, как и уравнения динамики идеального сжимаемого газа, становится системой гиперболического типа, для интегрирования которой могут быть

[1] Величина β, входящая в множитель при этом члене, представляет собой коэффициент искусственной сжимаемости. Во всех расчетах в данной работе этот коэффициент был равен $10U_0^2$, где U_0 — характерное значение скорости в рассматриваемой задаче.

использованы различные противопоточные методы (метод расщепления матрицы коэффициентов, методы расщепления векторов потоков и методы расщепления разностей векторов потока).

Полученная таким образом система уравнений может быть записана в следующей условной векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(v)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{g} - \mathbf{g}^{(v)}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathbf{h} - \mathbf{h}^{(v)}\right) = 0, \tag{3.13}$$

где

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} - \tag{3.14}$$

вектор основных переменных, а $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})$ и $\left(\mathbf{f}^{(v)}, \mathbf{g}^{(v)}, \mathbf{h}^{(v)}\right)$ — векторы невязких и вязких газодинамических потоков в направлении x, y и z, определяемые формулами

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \beta\rho u \\ u^2 + \dfrac{p}{\rho} \\ uv \\ uw \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \beta\rho v \\ vu \\ v^2 + \dfrac{p}{\rho} \\ vw \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \beta\rho w \\ wu \\ wv \\ w^2 + \dfrac{p}{\rho} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}^{(v)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}^{(v)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^{(v)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{z‘} \end{bmatrix},$$

После перехода в (3.13) от исходных декартовых координат (t, x, y, z) к новым пространственным переменным (вычислительным координатам) (τ, ξ, η, ζ)

$$\begin{cases} \tau = t \\ \xi = \xi(x, y, z) \\ \eta = \eta(x, y, z) \\ \zeta = \zeta(x, y, z) \end{cases}, \qquad (3.15)$$

в результате которого каждый блок криволинейной расчетной сетки в исходной расчетной области отображается на равномерную разностную сетку с шагами $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ в прямоугольном параллелепипеде в расчетных координатах, эта система уравнений записывается в следующей строго консервативной форме

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\mathbf{q}}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\mathbf{F} - \mathbf{F}^{(v)}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mathbf{G} - \mathbf{G}^{(v)}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\mathbf{H} - \mathbf{H}^{(v)}\right) = 0, \qquad (3.16)$$

где $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ и $\mathbf{F}^{(v)}, \mathbf{G}^{(v)}, \mathbf{H}^{(v)}$ — соответственно векторы невязких и вязких газодинамических потоков в направлениях ξ, η и ζ, определяемые формулами

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \beta\rho U \\ uU + \frac{l_x}{\rho}p \\ vU + \frac{l_y}{\rho}p \\ wU + \frac{l_z}{\rho}p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \beta\rho V \\ uV + \frac{l_x}{\rho}p \\ vV + \frac{l_y}{\rho}p \\ wV + \frac{l_z}{\rho}p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \beta\rho W \\ uW + \frac{l_x}{\rho}p \\ vW + \frac{l_y}{\rho}p \\ wW + \frac{l_z}{\rho}p \end{bmatrix} \qquad (3.17)$$

$$\mathbf{F}^{(v)} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 \\ l_x\tau_{xx} + l_y\tau_{xy} + l_z\tau_{xz} \\ l_x\tau_{yx} + l_y\tau_{yy} + l_z\tau_{yz} \\ l_x\tau_{zx} + l_y\tau_{zy} + l_z\tau_{zz} \end{bmatrix}, \ \mathbf{G}^{(v)} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 \\ m_x\tau_{xx} + m_y\tau_{xy} + m_z\tau_{xz} \\ m_x\tau_{yx} + m_y\tau_{yy} + m_z\tau_{yz} \\ m_x\tau_{zx} + m_y\tau_{zy} + m_z\tau_{zz} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^{(v)} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 \\ n_x\tau_{xx} + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{xz} \\ n_x\tau_{yx} + n_y\tau_{yy} + n_z\tau_{yz} \\ n_x\tau_{zx} + n_y\tau_{zy} + n_z\tau_{zz} \end{bmatrix}, \qquad (3.18)$$

Величина J представляет собой якобиан преобразования координат

$$J = \frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{x_\xi\left(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta\right) + x_\eta\left(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta\right) + x_\zeta\left(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi\right)},$$

а $\xi_x = \frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\xi_y = \frac{\partial\xi}{\partial y}$ и т.д. — метрические коэффициенты преобразования (3.15), которые могут быть рассчитаны по формулам

$$\begin{aligned} \xi_x &= J\left(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta\right), \quad \eta_x = J\left(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta\right), \quad \zeta_x = J\left(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi\right), \\ \xi_y &= J\left(z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta\right), \quad \eta_y = J\left(z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta\right), \quad \zeta_y = J\left(z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi\right), \\ \xi_z &= J\left(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta\right), \quad \eta_z = J\left(x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta\right), \quad \zeta_z = J\left(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi\right). \end{aligned}$$

Отметим, что без потери общности можно считать, что шаги разностной сетки в вычислительных координатах одинаковы и равны единице

$$\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1.$$

В этом случае величина $\frac{1}{J}$ имеет смысл объема ячейки разностной сетки в физических координатах (x, y, z), который в дальнейшем будет обозначаться как Vol

$$\frac{1}{J} = Vol.$$

Вектор $\mathbf{l} = l_x\mathbf{i} + l_y\mathbf{j} + l_z\mathbf{k}$ с компонентами

$$l_x = \frac{\xi_x}{J},\ l_y = \frac{\xi_y}{J},\ l_z = \frac{\xi_z}{J} \tag{3.19}$$

представляет собой вектор, нормальный к той грани ячейки, на которой постоянна вычислительная координата ξ, причем его модуль равен площади указанной грани. Аналогичный смысл для граней с постоянными значениями η и ζ имеют векторы

$$\mathbf{m} = m_x\mathbf{i} + m_y\mathbf{j} + m_z\mathbf{k},\ m_x = \frac{\eta_x}{J},\ m_y = \frac{\eta_y}{J},\ m_z = \frac{\eta_z}{J} \tag{3.20}$$

и

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k},\ n_x = \frac{\zeta_x}{J},\ n_y = \frac{\zeta_y}{J},\ n_z = \frac{\zeta_z}{J} \tag{3.21}$$

соответственно.

Именно таким способом, т.е. через объем и площади граней ячеек (нормали к граням $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$) рассчитываются якобиан и метрические коэффициенты преобразования в рамках конечно-объемного численного метода, реализованного в NTS коде.

Величины U, V и W представляют собой контравариантные компоненты вектора скорости, определяемые соотношениями

$$U = l_x u + l_y v + l_z w$$
$$V = m_x u + m_y v + m_z w$$
$$W = n_x u + n_y v + n_z w.$$

Наконец, входящие в (3.18) компоненты тензора вязких напряжений рассчитываются по формулам

$$\begin{gathered}
\tau_{xx} = 2\mu J\left(l_x\frac{\partial u}{\partial \xi} + m_x\frac{\partial u}{\partial \eta} + n_x\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right), \\
\tau_{yy} = 2\mu J\left(l_y\frac{\partial v}{\partial \xi} + m_y\frac{\partial v}{\partial \eta} + n_y\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right), \\
\tau_{zz} = 2\mu J\left(l_z\frac{\partial w}{\partial \xi} + m_z\frac{\partial w}{\partial \eta} + n_z\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right), \\
\tau_{xy} = \tau_{yx} = J\mu\left(l_y\tfrac{\partial u}{\partial \xi} + m_y\tfrac{\partial u}{\partial \eta} + n_y\tfrac{\partial u}{\partial \zeta} + l_x\tfrac{\partial v}{\partial \xi} + m_x\tfrac{\partial v}{\partial \eta} + n_x\tfrac{\partial v}{\partial \zeta}\right), \\
\tau_{xz} = \tau_{zx} = J\mu\left(l_z\tfrac{\partial u}{\partial \xi} + m_z\tfrac{\partial u}{\partial \eta} + n_z\tfrac{\partial u}{\partial \zeta} + l_x\tfrac{\partial w}{\partial \xi} + m_x\tfrac{\partial w}{\partial \eta} + n_x\tfrac{\partial w}{\partial \zeta}\right), \\
\tau_{yz} = \tau_{zy} = J\mu\left(l_z\tfrac{\partial v}{\partial \xi} + m_z\tfrac{\partial v}{\partial \eta} + n_z\tfrac{\partial v}{\partial \zeta} + l_y\tfrac{\partial w}{\partial \xi} + m_y\tfrac{\partial w}{\partial \eta} + n_y\tfrac{\partial w}{\partial \zeta}\right).
\end{gathered} \tag{3.22}$$

3.2.2. Якобианы невязких потоков, собственные числа и собственные векторы, расщепление якобианов на части, отвечающие положительным и отрицательным собственным числам

Будем рассматривать векторы невязких потоков **F**, **G**, **H** (3.17) как функции вектора консервативных переменных **Q** (3.14) и векторов нормалей (матричных коэффициентов) **l**, **m**, **n** (3.19)-(3.21). Тогда якобианы этих векторов потоков определяются соотношениями

$$A = A_\xi = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}},\ B = A_\eta = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}},\ C = A_\zeta = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{Q}}. \tag{3.23}$$

В (3.23) и далее для якобианов, наряду с традиционными обозначениями матриц A, B, C используются также обозначения A_ξ, A_η, A_ζ соответственно, что позволяет существенно сократить запись весьма громоздких формул.

Конкретные выражения для якобианов, получаемые прямым дифференцированием (3.23) приведены в многочисленных статьях и монографиях. Они могут быть записаны в следующей единой форме:

$$A_\kappa = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_x \rho\beta & \kappa_y \rho\beta & \kappa_z \rho\beta \\ \dfrac{\kappa_x}{\rho} & V_\kappa + \kappa_x u & \kappa_y u & \kappa_z u \\ \dfrac{\kappa_y}{\rho} & \kappa_x v & V_\kappa + \kappa_y v & \kappa_z v \\ \dfrac{\kappa_z}{\rho} & \kappa_x w & \kappa_y w & V_\kappa + \kappa_z w \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Здесь $\kappa = \xi, \eta, \zeta$ для матриц A, B, C (A_ξ, A_η, A_ζ) соответственно, через V_κ обозначены контравариантные компоненты скорости

$$V_\xi = U,\ V_\eta = V,\ V_\zeta = W,$$

а κ_x, κ_y, κ_z — “универсальные” обозначения метрические коэффициентов

$$\begin{aligned} \kappa_x = l_x,\ \kappa_y = l_x,\ \kappa_z = l_z \quad &\text{при } \kappa = \xi \\ \kappa_x = m_x,\ \kappa_y = m_x,\ \kappa_z = m_z \quad &\text{при } \kappa = \xi \\ \kappa_x = n_x,\ \kappa_y = n_x,\ \kappa_z = n_z \quad &\text{при } \kappa = \xi \end{aligned}$$

Матрицы A_κ (3.24) имеют следующие собственные числа

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= V_\kappa + a_\kappa \\ \lambda_2 &= V_\kappa - a_\kappa \\ \lambda_1 &= \lambda_4 = V_\kappa, \end{aligned} \tag{3.25}$$

где a_κ — “искусственная скорость звука” (скорость распространения малых возмущений) для направлений $\kappa = \xi$, η или ζ, определяемая формулой

$$a_\kappa = \sqrt{V_\kappa^2 + \beta\left(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2\right)}.$$

Используемое при построении разностной схемы расщепления разностей векторов потоков разложение якобианов A_κ на части, отвечающие положительным и отрицательным собственным числам (3.25), осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} &A_\kappa = A_\kappa^+ + A_\kappa^-, \\ &A_\kappa^+ = R_\kappa \Lambda_{A_\kappa}^+ L_\kappa,\ A_\kappa^- = R_\kappa \Lambda_{A_\kappa}^- L_\kappa,\ \kappa = \xi, \eta, \zeta, \end{aligned}$$

где диагональные матрицы $\Lambda_{A_\kappa}^+$ и $\Lambda_{A_\kappa}^-$ составлены соответственно из положительных и отрицательных собственных чисел якобианов (3.25):

$$\begin{gathered} \Lambda_{A_\kappa}^+ = diag\left\{\lambda_m^+\right\},\ \Lambda_{A_\kappa}^- = diag\left\{\lambda_m^-\right\}, \\ \lambda_m^+ = \tfrac{\lambda_m + |\lambda_m|}{2},\ \lambda_m^- = \tfrac{\lambda_m - |\lambda_m|}{2},\ m = 1, 2, 3, 4, \end{gathered}$$

а R_κ и L_κ — матрицы, составленные из правых собственных векторов матрицы A_κ, как из столбцов, и из левых собственных векторов, как из строк.

Выражения для всех элементов матриц R_κ и L_κ могут быть найдены, например, в работах [73, 74]. Однако, можно показать, что для расчета матриц A_κ^+ и A_κ^- необходимо знание лишь двух первых (отвечающих собственным числам $\lambda_1 = V_\kappa + a_\kappa$ и $\lambda_2 = V_\kappa - a_\kappa$) правых и левых собственных векторов. Соответствующие формулы для вычисления элементов A_κ^+ и A_κ^-, имеют вид

- Если $V_\kappa \geq 0$, то

$$\begin{gathered}
(A_\kappa^+)_{m,n} = r_m^{(1)} (\lambda_1 - V_\kappa) \, l_n^{(1)} - r_m^{(2)} \min\{V_\kappa, V_\kappa - \lambda_2\} \, l_n^{(2)} + V_\kappa \delta_{mn}, \\
(A_\kappa^-)_{m,n} = r_m^{(2)} \min\{0, \lambda_2\} \, l_n^{(2)}, \\
m, n = 1, 2, 3, 4;
\end{gathered} \tag{3.26}$$

- Если $V_\kappa < 0$, то

$$\begin{gathered}
(A_\kappa^+)_{m,n} = r_m^{(1)} \min\{0, \lambda_1\} \, l_n^{(1)}, \\
(A_\kappa^-)_{m,n} = r_m^{(2)} (\lambda_2 - V_\kappa) \, l_n^{(2)} - r_m^{(1)} \min\{V_\kappa, V_\kappa - \lambda_1\} \, l_n^{(1)} + V_\kappa \delta_{mn}, \\
m, n = 1, 2, 3, 4;
\end{gathered} \tag{3.27}$$

Здесь δ_{mn} — символ Кронекера, а $r_m^{(1)}$, $r_m^{(2)}$, $l_n^{(1)}$, $l_n^{(2)}$ — компоненты 1-го и 2-го правого и левого собственных векторов матрицы A_κ, которые определяются соотношениями [74]

$$\mathbf{r}^{(1)} = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} \\ r_2^{(1)} \\ r_3^{(1)} \\ r_4^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\beta a_\kappa^2} \begin{bmatrix} \beta a_\kappa \\ u\,(V_\kappa + a_\kappa) + \beta \kappa_x \\ v\,(V_\kappa + a_\kappa) + \beta \kappa_y \\ w\,(V_\kappa + a_\kappa) + \beta \kappa_z \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}^{(2)} = \begin{bmatrix} r_1^{(2)} \\ r_2^{(2)} \\ r_3^{(2)} \\ r_4^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta a_\kappa \\ u\,(V_\kappa - a_\kappa) + \beta \kappa_x \\ v\,(V_\kappa - a_\kappa) + \beta \kappa_y \\ w\,(V_\kappa - a_\kappa) + \beta \kappa_z \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{l}^{(1)} = \left[l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, l_3^{(1)}, l_4^{(1)}\right] = \left[a_\kappa - V_\kappa, \beta\kappa_x, \beta\kappa_y, \beta\kappa_z\right],$$
$$\mathbf{l}^{(2)} = \left[l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, l_3^{(2)}, l_4^{(2)}\right] = \left[-a_\kappa - V_\kappa, \beta\kappa_x, \beta\kappa_y, \beta\kappa_z\right].$$

3.2.3. Базовая неявная итерационная схема расчета нестационарных течений

Пусть n — номер шага интегрирования по времени, а $\tau^n = t^n$ — соответствующий этому номеру момент времени ($\Delta t^n = t^n - t^{n-1}$ — величина шага интегрирования).

Будем считать, что в моменты времени t^{n-1} и t^n дискретное решение исходных уравнений (3.16) известно. Для определения этого решения на $n+1$ временном слое, то есть, при $\tau = t^{n+1}$ проинтегрируем уравнения (3.16) по ячейкам разностной сетки в вычислительных координатах, записывая газодинамические потоки на новом временном слое (неявная схема). С учетом того, что шаги разностной сетки в вычислительных координатах $\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1$, в результате получим следующую "базовую" разностную схему

$$Vol_{i,j,k}\left(\frac{\delta\mathbf{Q}}{\delta\tau}\right)_{i,j,k}^{n+1} + \left(\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2,j,k} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2,j,k}\right)^{n+1} - \left(\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2,j,k}^{(v)} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2,j,k}^{(v)}\right)^{n+1} +$$
$$+ \left(\hat{\mathbf{G}}_{i,j+1/2,k} - \hat{\mathbf{G}}_{i,j-1/2,k}\right)^{n+1} - \left(\hat{\mathbf{G}}_{i,j+1/2,k}^{(v)} - \hat{\mathbf{G}}_{i,j-1/2,k}^{(v)}\right)^{n+1} +$$
$$+ \left(\hat{\mathbf{H}}_{i,j,k+1/2} - \hat{\mathbf{H}}_{i,j,k-1/2}\right)^{n+1} - \left(\hat{\mathbf{H}}_{i,j,k+1/2}^{(v)} - \hat{\mathbf{H}}_{i,j,k-1/2}^{(v)}\right)^{n+1} = 0,$$
$$2 \le i \le NI-1,\ 2 \le j \le NJ-1,\ 2 \le k \le NK-1. \quad (3.28)$$

Здесь через величины со "шляпками" $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{F}}^{(v)}$, $\hat{\mathbf{G}}$, и т.д. обозначены вычислительные газодинамические потоки через грани ячейки расчетной сетки, способ расчета которых определяет рассматриваемую схему (см. 3.2.6), а через $\frac{\delta\mathbf{Q}}{\delta\tau}$ обозначена разностная аппроксимация производной от вектора консервативных переменных по времени.

С введением операторов центральных разностей относительно центра ячейки δ_ξ, δ_η, δ_ζ:

$$\delta_\xi f_{i,j,k} = f_{i+1/2,j,k} - f_{i-1/2,j,k},\ \delta_\eta f_{i,j,k} = f_{i,j+1/2,k} - f_{i,j-1/2,k},$$
$$\delta_\zeta f_{i,j,k} = f_{i,j,k+1/2} - f_{i,j,k-1/2}$$

схема (3.28) может быть записана в следующем виде:

$$Vol\left(\frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta \tau}\right)^{n+1} + \left(\delta_\xi \hat{\mathbf{F}} + \delta_\eta \hat{\mathbf{G}} + \delta_\zeta \hat{\mathbf{H}}\right) - \left(\delta_\xi \hat{\mathbf{F}}^{(v)} + \delta_\eta \hat{\mathbf{G}}^{(v)} + \delta_\zeta \hat{\mathbf{H}}^{(v)}\right) = 0.$$

Для аппроксимации производной по времени в (3.28) используются разности "назад" первого или второго порядка точности:

$$Vol\left(\frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta \tau}\right)^{n+1} = \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t^{n+1}} \tag{3.29}$$

или

$$Vol\left(\frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta \tau}\right)^{n+1} = \frac{a_{t1}\mathbf{Q}^{n+1} + a_{t2}\mathbf{Q}^n + a_{t3}\mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t^{n+1}}, \tag{3.30}$$

где

$$a_{t1} = \frac{2\Delta t^{n+1} + \Delta t^n}{\Delta t^{n+1} + \Delta t^n},\ a_{t2} = \frac{\Delta t^{n+1} + \Delta t^n}{\Delta t^n},\ a_{t3} = \frac{\left(\Delta t^{n+1}\right)^2}{\left(\Delta t^{n+1} + \Delta t^n\right)\Delta t^n}.$$

Формула (3.29) используется при расчете стационарных течений методом установления по времени, а (3.30) — при расчете нестационарных течений, в частности при моделировании турбулентности в рамках вихреразрешающих подходов (DNS, LES, гибридные RANS-LES подходы).

3.2.4. Алгоритм решения стационарных задач

Расчет стационарных течений осуществляется методом установления по времени, т.е. как предел интегрирования уравнений (3.12), (3.2) при $\tau \to \infty$. При этом каждый шаг интегрирования по времени "базовой" неявной разностной схемы (3.28) представляет собой глобальную итерацию, а величина Δt^{n+1} является итерационным параметром.

Поскольку схема (3.28) является нелинейной вследствие нелинейности векторов вычислительных потоков $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{F}}^{(v)}$ и т.д. относительно вектора консервативных переменных $\mathbf{Q}$, она предварительно линеаризуется относительно приращения $\mathbf{Q}$ на шаге по времени

$$\Delta\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n}. \tag{3.31}$$

В самом общем случае схема, полученная после линеаризации входящих в (3.28) вычислительных потоков на гранях ячеек относительно приращений $\Delta\mathbf{Q}^{n+1}$ (3.31) может быть представлена в следующей форме:

$$LHS^{n}\Delta\mathbf{Q}^{n+1} = -\mathbf{RHS}^{n}, \quad \mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^{n} + \Delta\mathbf{Q}^{n+1}. \tag{3.32}$$

Оператор правой части $\mathbf{RHS}^n$ в (3.32) содержит пространственные разности газодинамических потоков на известном n-м временном слое

$$\mathbf{RHS}^{n} = \left(\delta_\xi\hat{\mathbf{F}} + \delta_\eta\hat{\mathbf{G}} + \delta_\zeta\hat{\mathbf{H}}\right) - \left(\delta_\xi\hat{\mathbf{F}}^{(v)} + \delta_\eta\hat{\mathbf{G}}^{(v)} + \delta_\zeta\hat{\mathbf{H}}^{(v)}\right),$$

а оператор левой части LHS^n (“стабилизирующий оператор”)

$$LHS^{n} = \frac{Vol}{\Delta t^{n+1}}I + \left(\frac{\partial\mathbf{RHS}}{\partial\mathbf{Q}}\right)^{n}$$

включает члены, связанные с производной по времени (I — единичная матрица), и члены, возникающие в результате приближенной линеаризации оператора правой части, записанного на $(n+1)$-м временном слое.

В реализованных в NTS коде алгоритмах оператор левой части неявной схемы (3.32) имеет следующую структуру на 7-точечном шаблоне в операторной записи:

$$LHS = D + XM1 + XP1 + YM1 + YP1 + ZM1 + ZP1, \tag{3.33}$$

где D — диагональный оператор:

$$(D\Delta\mathbf{Q})_{i,j,k} = D_{i,j,k}\Delta\mathbf{Q}_{i,j,k},$$

а остальные операторы представляют собой операторы “сдвига”. В частности, $XM1$ — это оператор сдвига влево по индексу i (по направлению ξ) на 1 узел

$$(XM1\Delta\mathbf{Q})_{i,j,k} = am1_{i,j,k}\Delta\mathbf{Q}_{i-1,j,k},$$

$XP1$ — аналогичный оператор сдвига по индексу i вправо

$$(XP1\Delta\mathbf{Q})_{i,j,k} = ap1_{i,j,k}\Delta\mathbf{Q}_{i+1,j,k},$$

а операторы $YM1$, $YP1$, $ZM1$, $ZP1$ — аналогичные операторы сдвига по индексу j (по направлению η) и по индексу k (по направлению ζ) соответственно. Здесь $am1$ — матрица коэффициентов при $\Delta\mathbf{Q}$ в узле $(i-1,j,k)$, то есть сдвинутом на 1 шаг “влево” относительно центрального узла по индексу i, а $ap1$ — аналогичная матрица коэффициентов для узла, сдвинутого на 1 шаг “вправо” по тому же направлению.

Схема приближенной факторизации по пространственным направлениям с диагональным преобладанием (схема DDADI)

Схема DDADI получается в результате следующей замены (приближенной факторизации) общего стабилизирующего оператора LHS (3.33)

$$\begin{aligned} & LHS = D + XM1 + XP1 + YM1 + YP1 + ZM1 + ZP1 \to \\ & \quad \to (D + XM1 + XP1)\, D^{-1}\, (D + YM1 + YP1)\, D^{-1}\, (D + ZM1 + ZP1)\,. \end{aligned}$$

Соответствующая схема в дробных шагах может быть записана следующим образом

$$\begin{gathered} (D + XM1 + XP1)^n\, \Delta\mathbf{Q}^{*} = -\mathbf{RHS}^n \\ (D + YM1 + YP1)^n\, \Delta\mathbf{Q}^{**} = D\Delta\mathbf{Q}^{*} \\ (D + ZM1 + ZP1)^n\, \Delta\mathbf{Q}^{***} = D\Delta\mathbf{Q}^{**} \\ \mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n + \Delta\mathbf{Q}^{n+1} \end{gathered} \tag{3.34}$$

Очевидно, что на каждом дробном шаге схема (3.34) реализуется при помощи экономичного алгоритма трехточечной векторной прогонки. Действительно, например, на первом дробном шаге необходимо решить следующую систему разностных уравнений относительно компонент вектора $\Delta\mathbf{Q}^*$

$$am1_{i,j,k}\Delta\mathbf{Q}^*_{i-1,j,k}+Di,j,k\Delta\mathbf{Q}^*_{i,j,k}+ap1_{i,j,k}\Delta\mathbf{Q}^*_{i+1,j,k} = -\mathbf{RHS}^n_{i,j,k},\ i = 2,\ldots,NI-1,$$

что может быть сделано с помощью трехточечных векторных прогонок вдоль сеточных линий $i = var$ для всех пар индексов (j,k) в интервале $2 \leq j \leq NJ-1$, $2 \leq k \leq NK-1$.

По структуре схема DDADI (3.34) очень близка к стандартной схеме приближенной факторизации по пространственным переменным, однако, в отличие от этой схемы, на любом дробном шаге схемы DDADI в диагональном члене D учитывается вклад от производных по всем пространственным направлениям. Это позволяет существенно повысить устойчивость счета, а также значительно уменьшить чувствительность скорости сходимости к величине шага интегрирования по времени.

Метод релаксации Гаусса-Зейделя по линиям (метод LGSR)

Пусть для определенности линии сетки, вдоль которых осуществляется релаксация, это линии семейства $j = var$ ($\eta = var$). Тогда схема LGSR может быть записана в следующем виде

$$\begin{gathered}
(D+XM1+YM1+YP1+ZM1))^n\,\Delta\mathbf{Q}^{n+1/2} = -\mathbf{RHS}\left(\mathbf{Q}^n\right)\\
\mathbf{Q}^{n+1/2} = \mathbf{Q}^n + \Delta\mathbf{Q}^{n+1/2}\\
(D+XP1+YM1+YP1+ZP1))^{n+1/2}\,\Delta\mathbf{Q}^{n+1} = -\mathbf{RHS}\left(\mathbf{Q}^{n+1/2}\right)\\
\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^{n+1/2} + \Delta\mathbf{Q}^{n+1}.
\end{gathered}\tag{3.35}$$

Рассмотрим реализацию схемы (3.35) на дробных шагах. На первом дробном шаге (3.35) необходимо решать следующую систему линейных разностных уравнений относительно компонент вектора $\Delta\mathbf{Q}^{n+1/2}$:

$$\begin{aligned}bm1_{i,j,k}\Delta\mathbf{Q}_{i,j-1,k} + D_{i,j,k}\Delta\mathbf{Q}_{i,j,k} + bp1_{i,j,k}\Delta\mathbf{Q}_{i,j+1,k}+\\ + am1_{i,j,k}\Delta\mathbf{Q}_{i-1,j,k} + cm1_{i,j,k}\Delta\mathbf{Q}_{i,j,k-1} = -\mathbf{RHS}\left(\mathbf{Q}^n\right)_{i,j,k},\\ 2 \le i \le NI-1,\ 2 \le j \le NJ-1,\ 2 \le k \le NK-1.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Если при решении этой системы осуществлять обход расчетной области в плоскости (ξ, η) в направлении возрастания суммарного индекса $(i+k)$, то значения величин $\Delta\mathbf{Q}_{i-1,j,k}$, $\Delta\mathbf{Q}_{i,j,k-1}$ будут известны и решение (3.36) сводится к последовательному решению следующих одномерных систем ($2 \le i \le NI-1$, $2 \le k \le NK-1$, $(i+k)$ увеличивается):

$$\begin{aligned}bm1\Delta\mathbf{Q}_{j-1} + D\Delta\mathbf{Q}_j + bp1\Delta\mathbf{Q}_{j+1} =\\ -\mathbf{RHS}\left(\mathbf{Q}^n\right) - am1\Delta\mathbf{Q}_{i-1} - cm1\Delta\mathbf{Q}_{k-1},\ 2 \le j \le NJ-1,\end{aligned} \tag{3.37}$$

для чего, как видно из их структуры, может быть использован алгоритм трехточечной векторной прогонки.

На втором дробном шаге схемы (3.35) обход области в плоскости (ξ, η) осуществляется в направлении убывания суммарного индекса $(i+k)$, и аналогичные (3.37) системы линейных уравнений относительно вектора $\Delta\mathbf{Q}^{n+1}$, которые надо решить на этом шаге, имеют вид ($2 \le i \le NI-1$, $2 \le k \le NK-1$, $(i+k)$ убывает):

$$\begin{aligned}bm1\Delta\mathbf{Q}_{j-1} + D\Delta\mathbf{Q}_j + bp1\Delta\mathbf{Q}_{j+1} =\\ -\mathbf{RHS}\left(\mathbf{Q}^{n+1/2}\right) - ap1\Delta\mathbf{Q}_{i+1} - cp1\Delta\mathbf{Q}_{k+1},\ 2 \le j \le NJ-1,\end{aligned}$$

Очевидно, что это также может быть сделано с помощью трехточечных векторных прогонок.

Таким образом, реализация метода релаксации Гаусса-Зейделя по линиям (3.35), как и реализация схемы DDADI (3.34), осуществляется трехточечными векторными прогонками. При этом, как видно из (3.35), эта схема требует на каждом шаге по времени (глобальной итерации) “двойного” расчета правых частей, $\mathbf{RHS}\left(\mathbf{Q}^n\right)$ и $\mathbf{RHS}\left(\mathbf{Q}^{n+1/2}\right)$, что приводит к существенному увеличению вычислительных затрат на шаг по сравнению с DDADI. Однако, при решении большинства задач это увеличение затрат с лихвой компенсируется значительно более высокой скоростью сходимости к стационарному решению.

Совершенно аналогичным образом могут быть построены и схемы с релаксацией по линиям сетки $\xi = var$ и $\zeta = var$, а также схемы, в которых способ обхода области в плоскости, нормальной к линиям релаксации, отличен от описанного выше, т.е. в направлении роста или убывания суммарного индекса. В NTS коде предусмотрена возможность задания в файле исходных данных управляющих параметров, которые позволяют в каждом сеточном блоке изменять как тип используемой неявной разностной схемы (LGSR или DDADI), так и направление релаксации и способ обхода расчетной области в рамках схемы LGSR.

3.2.5. Алгоритмы расчета нестационарных течений

Схема (3.28) в принципе неприменима для расчета нестационарных течений несжимаемой жидкости, поскольку в уравнение неразрывности системы (3.12) добавлен искусственный член с производной по времени от давления (искусственная сжимаемость), искажающий нестационарное решение. Роджерс и Квак [72–74] предложили решить эту проблему путем введения в нестационарные уравнения динамики несжимаемой жидкости дополнительных членов с производными по так называемому псевдовремени θ и отыскания решения нестационарной задачи на каждом шаге по физическому времени с помощью внутренних итераций по псевдовремени с использованием разностной схемы, аналогичной (3.28). Однако, численные эксперименты, проведенные при решении широкого круга задач о течении несжимаемой жидкости с использованием такой схемы как самими авторами идеи [72–74], так и в СПбГПУ с использованием NTS кода [3], показали, что во всех случаях наиболее высокая скорость сходимости внутренних итераций имеет место при бесконечно большом шаге по псевдовремени $\Delta\theta$, что, по существу, исключает этот параметр из итерационного процесса.

Получаемая в результате (то есть при $\Delta\theta \to \infty$) "базовая" неявная итерационная схема для расчета нестационарных течений несжимаемой жидкости может быть записана в следующем виде

$$Vol \cdot I_s \cdot \left(\frac{\delta \mathbf{q}}{\delta \tau}\right)^{n+1,s+1} + \left(\delta_\xi \hat{\mathbf{F}} + \delta_\eta \hat{\mathbf{G}} + \delta_\zeta \hat{\mathbf{H}}\right)^{n+1,s+1} - \left(\delta_\xi \hat{\mathbf{F}}^{(v)} + \delta_\eta \hat{\mathbf{G}}^{(v)} + \delta_\zeta \hat{\mathbf{H}}^{(v)}\right)^{n+1,s+1} = 0, \quad (3.38)$$

где $(s+1)$ — номер "новой" итерации на $(n+1)$ шаге по физическому времени, а I_S — диагональная матрица вида

$$I_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

введение которой исключает в системе (3.13) член с производной по времени от давления в уравнении неразрывности, т.е. искусственную сжимаемость.

Таким образом, неявная схема Роджерса-Квака для расчета нестационарных течений (3.38), в отличие от схемы для решения стационарных задач (3.32), в явном виде искусственную сжимаемость не использует. Следует, однако, подчеркнуть, что в неявной форме она в этой схеме все же присутствует, поскольку аппроксимация пространственных производных от невязких потоков в (3.38) производится так же, как и в схеме (3.32) для расчета стационарных течений, то есть опирается на гиперболические свойства системы уравнений (3.13), приобретаемые ей благодаря введению искусственной сжимаемости (см. раздел 3.2.2).

3.2.6. Расчет правой части

Правые части неявных разностных схем (3.32) и (3.28), предназначенных для расчета стационарных и нестационарных течений соответственно, имеют следующий вид:

$$\mathbf{RHS}^{n}_{i,j,k} = \left(\delta_\xi \hat{\mathbf{F}} + \delta_\eta \hat{\mathbf{G}} + \delta_\zeta \hat{\mathbf{H}}\right)^{n}_{i,j,k} - \left(\delta_\xi \hat{\mathbf{F}}^{(v)} + \delta_\eta \hat{\mathbf{G}}^{(v)} + \delta_\zeta \hat{\mathbf{H}}^{(v)}\right)^{n}_{i,j,k}.$$

и

$$\mathbf{RHS}^{n+1,s}_{i,j,k} = \left[Vol\left(\frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta \tau}\right)\right]^{n+1,s} + \left(\delta_\xi \hat{\mathbf{F}} + \delta_\eta \hat{\mathbf{G}} + \delta_\zeta \hat{\mathbf{H}}\right)^{n+1,s}_{i,j,k} - \left(\delta_\xi \hat{\mathbf{F}}^{(v)} + \delta_\eta \hat{\mathbf{G}}^{(v)} + \delta_\zeta \hat{\mathbf{H}}^{(v)}\right)^{n+1,s}_{i,j,k}.$$

В обоих случаях они содержат простые симметричные (относительно центра ячейки) разности векторов вычислительных потоков (невязких и вязких) на гранях ячеек, например,

$$\left(\delta_\xi \hat{\mathbf{F}}\right)_{i,j,k} = \hat{\mathbf{F}}_{i+1/2,j,k} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2,j,k}; \quad \left(\delta_\eta \hat{\mathbf{G}}\right)_{i,j,k} = \hat{\mathbf{G}}_{i,j+1/2,k} - \hat{\mathbf{G}}_{i,j-1/2,k}; \quad .$$

Поэтому пространственные аппроксимации правой части рассматриваемых схем полностью определяются способом расчета векторов потоков на гранях ячейки. Ниже представлено подробное описание таких способов в рамках семейства противопоточных, центрально-разностных и гибридных схем, реализованных в NTS коде.

Расчет невязких потоков

В оригинальной версии схемы Роджерса-Квака [72, 75] для расчета вычислительных невязких потоков на гранях ячейки на эти грани интерполируются непосредственно векторы потоков, определенные в целых узлах сетки. В отличие от этого, вариант схемы, реализованный в NTS-коде, базируется на MUSCL-подходе (Monotone Upstream-corrected Scheme for Conservation Laws), в рамках которого интерполяция на грани ячейки проводится для основных переменных, по которым затем рассчитываются векторы потоков, зависящие от основных переменных нелинейным образом.

Интерполяция осуществляется для следующего вектора неконсервативных переменных

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

и проводится с учетом "длин дуг" сетки в физическом пространстве, что является чрезвычайно важным для повышения реальной точности схем повышенного порядка аппроксимации при использовании неравномерных разностных сеток.

Пусть для определенности рассматривается сеточная линия семейства $\xi = var$ (индекс $I = var$) и грань $(i - 1/2, j, k)$ двух ячеек разностной сетки с центрами в узлах $(i - 1, j, k)$ и (i, j, k). Опуская в дальнейшем индексы j и k, обозначим длину дуги в физической плоскости между узлами i и $(i - 1)$ через $\Delta l_{i,i-1}$. Очевидно, что

$$\Delta l_{i,i-1} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}.$$

С использованием введенных обозначений, интерполяционные формулы, определяющие значения переменных $\mathbf{q}$ непосредственно слева ($\mathbf{q}_L$) и справа ($\mathbf{q}_R$) от рассматриваемой грани $(i - 1/2)$ имеют вид, представленный в Таблице 3.1.

Интерполяционные формулы для переменных $(\mathbf{q}_L)_{i+1/2}$ и $(\mathbf{q}_R)_{i+1/2}$ слева

Значение слева от грани ($\mathbf{q}_L$)	Примечание
$\mathbf{q}_{i-1}$	Интерполяция 1-го порядка
$\mathbf{q}_{i-1}+\frac{1}{4}\left[(\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_{i-1})+\frac{\Delta l_{i,i-1}}{\Delta l_{i-1,i-2}}(\mathbf{q}_{i-1}-\mathbf{q}_{i-2})\right]$	Интерполяция 2-го порядка
$\mathbf{q}_{i-1}+\frac{1}{6}\left[2(\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_{i-1})+\frac{\Delta l_{i,i-1}}{\Delta l_{i-1,i-2}}(\mathbf{q}_{i-1}-\mathbf{q}_{i-2})\right]$	Интерполяция 3-го порядка
Значение справа от грани ($\mathbf{q}_R$)	**Примечание**
$\mathbf{q}_i$	Интерполяция 1-го порядка
$\mathbf{q}_i-\frac{1}{4}\left[(\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_{i-1})+\frac{\Delta l_{i,i-1}}{\Delta l_{i+1,i}}(\mathbf{q}_{i+1}-\mathbf{q}_i)\right]$	Интерполяция 2-го порядка
$\mathbf{q}_i-\frac{1}{6}\left[2(\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_{i-1})+\frac{\Delta l_{i,i-1}}{\Delta l_{i+1,i}}(\mathbf{q}_{i+1}-\mathbf{q}_i)\right]$	Интерполяция 3-го порядка

Таблица 3.1. Интерполяция переменных на грань $(i-1/2)$.

и справа от грани $(i+1/2)$ получаются из формул, приведенных в табл. 3.1 сдвигом (увеличением) индексов на 1.

Кроме того, слева от грани $i-1/2=1+1/2$ приграничной ячейки $i=2$ и справа от грани $i+1/2=NI-1/2$ приграничной ячейки $i=NI-1$ вместо формул, приведенных в табл. 3.1, используется следующая интерполяция 2-го порядка точности

$$(\mathbf{q}_L)_{i-1/2}=\frac{1}{2}(\mathbf{q}_i+\mathbf{q}_{i-1}),\ i=2;$$
$$(\mathbf{q}_R)_{i+1/2}=\frac{1}{2}(\mathbf{q}_i+\mathbf{q}_{i+1}),\ i=NI-1.$$

Интерполяция переменных $\mathbf{q}$ на грани $(j\pm 1/2)$ и $(k\pm 1/2)$, нормальные к сеточным линиям $\eta=const$ и $\zeta=const$ осуществляется совершенно аналогично.

В схеме Роджерса и Квака вычислительный поток на грани рассчитывается аналогично схеме Роу [70], однако, с учетом постоянства плотности, для несжимаемой жидкости для получения среднего значения на грани ячейки используется среднее арифметическое (для определенности будем считать, что рассматривается грань $(i-1/2)$):

$$\overline{\mathbf{q}_{i-1/2}} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{q}_L)_{i-1/2} + (\mathbf{q}_R)_{i+1/2}\right].$$

Выражение для вычислительного потока на грани ячейки в противопоточной схеме Роджерса-Квака принимает вид

$$\hat{\mathbf{F}}_{i-1/2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R\right)_{i-1/2} - \frac{1}{2}\left[A^+\left(\overline{\mathbf{q}}_{i-1/2}\right) - A^-\left(\overline{\mathbf{q}}_{i-1/2}\right)\right]\left(\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L\right)_{i-1/2}, \tag{3.40}$$

где

$$\begin{gathered}
(\mathbf{F}_L)_{i-1/2} = [(\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{l})]_{i-1/2} = \begin{bmatrix} \beta\rho U_L \\ u_L U_L + \dfrac{l_x}{\rho} p_L \\ v_L U_L + \dfrac{l_y}{\rho} p_L \\ w_L U_L + \dfrac{l_z}{\rho} p_L \end{bmatrix}, \\
(\mathbf{F}_R)_{i-1/2} = [(\mathbf{F}(\mathbf{q}_R, \mathbf{l})]_{i-1/2} = \begin{bmatrix} \beta\rho U_R \\ u_R U_R + \dfrac{l_x}{\rho} p_R \\ v_R U_R + \dfrac{l_y}{\rho} p_R \\ w_R U_R + \dfrac{l_z}{\rho} p_R \end{bmatrix},
\end{gathered} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
(U_L)_{i-1/2} &= \left(l_x u_L + l_y v_L + l_z w_L\right), \\
(U_R)_{i-1/2} &= \left(l_x u_R + l_y v_R + l_z w_R\right),
\end{aligned} \tag{3.42}$$

матрицы A^+ и A_- определяются формулами (3.26) и (3.26) а метрические коэффициенты на грани $(i-1/2)$, входящие в формулы (3.42), (3.41) и в выражения для матриц A^+ и A^-, получаются осреднением по целым узлам i и $(i-1)$.

Вычислительный поток $\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2}$, а также потоки $\hat{\mathbf{G}}_{j-1/2}$, $\hat{\mathbf{G}}_{j+1/2}$ в направлении η и $\hat{\mathbf{H}}_{k-1/2}$, $\hat{\mathbf{H}}_{k+1/2}$ в направлении ζ рассчитываются совершенно аналогично.

Описанная выше противопоточная схема применяется для расчетов турбулентных течений по методу RANS, а для проведения расчетов в рамках вихреразрешающих подходов эта схема оказывается слишком диссипативной. Поэтому при проведении расчетов в рамках DNS и LES (в том числе с пристеночным моделированием) используется низко-диссипативная симметричная (центрально-разностная) модификация метода расщепления разностей потоков, которая строится следующим образом.

Основная формула для вычисления потока на грани ячейки (3.40) может быть преобразована к виду

$$\hat{\mathbf{F}}_{i-1/2} = \hat{\mathbf{F}}^{(upw,s)}_{i-1/2} = \hat{\mathbf{F}}^{(ctr,s+1)}_{i-1/2} - d\hat{\mathbf{F}}^{(upw,s)}_{i-1/2}. \tag{3.43}$$

Обозначение $\hat{\mathbf{F}}^{(upw,s)}_{i-1/2}$ введено в (3.43) для того, чтобы подчеркнуть, что вычислительный поток соответствует противопоточной схеме (индекс “upw”) с порядком аппроксимации s (этот порядок совпадает с порядком интерполяции переменных на грань ячейки по формулам, приведенным в табл. 3.1), а величины $\hat{\mathbf{F}}^{(ctr,s+1)}_{i-1/2}$ и $d\hat{\mathbf{F}}^{(upw,s)}_{i-1/2}$ в его правой части определяются следующим образом

$$\hat{\mathbf{F}}^{(ctr,s+1)}_{i-1/2} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{F}\left(\mathbf{Q}^{(upw,s)}_L\right) + \mathbf{F}\left(\mathbf{Q}^{(upw,s)}_R\right)\right]_{i-1/2}, \tag{3.44}$$

$$d\hat{\mathbf{F}}^{(upw,s)}_{i-1/2} = \frac{1}{2}\left[A^+\left(\mathbf{Q}^{(s)}_{i-1/2}\right) - A^-\left(\mathbf{Q}^{(s)}_{i-1/2}\right) -\right]\left(\mathbf{Q}^{(upw,s)}_R - \mathbf{Q}^{(upw,s)}_L -\right)_{i-1/2} \tag{3.45}$$

и представляют собой центрально-разностную (симметричную) часть аппроксимации потока $\hat{\mathbf{F}}_{i-1/2}$ (3.40) и противопоточную (диссипативную) “добавку” к ней, соответственно.

Если в (3.43) опустить противопоточную добавку (3.45), то есть использовать для расчета вычислительного потока на грани ячейки формулу

$$\hat{\mathbf{F}}_{i-1/2} = \hat{\mathbf{F}}^{(ctr,s+1)}_{i-1/2} \tag{3.46}$$

с $\hat{\mathbf{F}}_{i-1/2}^{(ctr,s+1)}$ определяемым по (3.44), то схемы (3.28), (3.32) превращаются в схемы с центрально-разностной (симметричной) аппроксимацией невязких членов уравнений с порядком точности $(s+1)$, то есть на единицу более высоким, чем порядок точности используемых "односторонних" интерполяций переменных на грань ячейки сетки по формулам табл. 3.1. В частности, при $s=1$ использование (3.46) приводит к центрально-разностной схеме 2-ого порядка, а при $s=3$ — к центрально-разностной схеме 4-го порядка.

Расчет вязких потоков

Расчет вязких потоков на гранях ячеек $\mathbf{F}_{i-1/2}^{(v)}$, $\mathbf{F}_{i+1/2}^{(v)}$, $\mathbf{G}_{i-1/2}^{(v)}$, $\mathbf{G}_{i+1/2}^{(v)}$, $\mathbf{H}_{i-1/2}^{(v)}$, $\mathbf{H}_{i+1/2}^{(v)}$ в правых частях разностных схем (3.44), (3.28) осуществляется по формулам (3.18), (3.22) с использованием простых центрально-разностных аппроксимаций 2-ого порядка точности. При этом, как и для невязких потоков, метрические коэффициенты l_x, l_y и т.д. в центре грани, где определен вязкий поток, вычисляются путем осреднения по центрам ячеек (углам), между которыми лежит эта грань. Например, для грани $(i-1/2)$ используются формулы

$$(l_x)_{i-1/2} = \frac{1}{2}\left[(l_x)_i + (l_x)_{i-1}\right], \; (l_y)_{i-1/2} = \frac{1}{2}\left[(l_y)_i + (l_y)_{i-1}\right], \text{ и т.д.} \qquad (3.47)$$

Значение якобиана преобразования J, а также компонентов вектора скорости, входящих в выражения для компонент тензора напряжений (3.22), рассчитываются аналогично (3.47):

Наконец, разностные аппроксимации производных по нормали к грани, входящих в (3.18) и (3.22), не требуют каких-либо осреднений и имеют вид (для определенности, опять рассматривается грань $(i-1/2)$)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{i-1/2} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta \xi} = f_i - f_{i-1},$$

а аппроксимации производных по направлениям, касательным к этой грани, используют осреднение соответствующих производных, рассчитанных в целых узлах:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_{i-1/2,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i,j+1} - fi, j-1}{2\Delta\eta} + \frac{f_{i-1,j+1} - fi-1, j-1}{2\Delta\eta}\right) = \\ = \frac{1}{4}\left[(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) + (f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1})\right],$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)_{i-1/2,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i,k+1} - fi, k-1}{2\Delta\zeta} + \frac{f_{i-1,k+1} - fi-1, k-1}{2\Delta\zeta}\right) = \\ = \frac{1}{4}\left[(f_{i,k+1} - f_{i,k-1}) + (f_{i-1,k+1} - f_{i-1,k-1})\right],$$

Глава 4

Верификация метода на примере расчета “канонических” сдвиговых турбулентных течений

В этой главе приведены результаты верификации разработанного метода генерации “синтетической турбулентности” применительно к LES “канонических” турбулентных течений. В качестве верификационных тестов для оценки точности метода были выбраны как пристенные турбулентные течения: в плоском канале и в пограничном слое, так и свободное турбулентное течение в плоском слое смешения.

Результаты верификации разработанного метода на примере развитого течения в плоском канале приведены в разделе 4.1, раздел 4.2 посвящен тестированию метода применительно к турбулентному течению в пограничном слое на плоской пластине, а в разделе 4.3 рассмотрено течение в плоском слое смешения.

4.1. Развитое течение в плоском канале

4.1.1. Постановка задачи

Первым типом течения, на котором проведена калибровка и верификация предложенного метода, было развитое течение в плоском канале при трех значениях числа Рейнольдса, построенного по динамической скорости u_τ и полуширине канала δ, $Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu} = 400,\ 2000,\ 18000$, что примерно соответствует значениям числа Рейнольдса, построенного по среднерасходной скорости U_b и ширине канала H, $Re_b = 1.4 \cdot 10^4,\ 9 \cdot 10^4,\ 10^6$.

Re_τ	$N_x \times N_y \times N_z$	$\Delta x/H$	$\Delta z/H$	$\Delta y_{\min}/H$	$\Delta y_{\max}/H$	Δx^+	Δz^+	$\Delta y^+_{\min}$	$\Delta y^+_{\max}$
400	$81 \times 84 \times 61$	0.05	0.025	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	40	20	0.9	23
2000	$81 \times 118 \times 61$	0.05	0.025	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	200	100	1.0	110
18000	$81 \times 162 \times 61$	0.05	0.025	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	1800	900	1.0	980

Таблица 4.1. Параметры сеток для расчета течения в плоском канале.

Расчетная область имела размер $4H \times H \times 1.5H$ $(x \times y \times z)$, достаточный для точного воспроизведения турбулентного течения в неограниченном канале [36]. Система координат выбрана так, что течение направлено вдоль оси x.

Параметры расчетных сеток приведены в табл. 4.1. Пространственное разрешение сетки для расчета течения в канале при $Re_\tau = 400$ достаточно для проведения хорошо разрешенного LES расчета [68], тогда как для двух других вариантов осуществляется LES расчет с пристеночным моделированием (WMLES).

Были проведены следующие варианты расчета (параметры всех вариантов расчета приведены в таблице 4.2):

- "эталонный" расчет с применением периодических граничных условий в продольном направлении;
- расчет с использованием для задания входных граничных условий "синтетической турбулентности" на входной границе, созданной с помощью разработанного метода, в котором для задания осредненных полей скорости и напряжений Рейнольдса на входе использовалось осредненное решение, полученное в "эталонном" расчете;
- то же, для задания осредненных полей скорости и напряжений Рейнольдса на входе использовано RANS решение с $k - \omega$ SST моделью Ментера;
- расчет с использованием для задания входных граничных условий "син-

Код варианта	Re_τ	Граничные условия	Профили на входе
Per-400	400	Периодические	
Per-2000	2000	Периодические	
Per-18000	17000	Периодические	
SEM-400	400	Synthetic Eddy Method [33]	SST $k-\omega$
Synth-400-Per	400	Предложенный метод	Расчет Per-400
Synth-400-SST	400	Предложенный метод	SST $k-\omega$
Synth-2000-Per	2000	Предложенный метод	Расчет Per-2000
Synth-2000-SST	2000	Предложенный метод	SST $k-\omega$
Synth-18000-Per	18000	Предложенный метод	Расчет Per-18000
Synth-18000-SST	18000	Предложенный метод	SST $k-\omega$

Таблица 4.2. Параметры расчетов течения в плоском канале.

тетической турбулентности” на входной границе, созданной с помощью метода синтетических вихрей (см. 1.3, а также [33]).

Смысл второго варианта расчета, в котором для задания полей средней скорости и характеристик турбулентности используется известное “точное” решение, заключается в оценке влияния самого метода генерации “синтетической турбулентности” на точность решения. Таким образом исключается различие между RANS решением и “точным” решением, которое вносит дополнительную погрешность в случае использования его для задания полей средней скорости и напряжений Рейнольдса на входной границе.

Граничные условия были заданы следующим образом: на стенках было задано условие прилипания для скорости и условие $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ для давления, в направлении z было задано условие периодичности. В направлении x для расчетов с применением синтетической турбулентности на входе задавались условия первого рода для скорости и условия экстраполяции для давления, а на выходе задавалось постоянное давление и условия экстраполяции для скорости. В расчетах с использованием периодических условий в направлении x для поддержания расхода на постоянном уровне в уравнения движения вводится дополнительный член, обеспечивающий средний градиент давления, равный $\frac{\partial p}{\partial x} = 2\rho \frac{u_\tau^2}{H}$.

Для моделирования турбулентности использовался гибридный RANS-LES метод IDDES [89] с использованием SST $k - \omega$ модели Ментера [57] в качестве базовой RANS модели.

Шаг по времени был равен $\frac{\Delta t U_b}{H} = 0.01$, что обеспечивает выполнение условия $\frac{\Delta t U_b}{\Delta x} < 0.2$. Для получения осредненных полей производилось осреднение нестационарного решения по координате z и по времени в течение интервала $T_{avg} = 150 \frac{H}{U_b}$. В случае расчета с периодическими граничными условиями в направлении x осреднение проводилось также и по этому направлению.

4.1.2. Результаты

Результаты расчетов развитого течения в канале с периодическими граничными условиями приведены в сравнении с данными прямого численного моделирования [31, 62] на рис. 4.1–4.3. Наблюдается хорошее согласование профилей продольной компоненты скорости и касательных напряжений Рейнольдса для всех значений числа Рейнольдса, что подтверждает надежность используемого численного метода и гарантирует обоснованность выводов относительно оценки точности разработанного метода создания турбулентного контента во входном сечении канала, сделанных на основе проведенных расчетов. Профили нормальных напряжений Рейнольдса несколько отклоняются от результатов DNS при $Re_\tau = 400$ и существенно отличаются от результатов DNS при $Re_\tau = 2000$, что достаточно типично для LES расчетов с моделированием пристеночной области.

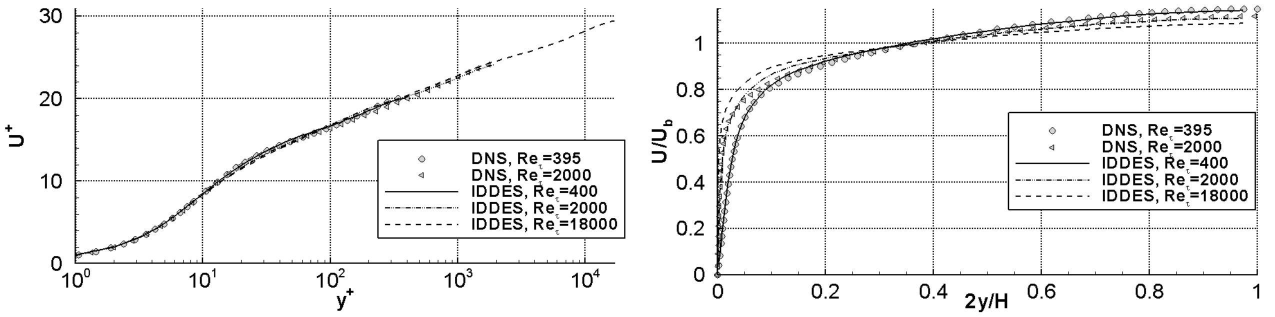

Рис. 4.1. Профили скорости течения в плоском канале в величинах закона стенки (слева) и в масштабах h и U_b (справа).

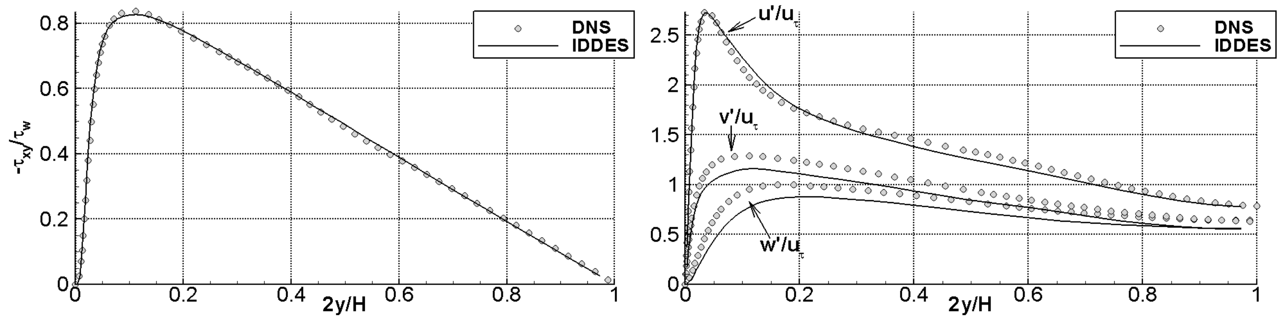

Рис. 4.2. Профили касательных (слева) и нормальных (справа) напряжений Рейнольдса для течения в канале при $Re_\tau = 400$ в сравнении с данными DNS [62].

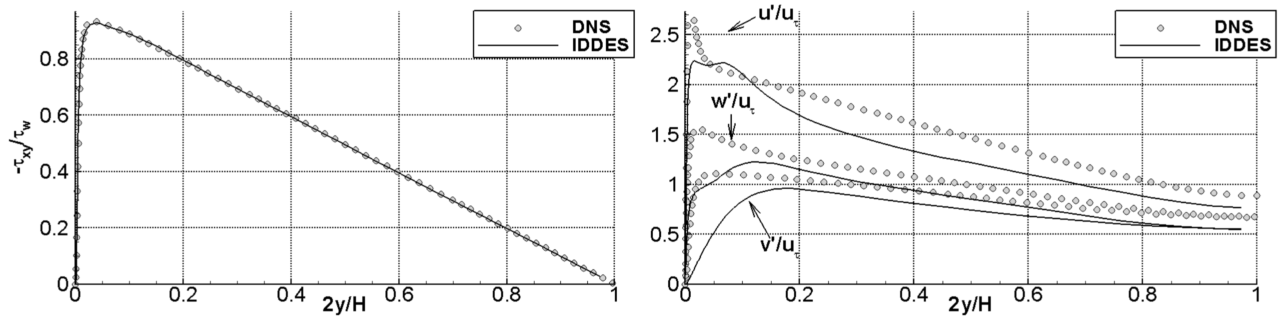

Рис. 4.3. Профили касательных (слева) и нормальных (справа) напряжений Рейнольдса для течения в канале при $Re_\tau = 2000$ в сравнении с данными DNS [31].

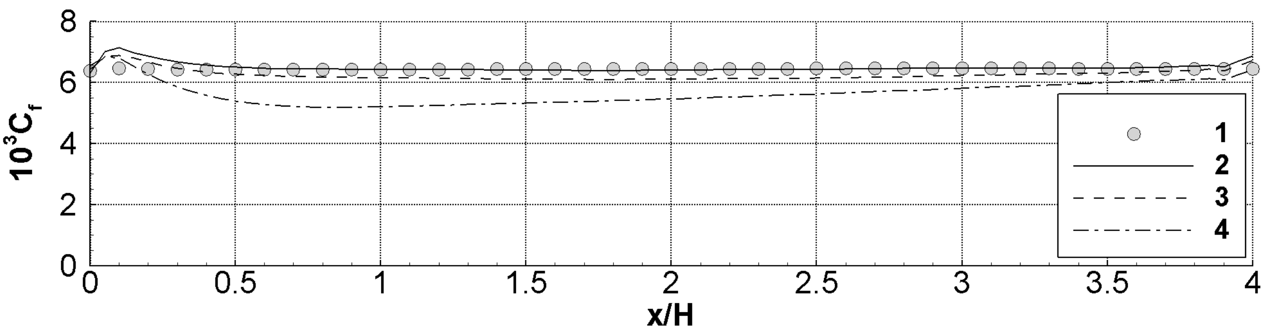

Рис. 4.4. Сравнение распределения коэффициента трения по длине канала при $Re_\tau = 400$. 1 — “эталонный” расчет, 2 — LES с использованием разработанного метода задания входных граничных условий (поля средней скорости и напряжений Рейнольдса получены из RANS с $k{-}\omega$ SST моделью), 3 — то же, поля средней скорости и напряжений Рейнольдса получены осреднением результатов “эталонного” расчета, 4 — LES с применением метода синтетических вихрей.

Далее приведены результаты расчетов течения в плоском канале с применением синтетической турбулентности для задания входных граничных условий. На рис. 4.4 приведено сравнение распределения коэффициента трения по длине канала при $Re_\tau = 400$ для вариантов расчета, отличающихся входными граничными условиями. Для вариантов расчета, в которых используется предложенный метод, отклонение коэффициента трения от “эталонного” значения, полученного в расчете с применением периодических граничных условий, невелико (не более 10%). В случае же использования метода синтетических вихрей [33] коэффициент трения существенно снижается (на $30 - 35\%$) и восстанавливается на участке длиной около $4H$. Это соответствует результатам, полученным авторами метода синтетических вихрей [33].

Для более наглядной иллюстрации поведения синтетической турбулентности, создаваемой разными методами, на рис. 4.5 приведены поля абсолютной величины завихренности на стенке канала для трех вариантов расчета — с периодическими граничными условиями и с заданием на входной границе синтетической турбулентности по методу синтетических вихрей и по предложенному методу (в качестве входного профиля использовалось решение по $k - \omega$ SST модели Ментера).

Характерной особенностью поля скорости турбулентного течения вблизи стенки являются вытянутые вдоль направления потока вихревые структуры, которые хорошо видны на рис. 4.5 для “эталонного” варианта с применением периодических граничных условий. При использовании разработанного метода эти структуры воспроизводятся в синтетическом поле скорости, которое быстро эволюционирует к физически реалистичному. Синтетическое поле скорости, создаваемое методом синтетических вихрей, не содержит таких вытянутых вдоль стенки структур в пристеночной области, а для их появления требуется некоторое расстояние. На рис. 4.5 видно, что при использовании метода синтетических вихрей флуктуации скорости существенно затухают при удалении от входной границы, а затем интенсивность турбулентных пульсаций медленно восстанавливается.

Приведенные на рис. 4.6 поля абсолютной величины завихренности в плоскости $x - y$ также показывают затухание турбулентных пульсаций с последующим восстановлением для метода синтетических вихрей и перестройку поля флуктуаций скорости без существенного их затухания для предложенного метода.

Развитие профилей осредненной скорости и напряжений Рейнольдса при удалении от входной границы приведено на рис. 4.7. При использовании разработанного метода генерации синтетической турбулентности профиль скорости практически не отклоняется от “эталонного” во всех рассмотренных сечениях, тогда как в случае использования метода синтетических вихрей профиль скорости существенно отличается от “эталонного” в сечении $x/H = 1$.

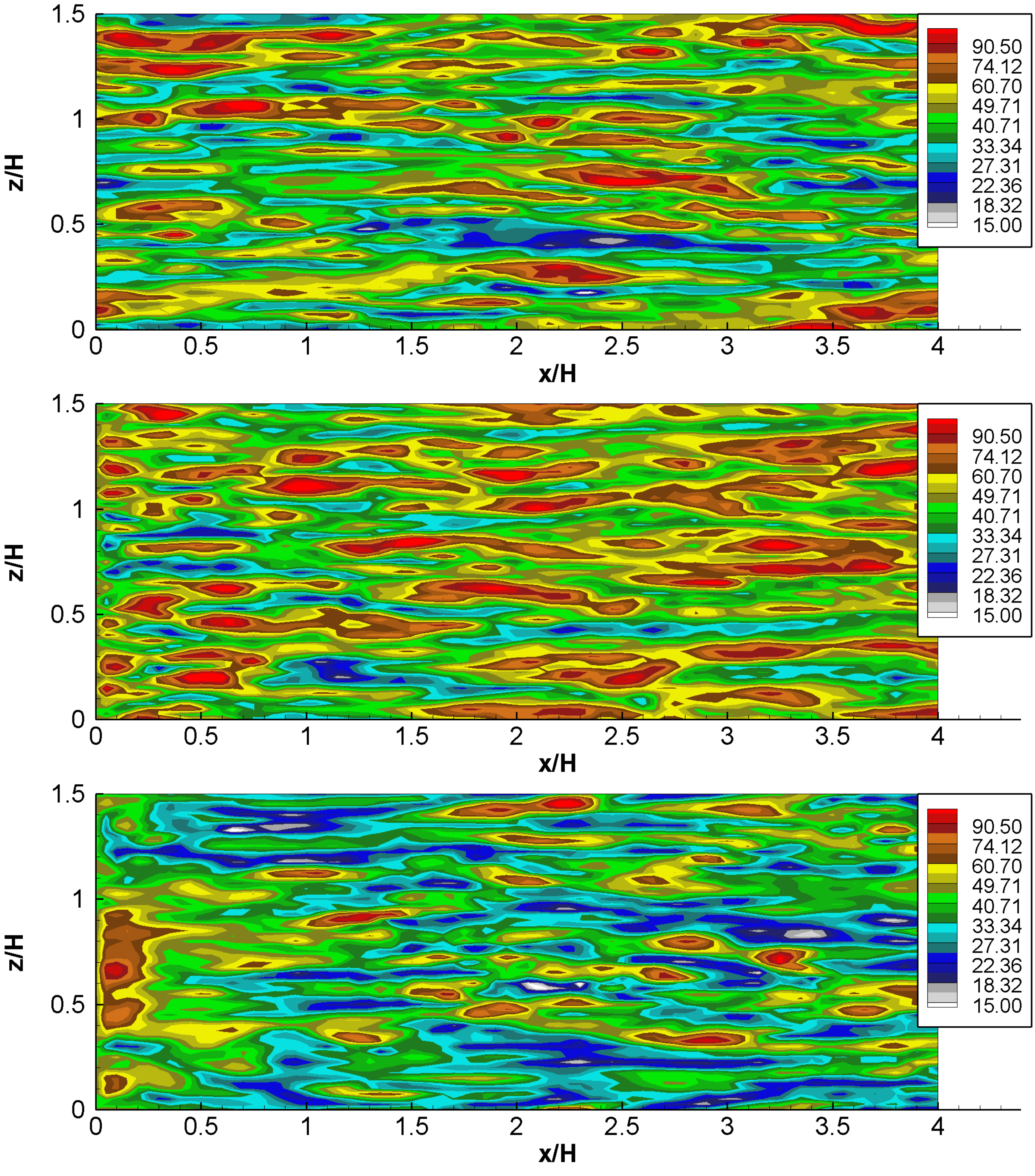

Рис. 4.5. Сравнение мгновенных полей абсолютной величины завихренности на стенке канала при $Re_\tau = 400$ для разных способов задания входных граничных условий. Сверху вниз: "эталонный" расчет, LES с использованием разработанного метода задания входных граничных условий (поля средней скорости и напряжений Рейнольдса получены из RANS с $k-\omega$ SST моделью), LES с применением метода синтетических вихрей.

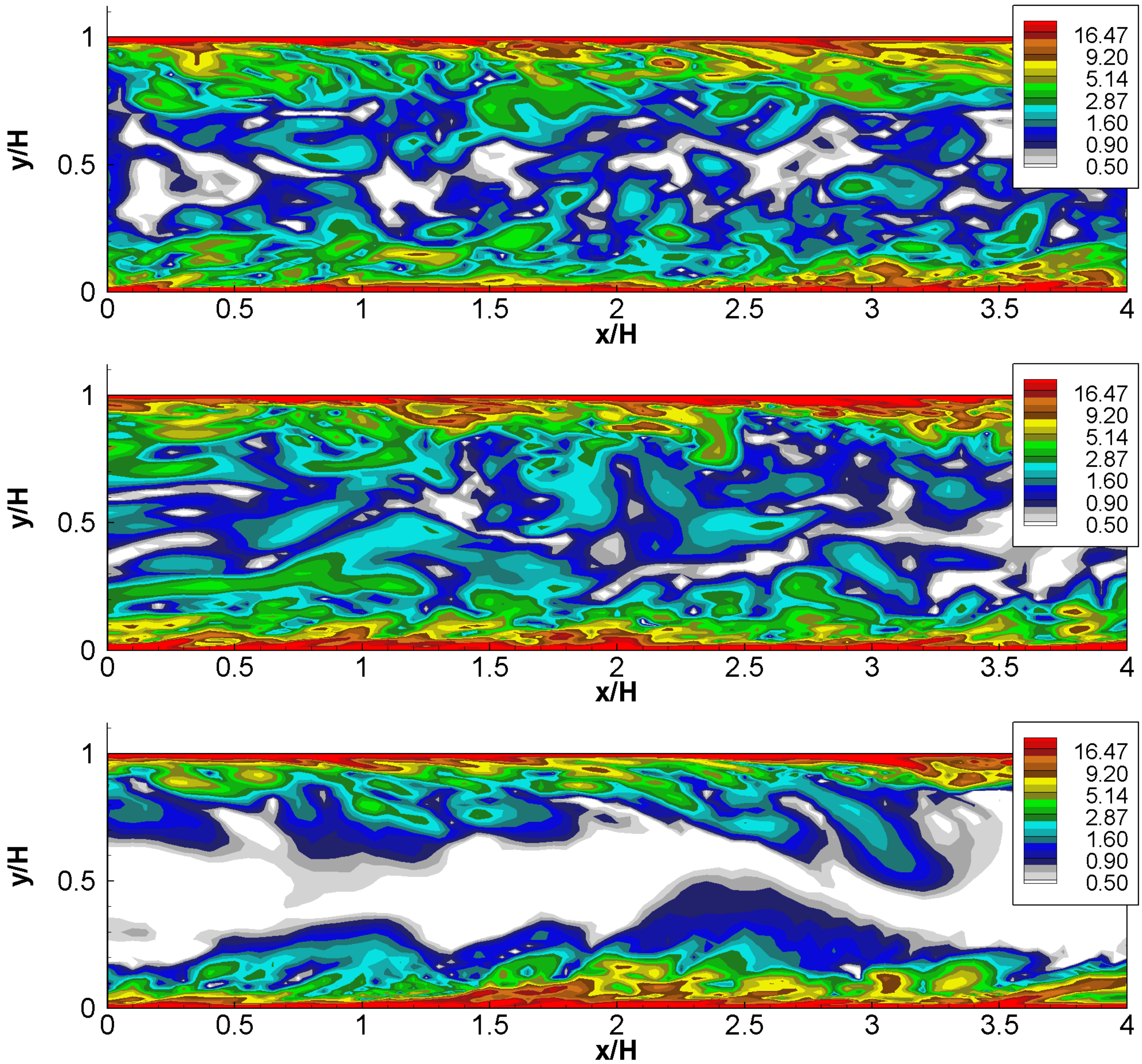

Рис. 4.6. Сравнение мгновенных полей абсолютной величины завихренности в плоскости $x-y$ при $Re_\tau = 400$ для разных способов задания входных граничных условий. Варианты расчета те же, что и для рис. 4.5.

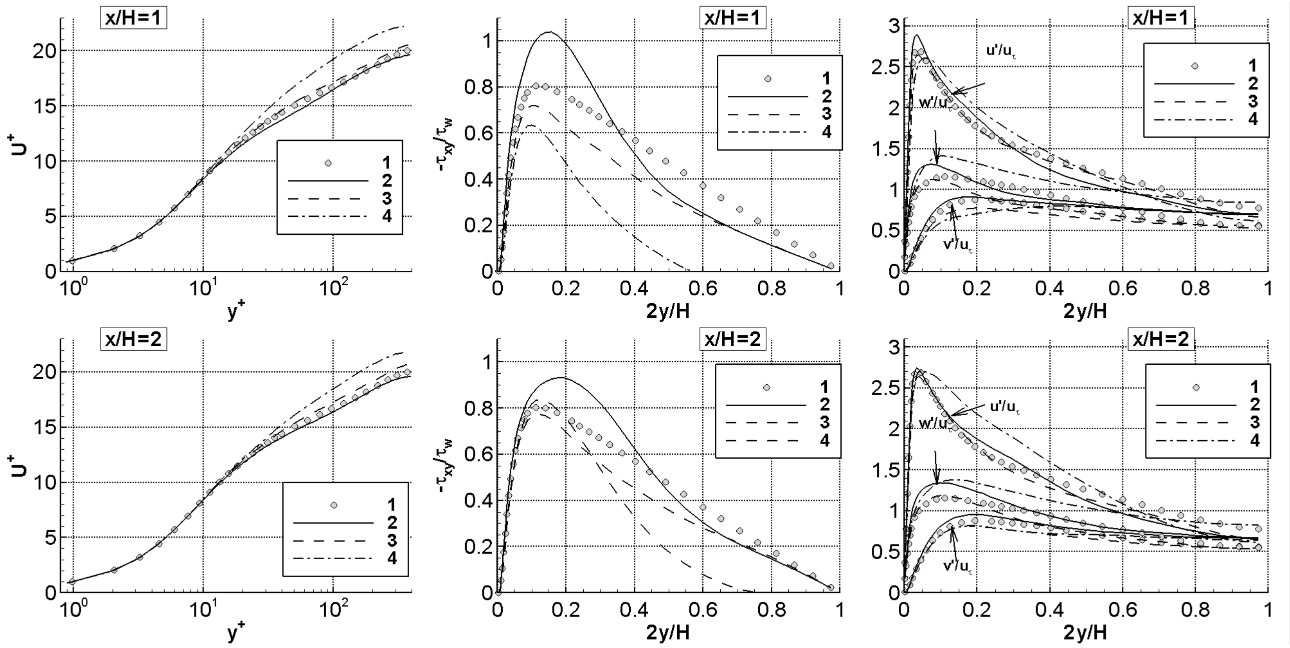

Рис. 4.7. Сравнение профилей осредненной скорости (слева), касательных (в центре) и нормальных (справа) напряжений Рейнольдса при $Re_\tau = 400$ в сечениях $x/H = 1,\ 2$. Обозначения те же, что и для рис. 4.4.

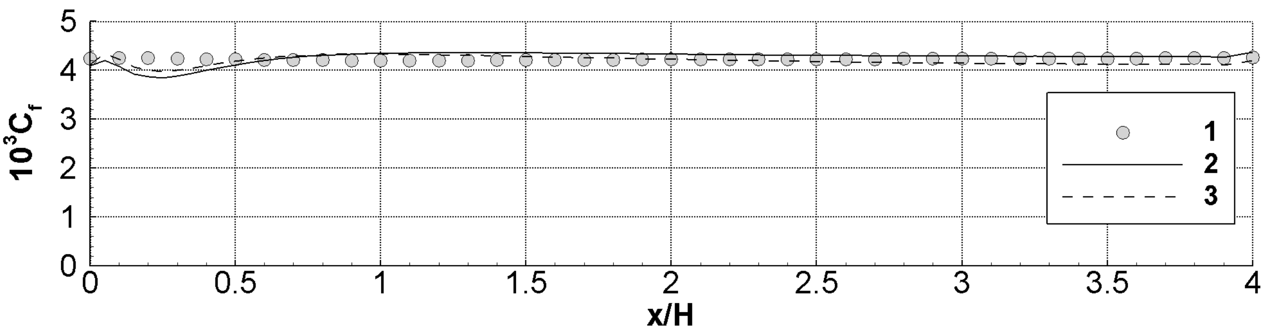

Рис. 4.8. Сравнение распределения коэффициента трения по длине канала при $Re_\tau = 2000$. 1 — "эталонный" расчет, 2 — LES с использованием разработанного метода задания входных граничных условий (поля средней скорости и напряжений Рейнольдса получены из RANS с $k{-}\omega$ SST моделью), 3 — то же, поля средней скорости и напряжений Рейнольдса получены осреднением результатов "эталонного" расчета.

Профили касательных и нормальных напряжений Рейнольдса при применении предложенного метода восстанавливаются быстрее, чем в случае использования метода синтетических вихрей для задания нестационарных входных граничных условий.

Результаты применения разработанного метода для расчета течения в плоском канале при значении числа Рейнольдса $Re_\tau = 2000$ приведены на рис. 4.8 и 4.9, а при $Re_\tau = 18000$ — на рис. 4.10 и 4.11. Наблюдается та же картина, что и для низкого значения числа Рейнольдса: отклонение трения от "эталонного" невелико, профиль осредненной скорости близок к "эталонному", а профили касательных и нормальных напряжений Рейнольдса быстро эволюционируют от RANS решения по модели $k - \omega$ SST Ментера к профилям напряжений Рейнольдса, полученным в расчете течения в канале с периодическими граничными условиями.

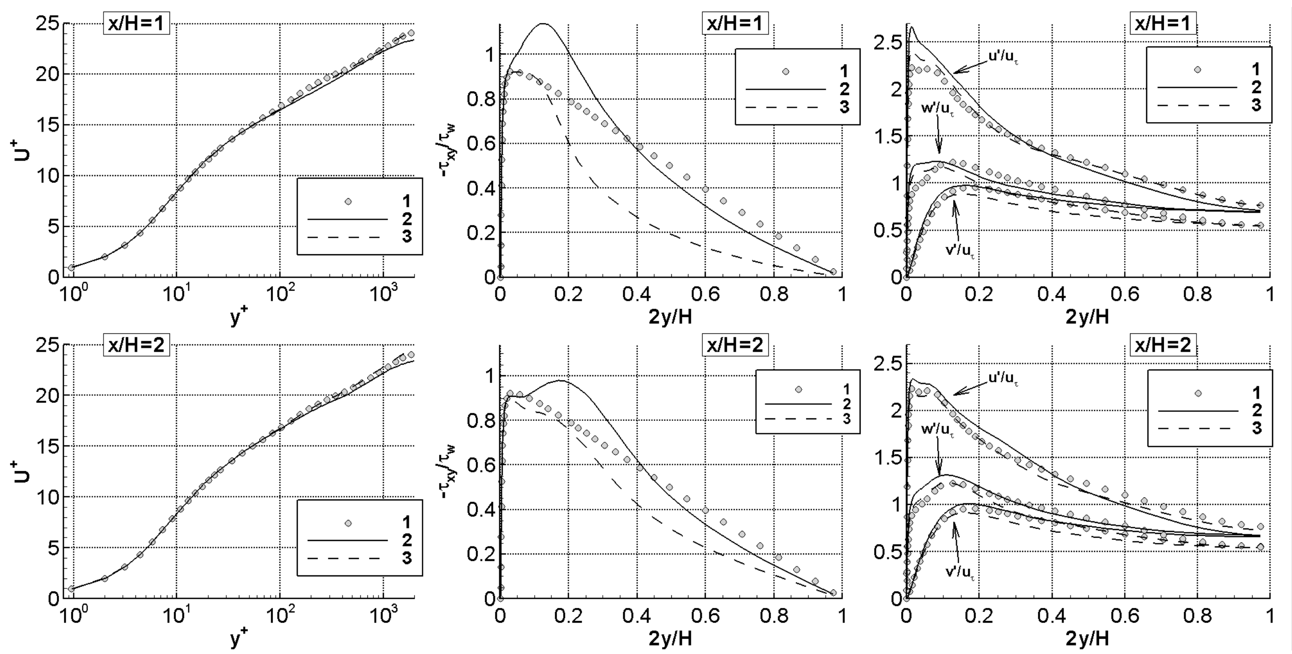

Рис. 4.9. Сравнение профилей осредненной скорости (слева), касательных (в центре) и нормальных (справа) напряжений Рейнольдса при $Re_\tau = 2000$ в сечениях $x/H = 1, 2$. Обозначения те же, что и для рис. 4.8.

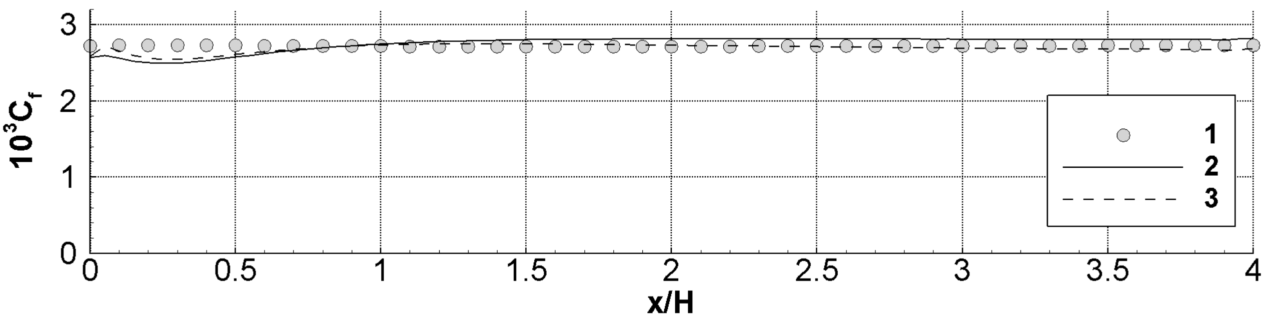

Рис. 4.10. Сравнение распределения коэффициента трения по длине канала при $Re_\tau = 18000$. Обозначения те же, что и для рис. 4.8.

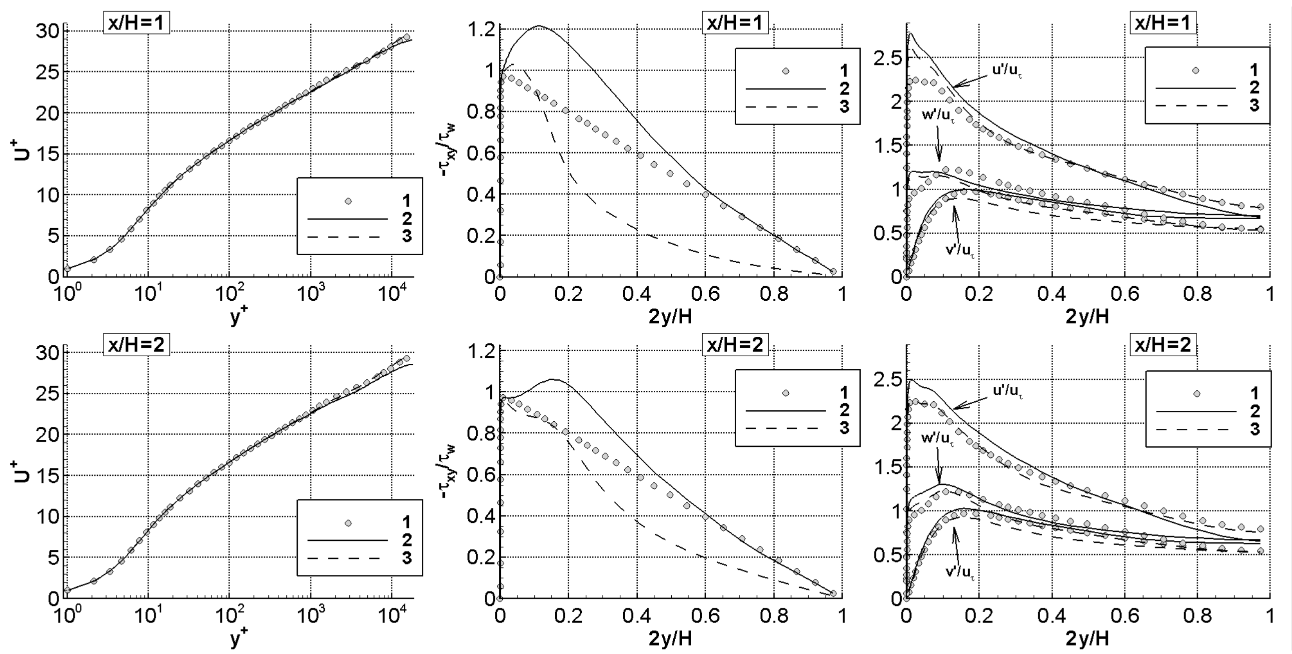

Рис. 4.11. Сравнение профилей осредненной скорости (слева), касательных (в центре) и нормальных (справа) напряжений Рейнольдса при $Re_\tau = 18000$ в сечениях $x/H = 1, 2$. Обозначения те же, что и для рис. 4.8.

Таким образом, при применении разработанного метода для задания входных граничных условий в расчетах турбулентного течения в плоском канале, отклонение трения и среднего профиля скорости от “эталонного” незначительно, тогда как в случае использования метода синтетических вихрей, являющегося одним из лучших методов генерации синтетической турбулентности, описанных в литературе, наблюдается существенное падение трения и отклонение среднего профиля скорости с медленным восстановлением к “эталонным” значениям. Необходимо отметить также, что отсутствие существенных отклонений трения и профиля средней скорости наблюдается во всем диапазоне чисел Рейнольдса, а также вне зависимости от того, используется ли для задания входных полей осредненное LES решение или же RANS решение с моделью $k-\omega$ SST Ментера.

Для профилей напряжений Рейнольдса наблюдается некоторое отклонение от “эталонных” даже в случае использования входных профилей скорости и напряжений Рейнольдса, полученных в LES расчете с периодическими граничными условиями, однако уже к $x/H = 2$ это отклонение становится небольшим и наблюдается только для касательных напряжений в центре канала. Это может быть объяснено тем, что в турбулентном течении в канале присутствуют турбулентные структуры очень большого масштаба (до $4 \div 5H$), которые отсутствуют в “синтетической турбулентности” на входной границе.

4.2. Течение в пограничном слое на плоской пластине

4.2.1. Постановка задачи

Следующим “каноническим” типом турбулентного течения было выбрано течение в пограничном слое на плоской пластине. В отличие от развитого

Код варианта	Модель	Входные ГУ	Re_{θ_0}
RANS-SST-LowRe	SST $k-\omega$ RANS		10^3
RANS-SST-HighRe	SST $k-\omega$ RANS		10^4
LES-Recyc	Алгебр. модель (3.10)	Рециклинг	10^3
LES-Synth-LowRe-Alg	Алгебр. модель (3.10)	Синт. турб.	10^3
LES-Synth-LowRe-IDDES	SST $k-\omega$ IDDES	Синт. турб.	10^3
LES-Synth-HighRe-Alg	Алгебр. модель (3.10)	Синт. турб.	10^4
LES-Synth-HighRe-IDDES	SST $k-\omega$ IDDES	Синт. турб.	10^4

Таблица 4.3. Варианты расчета течения в пограничном слое на плоской пластине.

течения в плоском канале течение в пограничном слое развивается, толщина пограничного слоя нарастает вниз по потоку. Вследствие этого невозможно использовать периодические граничные условия в продольном направлении. Поэтому в качестве “эталонного” варианта расчета для сравнения с предложенным методом был выбран расчет того же течения с применением “рециклинга” турбулентности [50].

Расчет течения в пограничном слое на плоской пластине был проведен для двух значений числа Рейнольдса, построенного по скорости невозмущенного потока и толщине потери импульса пограничного слоя в начальном сечении, $Re_{\theta_0} = 10^3,\ 10^4$. Был проведен RANS расчет течения по модели $k-\omega$ SST Ментера с заданием однородного профиля скорости на входной границе, а также серия LES расчетов, параметры которых приведены в табл. 4.3.

Для задания входных граничных условий в LES расчетах использовались два различных способа: метод “рециклинга” турбулентности [50] и предложенный метод генерации синтетической турбулентности.

Так как при использовании “рециклинга” турбулентности применение дифференциальной модели подсеточной вязкости затруднено из-за необходимости задавать значения характеристик турбулентности на входной границе, для варианта расчета с применением “рециклинга” турбулентности использовалась алгебраическая модель турбулентности, описанная в разделе 3.1.3. Для корректного сравнения с этим вариантом расчета в расчетах с приме-

Re_{θ_0}	$N_x \times N_y \times N_z$	$\frac{L_x}{\theta_0} \times \frac{L_y}{\theta_0} \times \frac{L_z}{\theta_0}$	$\frac{\Delta x}{\theta_0}$	$\frac{\Delta y_{\min}}{\theta_0}$	$\frac{\Delta z}{\theta_0}$	$\left(\frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j}\right)_{\max}$	Δx^+	$\Delta y^+_{\min}$	Δz^+
10^3	$248 \times 60 \times 100$	$220 \times 65 \times 45$	0.9	$2.4 \cdot 10^{-2}$	0.45	1.1	40	1	20
10^4	$189 \times 82 \times 76$	$200 \times 60 \times 40$	1.0	$2.6 \cdot 10^{-3}$	0.5	1.1	400	1	200

Таблица 4.4. Параметры расчетной области и сетки для LES расчета течения в пограничном слое на плоской пластине.

нением “синтетической турбулентности” использовалась как алгебраическая модель подсеточной вязкости, так и гибридный RANS-LES метод IDDES с применением $k-\omega$ SST модели Ментера в качестве базовой.

Размеры расчетной области и параметры сеток для LES расчетов приведены в табл. 4.4. Здесь ось x направлена по течению, ось y — перпендикулярно пластине, а в направлении z течение однородно. В качестве линейного масштаба задачи выбрано значение толщины потери импульса пограничного слоя во входном сечении θ_0.

Граничные условия были заданы следующим образом: на пластине было задано условие прилипания $\mathbf{V} = 0$ для скорости и условие $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ для давления. На верхней и выходной границе задавалось постоянное давление и условия экстраполяции для скорости. На входной границе задавались условия первого рода для скорости и условие экстраполяции для давления. В направлении z было задано условие периодичности.

Шаг по времени в LES расчетах был равен $\Delta t U_b/\theta_0 = 0.2$. Для получения осредненных полей гидродинамических величин и характеристик турбулентности производилось осреднение нестационарного решения по координате z и по времени в течение интервала $T_{avg}U_b/\theta_0 = 5000$, при этом продолжительность переходного периода до начала осреднения составила $T_{trans}U_b/\theta_0 = 1000$.

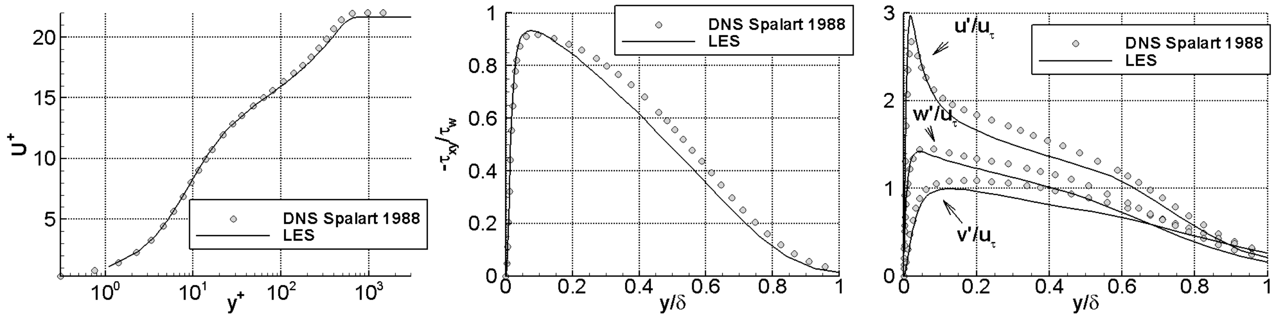

Рис. 4.12. Профили средней скорости (слева), касательных (в центре) и нормальных напряжений Рейнольдса (справа) при $Re_\theta = 1410$ в сравнении с данными DNS [92].

4.2.2. Результаты

Профили средней скорости и напряжений Рейнольдса при $Re_\theta = 1410$, полученные в результате LES расчета течения в пограничном слое на плоской пластине с применением “рециклинга” турбулентности приведены на рис. 4.12 в сравнении с данными прямого численного моделирования [92]. Наблюдается хорошее согласование профилей продольной компоненты скорости и касательных напряжений Рейнольдса. Профили нормальных напряжений Рейнольдса несколько отклоняются от результатов прямого численного моделирования, но это отклонение невелико. Таким образом, как и в случае развитого течения в канале, подтверждена надежность “эталонного” решения. Это гарантирует объективность выводов о возможностях разработанного метода задания входных граничных условий, базирующихся на сравнении полученных с его помощью результатов с “эталонным” решением.

Далее приведены результаты расчетов течения в пограничном слое с применением “синтетической турбулентности” для задания входных граничных условий в сравнении с результатами расчета этого же течения с использованием “рециклинга” турбулентности.

Распределение коэффициента трения и толщины потери импульса пограничного слоя по длине пластины для различных вариантов расчета приведено

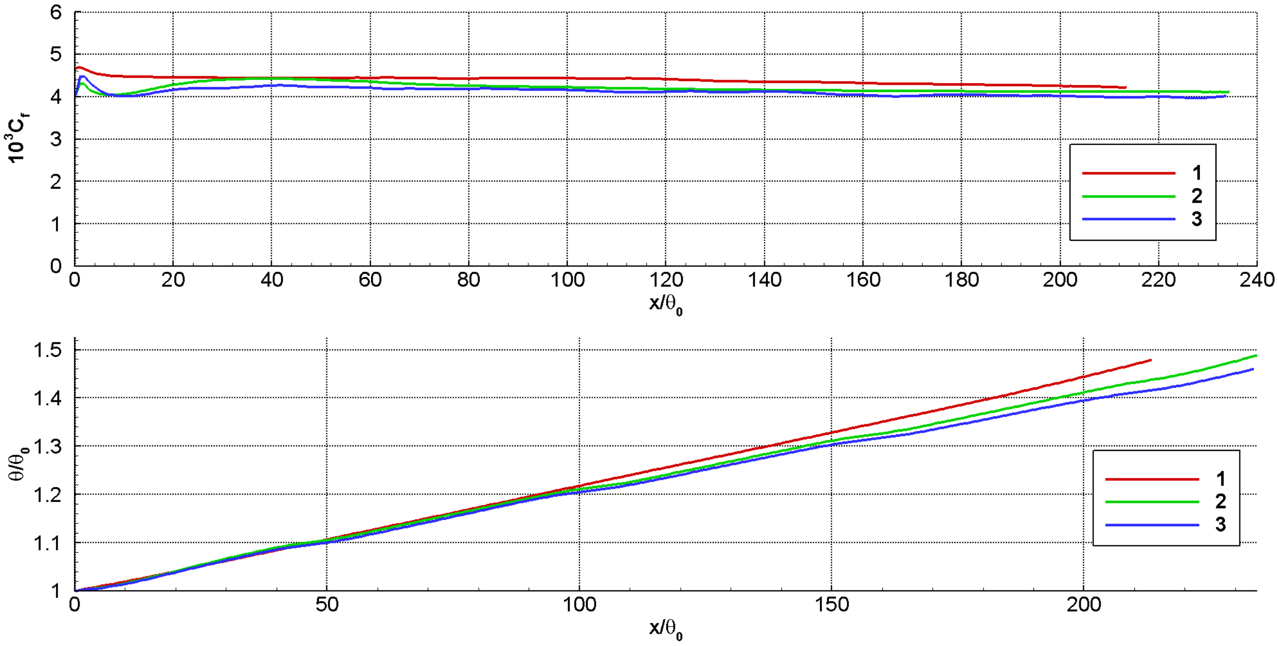

Рис. 4.13. Сравнение распределений коэффициента трения и толщины потери импульса при $Re_{\theta_0} = 10^3$. 1 — LES с "рециклингом" турбулентности и алгебраической подсеточной моделью (3.10), 2 — LES с применением разработанного метода и алгебраической подсеточной моделью, 3 — LES с применением разработанного метода и IDDES.

на рис. 4.13 и 4.14 для значений числа Рейнольдса $Re_{\theta_0} = 10^3$ и $Re_{\theta_0} = 10^4$ соответственно. Зависимость коэффициента трения от толщины потери импульса приведена на рис. 4.15 и 4.16 в сравнении с данными эксперимента [86] для значений числа Рейнольдса $Re_{\theta_0} = 10^3$ и $Re_{\theta_0} = 10^4$ соответственно. Как видно из этих рисунков, распределение трения на стенке, полученное в LES с применением разработанного метода задания входных граничных условий, хорошо согласуется как с результатами "эталонного" LES (отклонение составляет не более $10-15\%$), так и с RANS решением с моделью $k-\omega$ SST, которое, как известно, является для данного течения весьма точным.

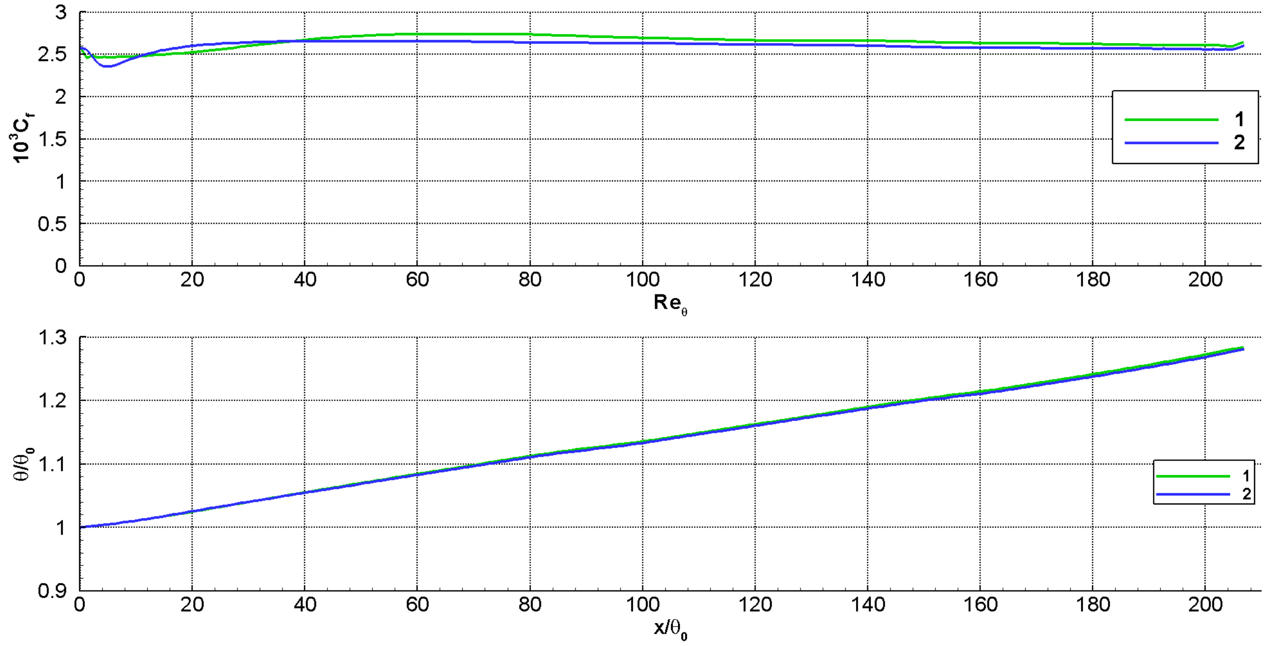

Рис. 4.14. Сравнение распределений коэффициента трения и толщины потери импульса при $Re_{\theta_0} = 10^4$. 1 — LES с применением разработанного метода и алгебраической подсеточной моделью, 2 — LES с применением разработанного метода и IDDES.

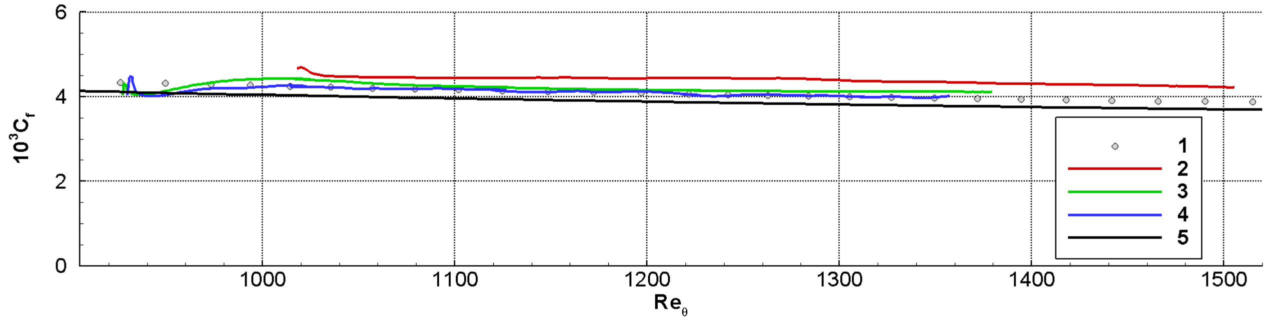

Рис. 4.15. Сравнение зависимостей коэффициента трения от толщины потери импульса с эмпирической зависимостью при $Re_{\theta_0} = 10^3$. 1 — эмпирическая зависимость [86], 2 — LES с “рециклингом” турбулентности и алгебраической подсеточной моделью (3.10), 3 — LES с применением разработанного метода и алгебраической подсеточной моделью, 4 — LES с применением разработанного метода и IDDES, 5 — $k-\omega$ SST RANS.

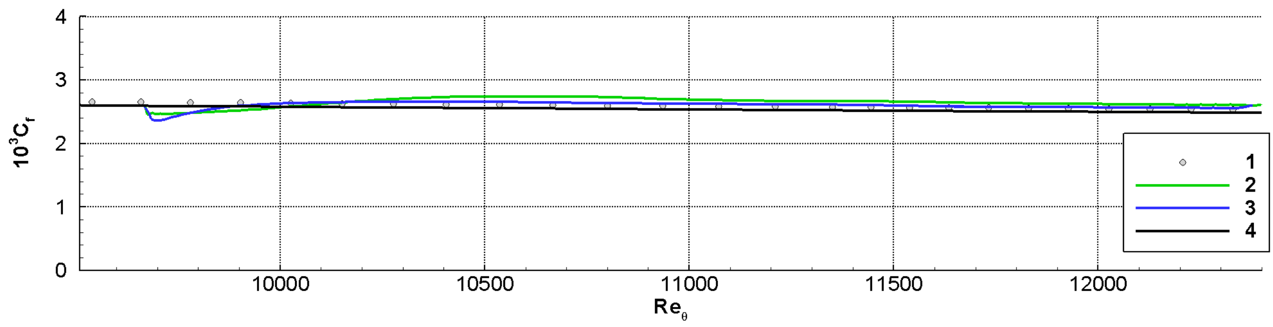

Рис. 4.16. Сравнение зависимостей коэффициента трения от толщины потери импульса с зависимостью [86] при $Re_{\theta_0} = 10^4$. 1 — эмпирическая зависимость [86], 2 — LES с применением разработанного метода и алгебраической подсеточной моделью, 3 — LES с применением разработанного метода и IDDES, 4 — $k-\omega$ SST RANS.

Для визуализации вихревых структур, создаваемых методом генерации "синтетической турбулентности", на рис. 4.17 и 4.18 приведены мгновенные поля абсолютной величины завихренности в плоскостях $x-y$ и $x-z$ для двух вариантов — "эталонного" и LES с применением разработанного метода задания входных граничных условий. Как видно из этих рисунков, структура полей турбулентных пульсаций практически идентична для этих вариантов, при этом генератор "синтетической турбулентности" создает вытянутые вдоль направления потока вихревые структуры, которые соответствуют вихревым структурам, наблюдаемым в расчете с применением "рециклинга" турбулентности.

На рис. 4.19 приведены профили средней скорости и напряжений Рейнольдса в сечениях $\frac{x}{\delta_0} = 0,\ 1,\ 2$ для "эталонного" варианта расчета и LES с применением разработанного метода генерации "синтетической турбулентности" для задания входных граничных условий. Из этого сравнения видно, что несмотря на существенное различие этих профилей во входном сечении ($x/\delta_0 = 0$), при движении вниз по потоку профили, рассчитанные с использованием "синтетической турбулентности", быстро приближаются к "эталонным" и уже при $x/\delta_0 = 4$ различие между двумя решениями становится

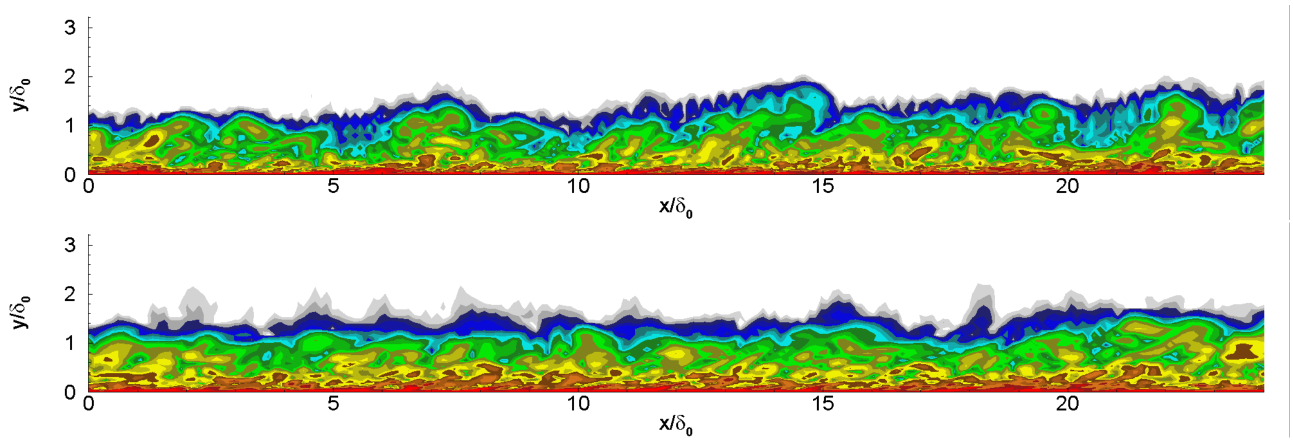

Рис. 4.17. Сравнение мгновенных полей абсолютной величины завихренности в плоскости $x - y$ для различных вариантов задания входных граничных условий. Сверху LES с "рециклингом" турбулентности, снизу LES с применением разработанного метода задания входных граничных условий.

незначительным. Это свидетельствует о том, что при расчете пограничного слоя на пластине поле турбулентных флуктуаций скорости, создаваемое во входном сечении с помощью разработанного генератора "синтетической турбулентности", быстро эволюционирует к физически "реалистичному" (соответствующему "эталонному" LES решению) полю турбулентных пульсаций скорости.

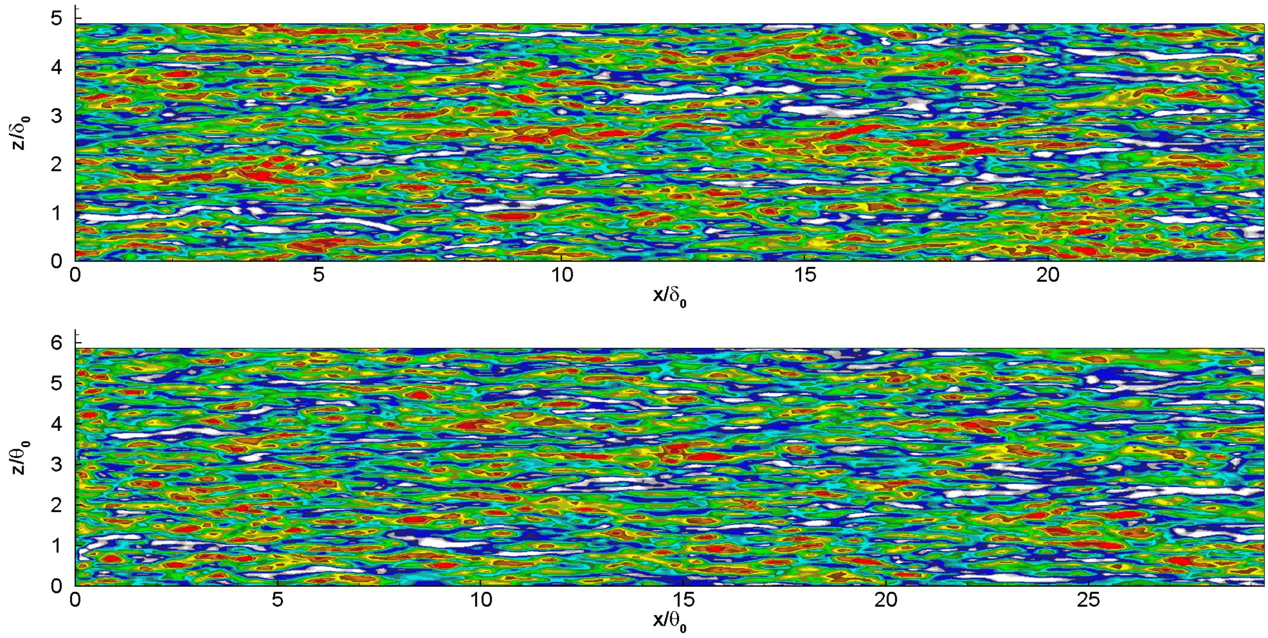

Рис. 4.18. Сравнение мгновенных полей абсолютной величины завихренности на поверхности пластины для различных вариантов задания входных граничных условий. Сверху LES с “рециклингом” турбулентности, снизу LES с применением разработанного метода задания входных граничных условий.

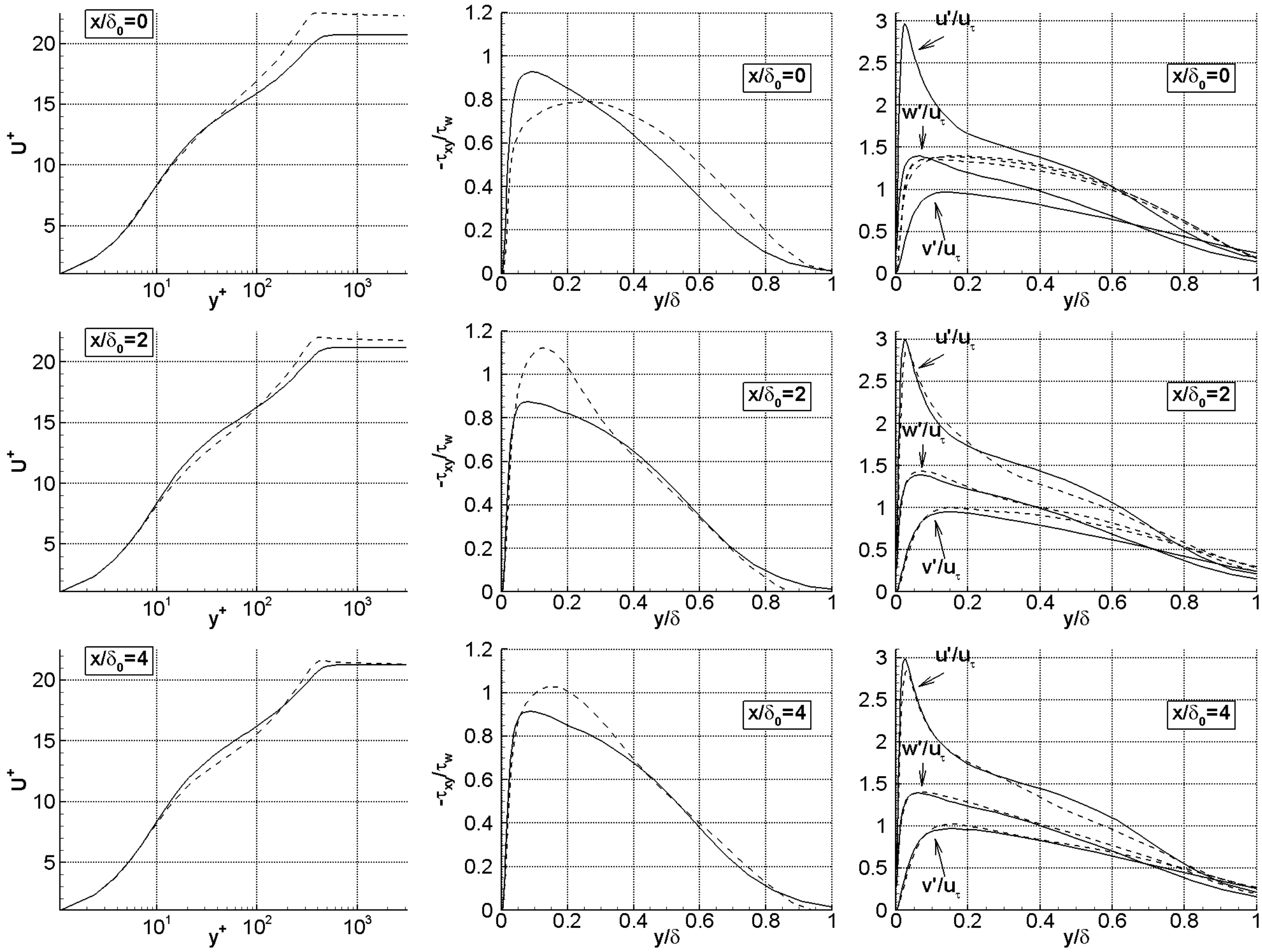

Рис. 4.19. Профили средней скорости (слева), касательных (в центре) и нормальных напряжений Рейнольдса (справа) в сечениях $\frac{x}{\delta_0} = 0,\ 1,\ 2$ для различных вариантов задания входных граничных условий при $Re_{\theta_0} \approx 10^3$. Сплошная линия — LES с “рециклингом” турбулентности, прерывистая линия — LES с применением разработанного метода задания входных граничных условий.

Таким образом, результаты тестирования разработанного метода задания входных граничных условий на примере течения в пограничном слое на плоской пластине подтверждают его высокую точность, сопоставимую с точностью метода “рециклинга” турбулентности.

4.3. Течение в плоском слое смешения

4.3.1. Постановка задачи

Этот раздел посвящен решению последней из рассматриваемых в работе задач о расчете “канонических” сдвиговых течений — задачи об эволюции свободного плоского сдвигового слоя при соотношении скоростей смешивающихся потоков, равном 5/3, что соответствует условиям эксперимента [10].

Система координат была выбрана таким образом, что течение направлено вдоль оси x, ось y направлена поперек слоя смешения, а в направлении z течение однородно. Расчет производился следующим образом: сначала был проведен расчет слоя смешения по методу RANS с заданием ступенчатого профиля скорости на входной границе, после этого была проведена серия LES расчетов в перекрывающихся областях (см. рис. 4.21) с заданием на входной границе нестационарного поля скорости при помощи разработанного метода генерации “синтетической турбулентности”. В LES расчетах для создания синтетического поля скорости на входной границе использовались профили средней скорости и характеристик турбулентности, полученные в RANS расчете. Всего было проведено четыре варианта расчета, параметры которых приведены в табл. 4.5.

Значение числа Рейнольдса, построенного по максимальной скорости и толщине потери импульса в начальном сечении расчетной области варианта LES-1 $Re_{\theta_0} = U_{\max}\theta_0/\nu = 1630$. В качестве линейного масштаба задачи была

Код варианта	Модель турбулентности	Размер сетки	$x_{\min}/\delta_0;\ x_{\max}/\delta_0$	$\Delta t\frac{U_{\max}}{\delta_0};\ \left(\Delta t\frac{U_{\max}}{\Delta x}\right)_{\max}$	$T_{avg}\frac{U_{\max}}{\delta_0}$
RANS	$k-\omega$ SST RANS	200×235	$-17;\ 200$		
LES-1	Алгебраическая модель	$189\times 109\times 51$	$0;\ 42$	$0.14;\ (1.2)$	$5.4\cdot 10^4$
LES-2	Алгебраическая модель	$166\times 99\times 51$	$25;\ 100$	$0.32;\ (1.2)$	$1.6\cdot 10^5$
LES-3	Алгебраическая модель	$151\times 89\times 51$	$70;\ 200$	$0.65;\ (1.2)$	$3.8\cdot 10^5$

Таблица 4.5. Варианты расчета течения в плоском слое смешения.

выбрана толщина слоя смешения в этом сечении δ_0.

В расчетах по методу LES использовалась алгебраическая модель подсеточной вязкости, описанная в разделе 3.1.3, эквивалентная для данного течения модели Смагоринского с выбором максимального шага сетки в качестве линейного масштаба.

Сетки для расчетов по методу LES были построены таким образом, чтобы соотношение шагов сетки и локального значения толщины слоя смешения δ было следующим: $\delta/\Delta x = 10$, $\delta/\Delta y_{\min} = 20$, $\delta/\Delta z/ = 20\div 60$. Сетки в плоскости $x-y$ приведены на рис. 4.20. В направлении z сетки имели постоянный шаг Δz, ширина расчетной области в этом направлении постоянна в каждом варианте расчета, при этом соотношение ширины расчетной области и локального значения толщины слоя смешения лежит в пределах $L_z/\delta = 1.6\div 5$.

Шаг по времени, число Куранта и длительность интервала осреднения для этих вариантов расчета приведены в табл. 4.5.

На выходной границе задавалось условие постоянного давления и мягкие граничные условия для скорости. На верхней и нижней границах, являющихся входными, задавались постоянные значения скорости, соответствующие скоростям невозмущенного потока в верхнем и нижнем слоях. В направлении z были заданы условия периодичности.

4.3.2. Результаты

На рис. 4.21 и 4.22 приведено сравнение мгновенных полей завихренности, полученных в LES расчетах. Сравнение этих полей на участках, где

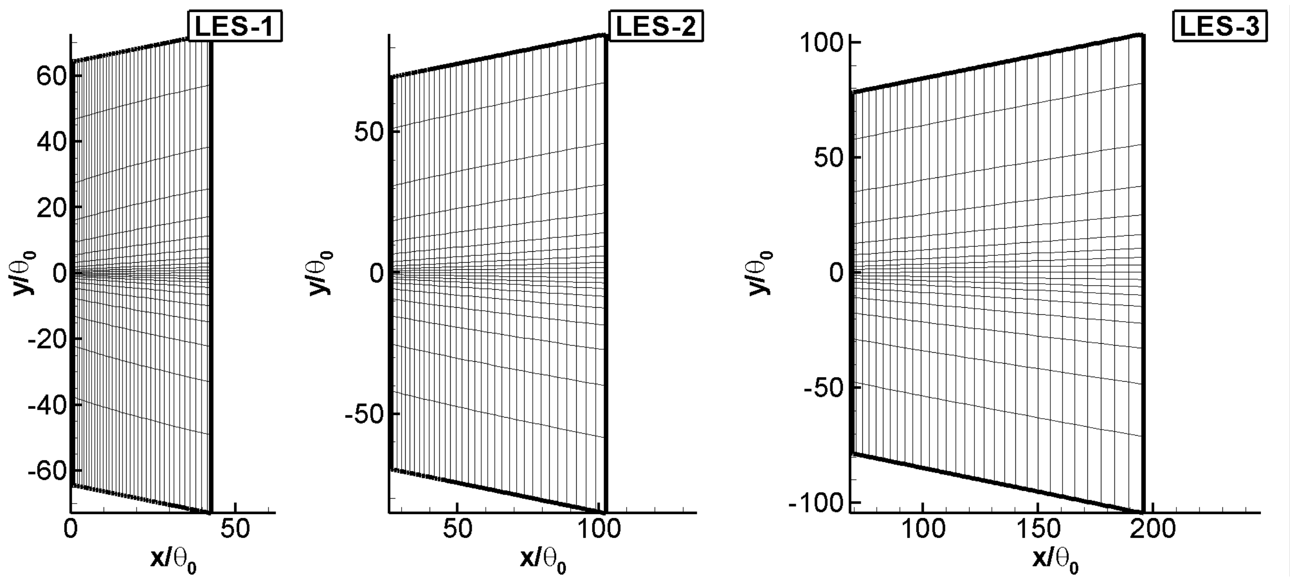

Рис. 4.20. Расчетные сетки в плоскости $x-y$ для трех вариантов расчета течения в плоском слое смешения по методу LES. Показана каждая пятая линия.

одновременно доступны два LES решения, показывает, что они практически идентичны. Это свидетельствует о том, что предлагаемый метод генерации "синтетической турбулентности" на входной границе LES расчетной области обеспечивает практически непрерывную (без видимых переходных участков) эволюцию турбулентности вниз по потоку в случае свободного сдвигового течения.

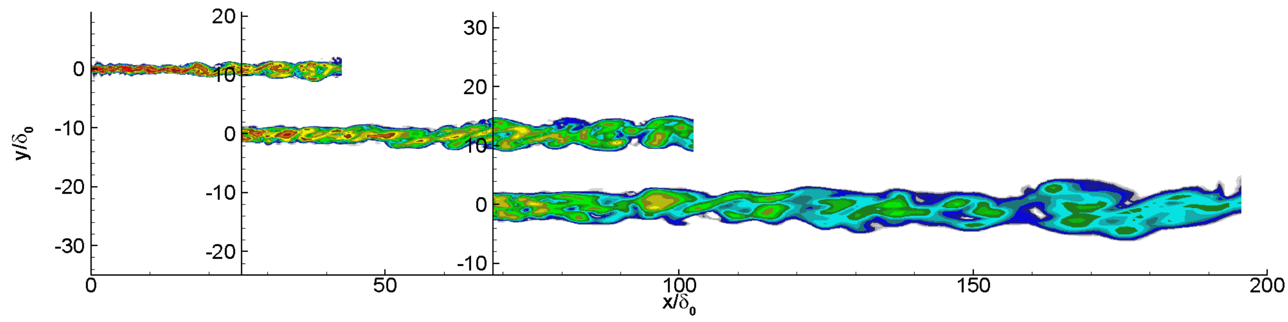

Рис. 4.21. Мгновенные поля модуля завихренности в плоскости $x - y$, полученные в LES расчетах плоского слоя смешения в трех различных расчетных областях.

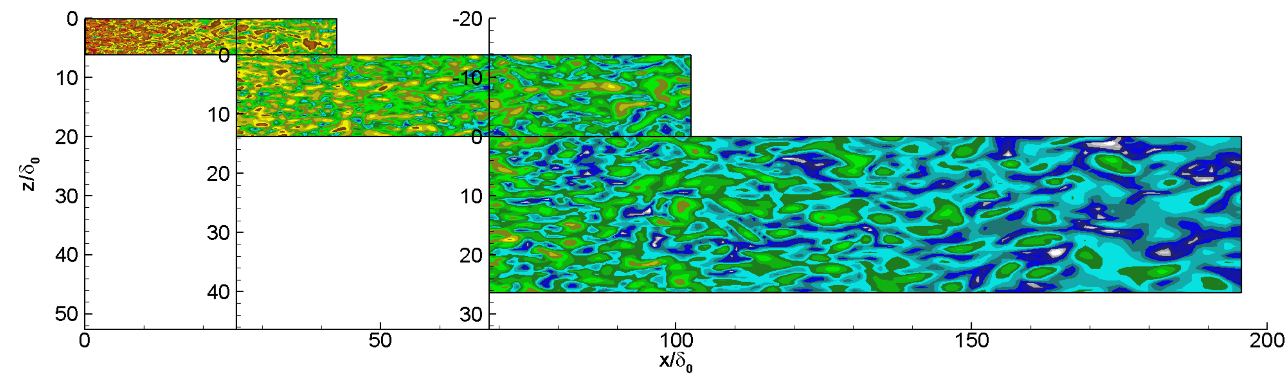

Рис. 4.22. Мгновенные поля модуля завихренности в плоскости $x - z$, полученные в LES расчетах плоского слоя смешения в трех различных расчетных областях.

Справедливость данного вывода в отношении параметров осредненного течения следует также из рис. 4.23, на котором приведено сравнение распределений толщины потери импульса слоя смешения для всех вариантов расчета. Из рисунка видно, что все три LES решения лежат на одной прямой и практически совпадают с RANS решением с $k - \omega$ SST моделью Ментера.

Развитие профилей средней скорости, касательных напряжений Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности при удалении от входной границы, на которой задано синтетическое поле турбулентных пульсаций, приведено в сравнении с данными эксперимента на рис. 4.24–4.26. Профили средней скорости и касательных напряжений Рейнольдса хорошо согласуются с экспери-

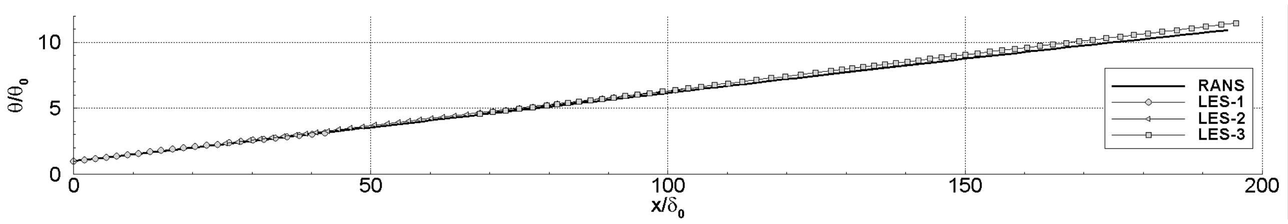

Рис. 4.23. Распределение толщины потери импульса вдоль слоя смешения для всех вариантов расчета.

ментальными данными во всей расчетной области. Величина кинетической энергии турбулентности оказывается несколько завышенной во входном сечении, что объясняется следующим образом: при использовании разработанного метода генерации "синтетической турбулентности" кинетическая энергия разрешенного пульсационного движения равна заданной из RANS решения кинетической энергии турбулентности, при этом полная кинетическая энергия турбулентности в LES решении больше разрешенной из-за присутствия модельной (подсеточной) составляющей, которая в данном случае имеет сравнительно большое значение. Из-за этого полная кинетическая энергия турбулентности на входной границе оказывается заметно выше, чем в RANS решении и в эксперименте. Однако этот недостаток LES решения, полученного с применением разработанного метода генерации "синтетической турбулентности", исчезает уже на достаточно небольшом удалении от входной границе.

Таким образом, результаты верификационных расчетов, приведенные в этой главе, убедительно свидетельствуют о высокой точности сформулированного в главе 2 метода генерации "синтетической турбулентности" на входных границах при расчете "канонических" пристеночных и свободных сдвиговых течений в рамках вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентности.

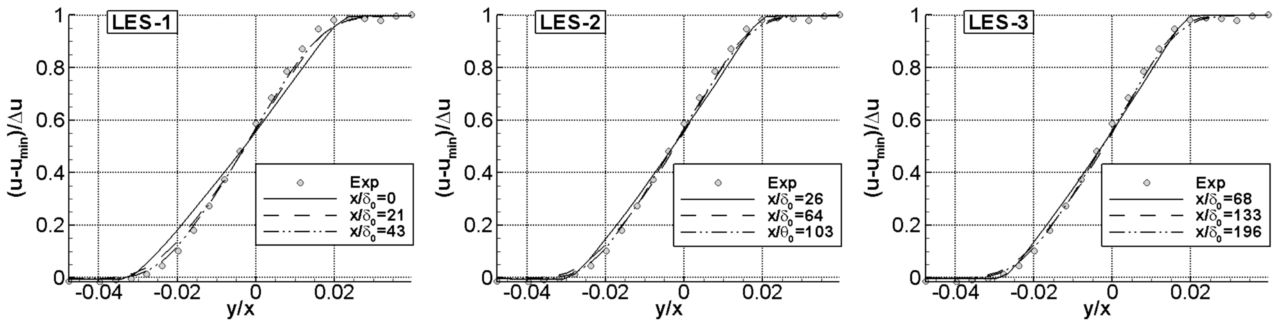

Рис. 4.24. Развитие профилей средней скорости при удалении от входной границы в LES расчетах.

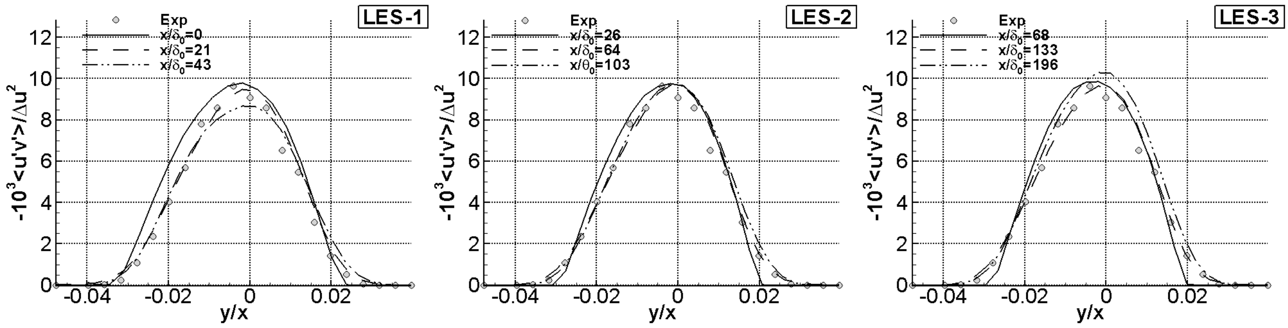

Рис. 4.25. Развитие профилей касательных напряжений Рейнольдса при удалении от входной границы в LES расчетах.

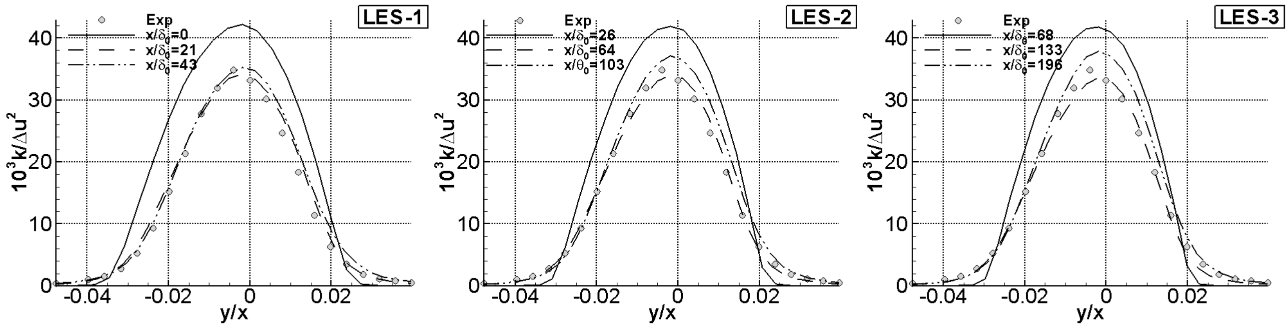

Рис. 4.26. Развитие профилей кинетической энергии турбулентности при удалении от входной границы в LES расчетах.

Глава 5

Применение метода к расчету сложных турбулентных течений

В этой главе продемонстрированы возможности разработанного метода генерации “синтетической турбулентности” применительно к расчету сложных турбулентных течений. В качестве тестовых задач были выбраны два общепринятых международных теста для оценки возможностей различных подходов к моделированию турбулентности в сильно неравновесных потоках с отрывом и последующим присоединением потока. В разделе 5.1 приведены результаты применения разработанного метода к расчету трехмерного отрывного течения в диффузоре прямоугольного сечения, а раздел 5.2 посвящен расчету обтекания выпуклости на плоской пластине.

5.1. Трехмерное отрывное течение в диффузоре прямоугольного сечения

5.1.1. Постановка задачи

Отрывное течение в диффузоре прямоугольного течения характеризуется высокой чувствительностью зоны отрыва к изменению формы диффузора [14]. Для исследованной в эксперименте [14] конфигурации трехмерного диффузора было показано, что вторичные течения во входном канале, возникающие из-за анизотропии нормальных напряжений Рейнольдса, во многом определяют положение зоны отрыва в самом диффузоре [109]. В связи с этим расчет трехмерного отрывного течения в диффузоре сложной геометрии представляет большую проблему для полуэмпирических моделей турбулентности, результаты RANS расчетов существенно отличаются от экспериментальных данных, а линейные модели турбулентной вязкости неправильно предсказывают даже общую картину течения [85], поскольку они не учитывают анизотропию нормальных напряжений Рейнольдса.

Далее представлены результаты расчета течения в условиях эксперимента [14] (первый вариант конфигурации диффузора, число Рейнольдса, построенное по высоте входного канала и среднерасходной скорости $Re = \frac{U_b H}{\nu} = 10^4$). Были применены следующие методы:

- RANS расчеты с $k - \omega$ SST моделью Ментера и нелинейной EARSM моделью [59];

- LES с пристеночным моделированием (метод IDDES, см. 3.1.4, $k - \omega$ SST модель в качестве базовой) и входными граничными условиями, базирующимися на методе “рециклинга” турбулентности (“эталонный” расчет);

- LES с пристеночным моделированием (IDDES) и входными граничными условиями, базирующимися на разработанном методе генерации “синтетической турбулентности”.

Схема расчетной области приведена на рис. 5.1, а ее геометрические характеристики — на рис. 5.2. Система координат выбрана таким образом, что ось x направлена вдоль течения, а оси y и z параллельны стенкам канала.

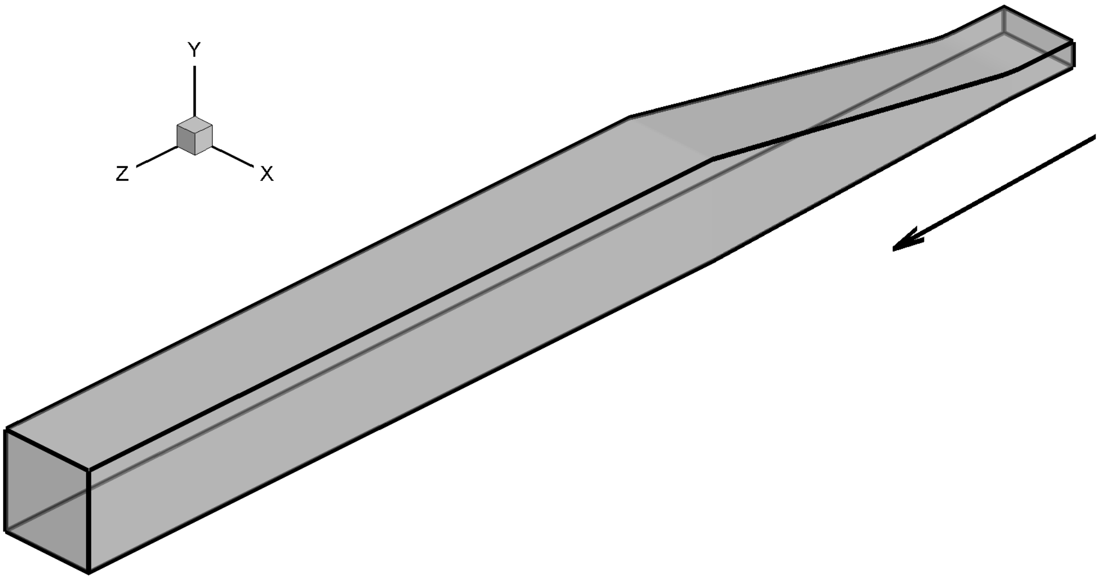

Рис. 5.1. Схема расчетной области для течения в диффузоре.

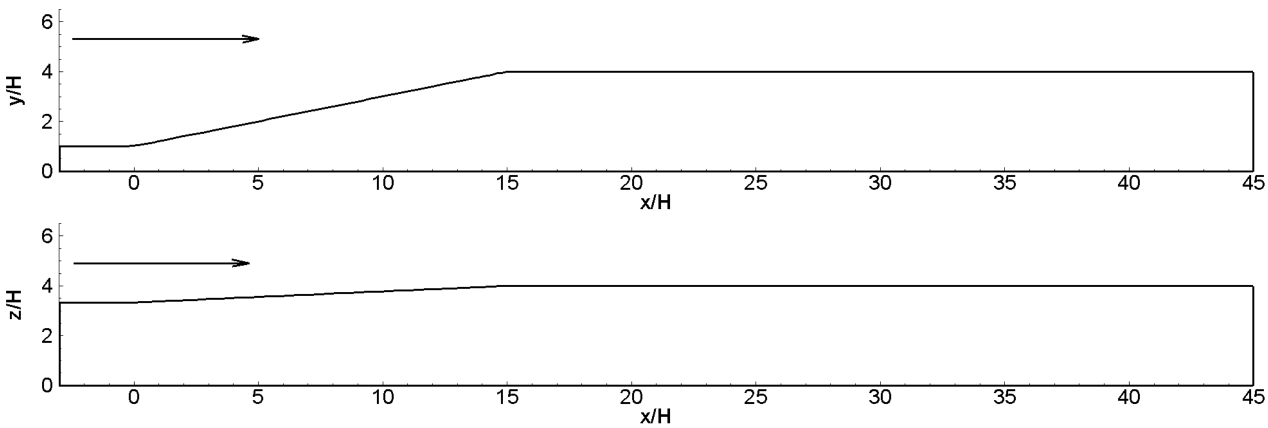

Рис. 5.2. Расчетная область для течения в диффузоре в проекциях на плоскости $x - y$ и $x - z$

В качестве входной границы было выбрано сечение $\frac{x}{H} = -3$. В соответствии с условиями проведения эксперимента, предполагалось, что во входном сечении диффузора имеет место развитое течение в прямоугольном канале. На входной границе в RANS расчетах задавались поля скорости и характеристик турбулентности, полученные в квази-двумерном расчете установившегося течения во входном канале при том же значении числа Рейнольдса. В LES расчетах с применением "синтетической турбулентности" на входной границе задавалось синтетическое нестационарное поле скорости, полученное с применением предложенного метода, при этом в качестве средних полей скорости и характеристик турбулентности использовались результаты квази-двумерных RANS расчетов установившегося течения во входном канале (те же, что и для RANS расчета всего течения). В "эталонном" расчете с применением "рециклинга" турбулентности расчетная область была дополнена участком входного канала длиной $\frac{L}{H} = 6$, так что входная граница была расположена в сечении $\frac{x}{H} = -9$. В этом расчете на входной границе поле скорости задавалось переносом мгновенного поля скорости из сечения $\frac{x}{H} = -3$, масштабируемого так, чтобы среднерасходная скорость была равна заданной. Для давления на входной границе во всех расчетах было задано условие экстраполяции.

В RANS расчетах выходная граница расположена в сечении $\frac{x}{H} = 45$, на ней было задано условие постоянного давления и условие экстраполяции для скорости. В LES расчетах для подавления волн давления на выходной границе добавлен участок длиной $\frac{L}{H} = 10$, на котором производится взвешивание мгновенного решения со стационарным RANS решением. Для этого на каждой итерации поля скорости и давления заменяются на линейную комбинацию текущих значений и стационарного RANS решения. При этом вес стационарного решения монотонно изменяется от 0 в начале этого участка до 1 в конце участка (т.е. на выходной границе) пропорционально кубу расстояния от начала участка. Такой подход к подавлению отраженных возмущений

Код варианта	Модель турбулентности	Входные ГУ	$x_{\min}/H$	$x_{\max}/H$	Сетка, $N_x \times N_y \times N_z$
RANS-SST	SST $k-\omega$ RANS	Стационарные	-3	45	$137 \times 77 \times 135$
RANS-EARSM	EARSM RANS	Стационарные	-3	45	$137 \times 77 \times 135$
LES-Recyc	SST $k-\omega$ IDDES	"Рециклинг"	-9	55	$499 \times 77 \times 135$
LES-Synth-SST	SST $k-\omega$ IDDES	Синт. турб., SST RANS	-3	55	$414 \times 77 \times 135$
LES-Synth-EARSM	SST $k-\omega$ IDDES	Синт. турб., EARSM RANS	-3	55	$414 \times 77 \times 135$

Таблица 5.1. Параметры вариантов расчета течения в диффузоре.

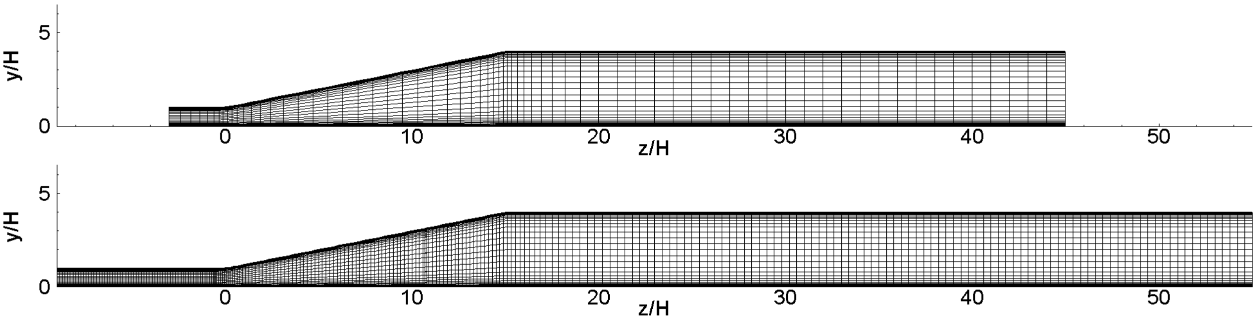

Рис. 5.3. Расчетные сетки для RANS расчетов (сверху) и для LES расчетов (снизу) течения в диффузоре.

давления на выходной границе расчетной области используется во многих работах, посвященных вычислительной аэроакустике (см. напр. [28, 88]).

На боковых стенках во всех вариантах расчета заданы условие прилипания $\mathbf{V} = 0$ для скорости и условие $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ для давления.

Параметры всех вариантов расчета приведены в табл. 5.1. Расчетные сетки приведены на рис. 5.3.

Шаг по времени в нестационарных расчетах был равен $\frac{\Delta t U_b}{H} = 10^{-2}$, что обеспечивает выполнение условия $CFL = \Delta t \left(\frac{U}{\Delta x}\right)_{\max} \leq 0.2$. В LES расчетах для получения осредненных характеристик течения производилось осреднение по времени на интервале $\frac{T_{avg} U_b}{H} = 300$, при этом продолжительность переходного периода до начала осреднения составила $\frac{T_{trans} U_b}{H} = 200$.

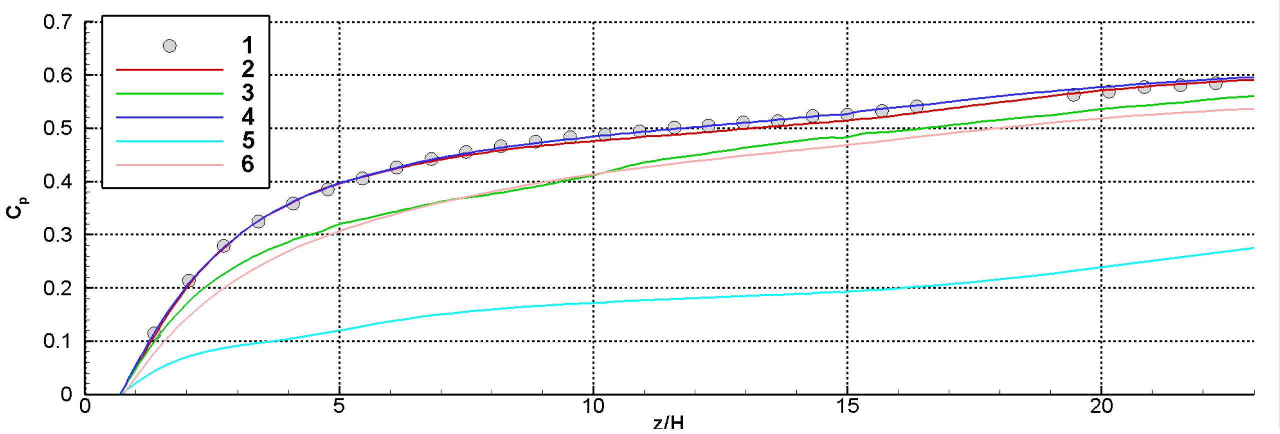

Рис. 5.4. Распределение коэффициента давления $C_p = \frac{p - p_{ref}}{\rho U_b^2/2}$ на нижней стенке диффузора при $y = 0$, $z = 1.65$. 1 — эксперимент, 2 — LES с "рециклингом" турбулентности, 3 — LES с использованием разработанного метода задания входных граничных условий (поля средней скорости и напряжений Рейнольдса получены из RANS с $k - \omega$ SST моделью), 4 — то же, поля средней скорости и напряжений Рейнольдса получены из RANS с EARSM моделью, 5 — RANS с $k - \omega$ SST моделью, 6 — RANS с EARSM моделью.

5.1.2. Результаты

Сравнение полученных распределений давления на нижней стенке ($y = 0$) диффузора при $z/H = 1.65$ (рис. 5.4) и осредненных полей продольной компоненты скорости (рис. 5.5) с результатами эксперимента [14], позволяет сделать следующие выводы.

Результаты EARSM RANS намного лучше согласуются с экспериментом, чем результаты $k - \omega$ SST RANS (это подтверждает важную роль анизотропии Рейнольдсовых напряжений в рассматриваемом течении). Тем не менее, даже при использовании EARSM, RANS не обеспечивает приемлемой для практики точности расчета.

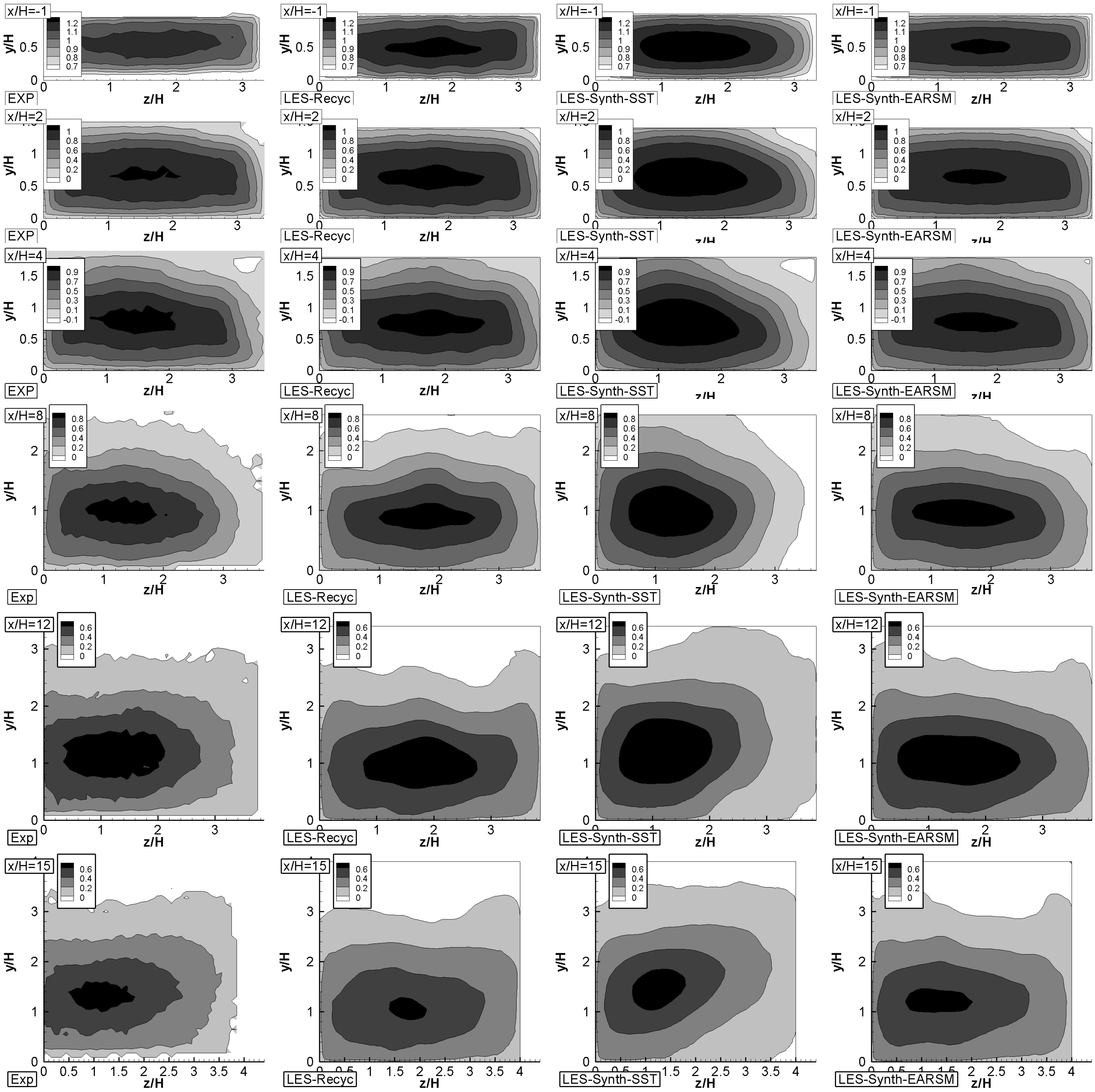

Рис. 5.5. Осредненные поля продольной компоненты скорости для течения в трехмерном диффузоре (сечения $\frac{x}{H} = -1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 15$). Слева направо — эксперимент; LES с "рециклингом" турбулентности; LES с использованием разработанного метода задания входных граничных условий (поля средней скорости и напряжений Рейнольдса получены из RANS с $k-\omega$ SST моделью); то же, поля средней скорости и напряжений Рейнольдса получены из RANS с EARSM моделью.

В случае использования для определения параметров “синтетической турбулентности” во входном сечении диффузора полей средней скорости и напряжений Рейнольдса, рассчитанных с помощью EARSM RANS, результаты LES практически совпадают с результатами “эталонного” расчета (LES с “рециклингом” турбулентности) и очень хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Наконец, при использовании для определения параметров “синтетической турбулентности” линейной $k - \omega$ SST RANS модели, результаты LES заметно отклоняются от результатов “эталонного” расчета и эксперимента, но, тем не менее, заметно превосходят по точности результаты расчета течения в диффузоре с использованием $k - \omega$ SST RANS.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что для течений, в которых существенно проявляется анизотропия Рейнольдсовых напряжений, предпочтительным является использование разработанного метода генерации “синтетической турбулентности” в сочетании с нелинейными RANS моделями, учитывающими эту анизотропию. В противном случае (при использовании для этой цели линейных RANS моделей), данный метод также существенно превосходит по точности соответствующую RANS модель, но потенциальные преимущества разработанного метода реализуются не в полной мере.

5.2. Обтекание выпуклости на плоской пластине

5.2.1. Постановка задачи

Расчет обтекания выпуклости на плоской пластине, был проведен в условиях эксперимента [29], в котором были получены поля скорости и напряжений Рейнольдса в области отрыва, а также распределения трения и давле-

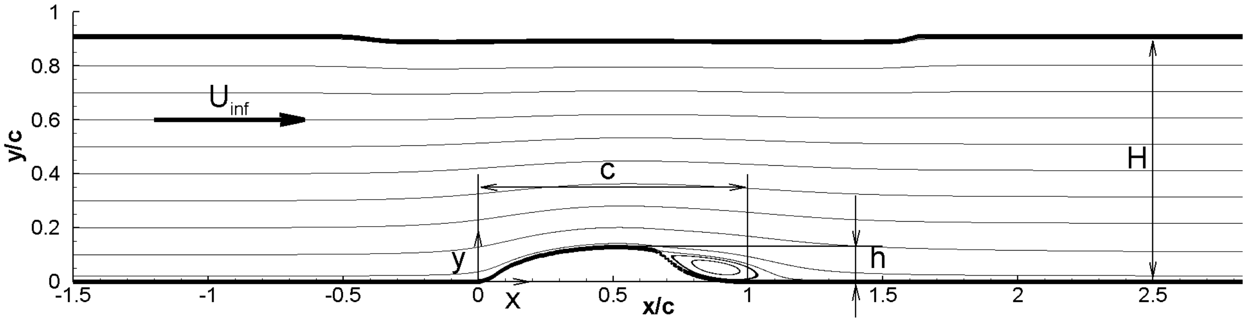

Рис. 5.6. Схема обтекания выпуклости на плоской поверхности.

ния на стенке. Результаты этих экспериментов были занесены в базу данных NASA и используются в большом числе расчетных работ, посвященных тестированию различных подходов к моделированию турбулентности (см. например [7, 77]).

Схема течения приведена на рис. 5.6. В качестве линейного масштаба задачи была выбрана длина хорды выпуклости c. Высота выпуклости составляет $h/c = 0.128$, высота расчетной области равна $H/c = 0.909$. Число Рейнольдса, построенное по длине хорды и максимальной скорости на входе, равно $Re = 936000$.

На нижней стенке были заданы условие прилипания для скорости и условие $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ для давления. Верхняя граница являлась стенкой с условием свободного скольжения. В эксперименте этой стенки нет, использование верхней стенки, имеющей понижение над выпуклостью, позволяет учесть эффект загромождения потока, имеющий место в эксперименте, без необходимости расчета трехмерного течения с боковыми стенками [77].

Входная граница расчетной области располагалась в сечении $x/c = -2.14$, так как в этом сечении в экспериментах был измерен профиль скорости. На входной границе задавались профили скорости и характеристик турбулентности, полученные при расчете течения в пограничном слое на плоской пластине для значения числа Рейнольдса, построенного по толщине поте-

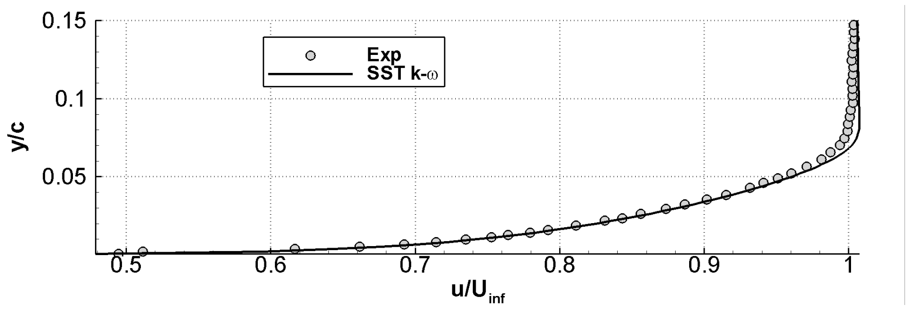

Рис. 5.7. Сравнение профиля продольной компоненты скорости во входном сечении. Точки — эксперимент, линия — расчет.

ри импульса $Re_\theta = 7200$, соответствующем экспериментальному. Сравнение заданного профиля скорости с экспериментальными данными приведено на рис. 5.7.

Выходная граница расчетной области располагалась в сечении $x/c = 4.0$. На выходной границе задавалось постоянное давление и условия экстраполяции для скорости. Для трехмерных расчетов в направлении z задавалось условие периодичности.

Расчетная сетка, представленная на рис. 5.8 имела размер 379×111 в плоскости $x - y$. При этом в отрывной зоне, формирующейся на нижней стенке вниз по потоку от выпуклости, величина шага сетки в направлении x составляет $\Delta x/c = 5 \cdot 10^{-3}$. Шаг сетки в направлении y в первой пристенной ячейке был равен $\Delta y_{\min}/c = 1.5 \cdot 10^{-5}$ ($\Delta y^+ \leq 0.7$), а в начальной области оторвавшегося от выпуклости пограничного слоя изменялся в диапазоне $\Delta y/c \approx 3 \div 5 \cdot 10^{-3}$. Для расчетов течения вихреразрешающими методами использовалась трехмерная сетка, имеющая 101 узел в направлении z с шагом $\Delta z/c = 4 \cdot 10^{-3}$, при этом ширина расчетной области в этом направлении составляла $L_z/c = 0.4$. Как показано в работе [7], такой ширины расчетной области достаточно для адекватного воспроизведения крупномасштабных вихревых структур в отрывной зоне.

Расчет течения был выполнен следующими способами: двумерный RANS

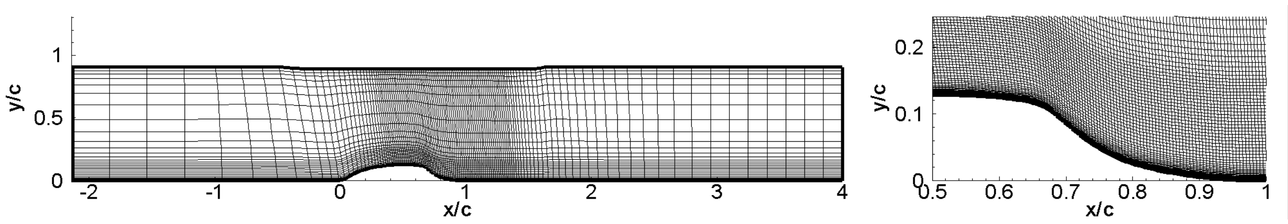

Рис. 5.8. Сетка для расчета обтекания выпуклости на пластине в плоскости $x-y$ (показана каждая третья линия) и фрагмент сетки в области рециркуляции.

с использованием $k-\omega$ SST модели Ментера, с применением гибридного RANS-LES подхода к моделированию турбулентности IDDES [89] (см. также 3.1.4) и с помощью комбинированного RANS-LES подхода с использованием “синтетической турбулентности” на RANS-LES интерфейсе. В последнем случае применялся одноэтапный подход, описанный в разделе 2.3. При проведении комбинированного RANS-LES расчета в LES области производился LES с пристеночным моделированием (WMLES) с использованием модели IDDES (см. схему на рис. 5.9). При этом было рассмотрено два положения границы между подобластями ($x/c = 0.4$ и $x/c = 0.6$, тогда как точка отрыва расположена в $x/c = 0.67$). Во всех вариантах расчета с применением метода IDDES в качестве базовой RANS модели использовалась $k-\omega$ SST модель Ментера.

При расчете по методу IDDES во всей расчетной области для аппроксимации невязких потоков в области $x/c > 0.67,\ y/c < 0.25$ использовалась центрально-разностная схема четвертого порядка аппроксимации, а в остальной расчетной области использовалась противопоточная схема третьего порядка аппроксимации. В комбинированных RANS-IDDES расчетах в RANS области использовалась противопоточная схема третьего порядка аппроксимации, а в IDDES области — центрально-разностная схема четвертого порядка аппроксимации.

В нестационарных расчетах безразмерный шаг интегрирования по време-

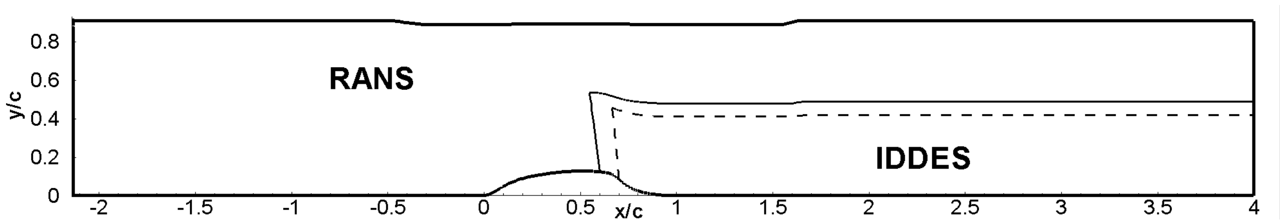

Рис. 5.9. Расположение RANS и IDDES подобластей при расчете обтекания выпуклости на плоской пластине. Сплошная линия — граница IDDES области, штриховая — граница RANS области.

ни составлял $\Delta t U_{inf}/c = 10^{-3}$, что обеспечивает выполнение условия $CFL = \Delta t U_{inf}/\Delta x \leq 0.2$. В качестве начального поля использовалось RANS решение для комбинированного RANS-IDDES расчета и RANS решение, возмущенное наложением пульсаций скорости в области рециркуляции, для расчета с применением метода IDDES.

При проведении нестационарных расчетов для определения характеристик осредненного течения производилось осреднение нестационарных полей по времени на интервале $T_{avg} = U_{inf}/c = 30.0$ и по координате z. Осреднение по времени начиналось после окончания переходного периода, составлявшего $T_{trans} = U_{inf}/c = 20.0$.

5.2.2. Результаты

Положение точек отрыва и присоединения пограничного слоя, а также длина области рециркуляции для всех вариантов расчета приведены в табл. 5.2. Положение точки отрыва для всех вариантов расчета достаточно близко к экспериментальному. Однако, предсказание точки присоединения пограничного слоя и, соответственно, длины области рециркуляции, существенно различается для разных вариантов расчета. В случае RANS расчета координата точки присоединения существенно завышена. Расчет по методу IDDES также предсказывает слишком большую длину области рециркуляции, однако, это значение заметно ближе к экспериментальным данным, чем в случае RANS расчета. Значение же координаты точки присоединения для совместного RANS-IDDES расчета с применением синтетической турбулентности на интерфейсе областей достаточно близко к экспериментальному.

Код варианта	Вариант	Точка отрыва, x_{sep}/c	Точка присоединения x_{attach}/c	Длина области рециркуляции, L/c
Exp	Эксперимент [29]	0.67	1.11	0.44
RANS	RANS во всей области	0.65	1.26	0.61
IDDES	IDDES во всей области	0.66	1.18	0.52
Synth-0.4	RANS-IDDES, интерфейс при $x/c = 0.4$	0.66	1.14	0.48
Synth-0.6	RANS-IDDES, интерфейс при $x/c = 0.6$	0.66	1.13	0.47

Таблица 5.2. Сравнение координат точек отрыва и присоединения пограничного слоя, а также длин расчетной области для всех вариантов расчета.

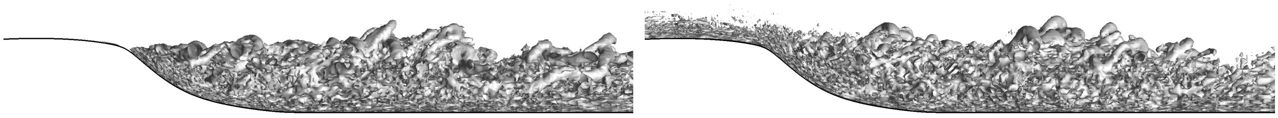

Рис. 5.10. Сравнение изоповерхностей λ_2-критерия мгновенных полей скорости, полученных в расчете по методу IDDES во всей области (слева) и в совместном RANS-IDDES расчете с интерфейсом в $x/c = 0.4$ (справа). Проекция $x - y$.

Для наглядного представления разрешения вихревых структур в проведенных расчетах на рис. 5.10, 5.11, 5.12 и 5.13 приведена визуализация разрешенных турбулентных пульсаций изоповерхностями λ_2-критерия, построенного по мгновенному полю, полученному в расчете по методу IDDES во всей области и в комбинированном RANS-IDDES расчете с расположением интерфейса в $x/c = 0.4$. Из рисунка видно, что комбинированный подход обеспечивает быстрое (в непосредственной близости от входной границы IDDES) формирование турбулентных вихревых структур, обеспечивающих "хаотизацию" оторвавшегося слоя смешения. Для случая же расчета по методу IDDES

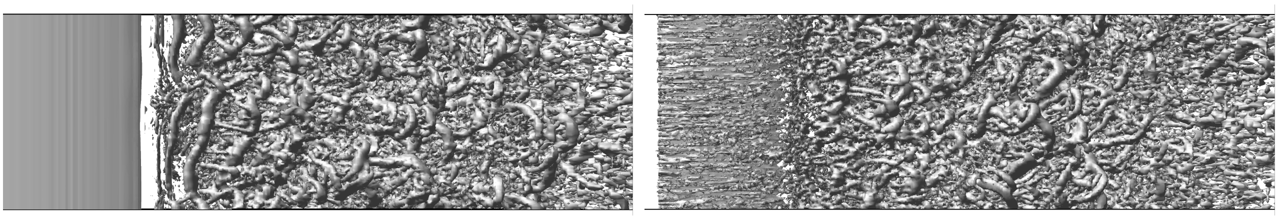

Рис. 5.11. Сравнение изоповерхностей λ_2-критерия мгновенных полей скорости, полученных в расчете по методу IDDES во всей области (слева) и в совместном RANS-IDDES расчете с интерфейсом в $x/c = 0.4$ (справа). Проекция $x - z$.

наблюдается задержка "хаотизации" слоя смешения. Это явление достаточно типично для методов типа DES [44], причиной его является отсутствие в начале слоя смешения разрешенных турбулентных структур, дестабилизирующих его.

Графики распределения коэффициентов давления и трения по продольной координате представлены на рис. 5.14 и 5.15. Задержка развития неустойчивости слоя смешения, образовавшегося после отрыва пограничного слоя приводит к тому, что распределение трения в случае расчета по методу IDDES существенно отличается от экспериментального в области непосредственно за отрывом вниз по потоку. При этом в результате совместного RANS-IDDES расчета с применением "синтетической турбулентности" распределение трения во всей области рециркуляции оказывается весьма близким к экспериментальному. Отклонение же трения от экспериментального вблизи RANS-IDDES интерфейса невелико ($5-10\%$) для варианта с расположением интерфейса в $x/c = 0.4$ и практически отсутствует для варианта с интерфейсом в $x/c = 0.6$.

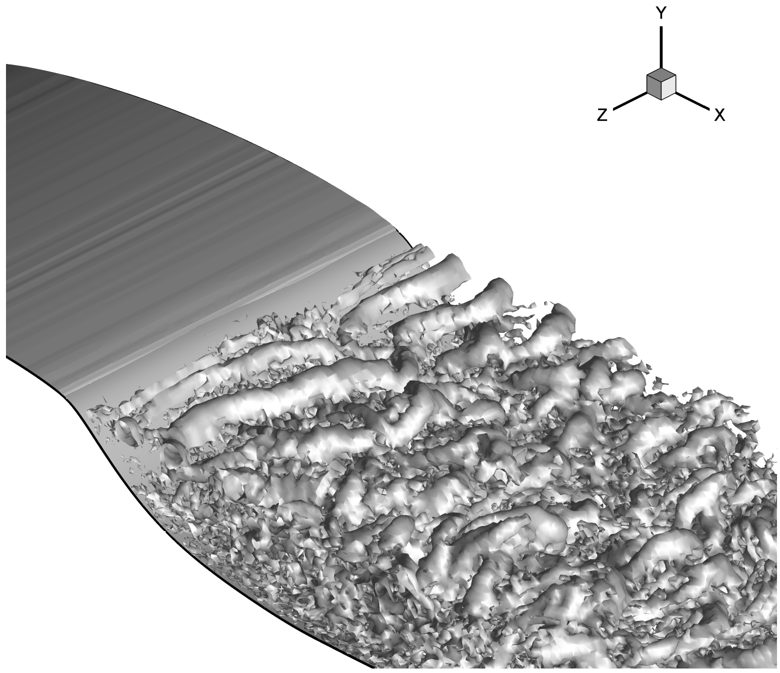

Рис. 5.12. Изоповерхности λ_2-критерия, полученные в IDDES расчете обтекания выпуклости на пластине.

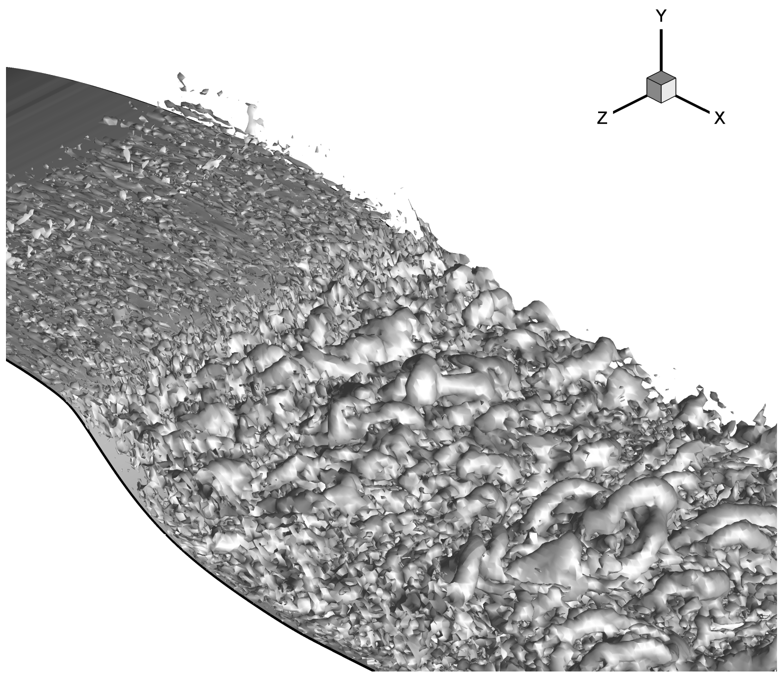

Рис. 5.13. Изоповерхности λ_2-критерия, полученные в комбинированном RANS-IDDES расчете обтекания выпуклости на пластине.

На рис. 5.16, 5.17 и 5.18 приведено сравнение профилей продольной компоненты скорости, напряжений Рейнольдса $\overline{u'v'}$ и $\overline{u'u'}$ соответственно для всех вариантов расчета. Комбинированный RANS-IDDES расчет с применением разработанного метода генерации “синтетической турбулентности” позволяет получить хорошее согласование профилей скорости и напряжений Рейнольдса с данными эксперимента во всех рассмотренных сечениях, тогда как при расчете по методу IDDES профиль скорости в сечении $x/c = 0.8$ (в середине отрывной зоны) существенно отличается от экспериментального.

Полученные результаты позволяют заключить, что предложенный одностадийный метод постановки граничных условий на границе между RANS и LES подобластями с использованием генератора “синтетической турбулентности”, описанного в главе 2 диссертации, является не только экономичным и простым в реализации, но и позволяет заметно повысить точность расчета течений с отрывом и присоединением потока по сравнению с IDDES методом.

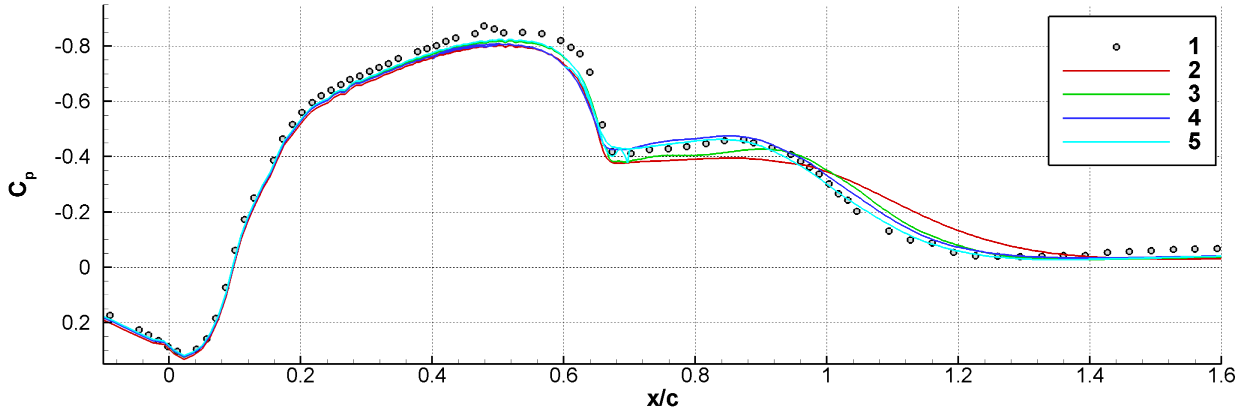

Рис. 5.14. Распределение коэффициента давления. 1 — эксперимент, 2 — $k-\omega$ SST RANS, 3 — IDDES во всей расчетной области, 4 — комбинированный RANS-IDDES расчет, входная граница IDDES области в $x/c = 0.4$, 5 — то же, входная граница IDDES области в $x/c = 0.4$.

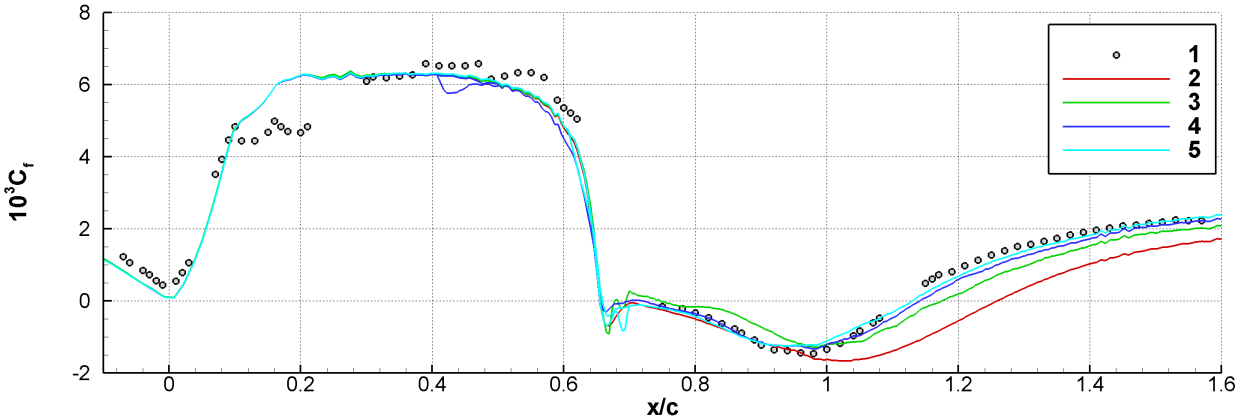

Рис. 5.15. Распределение коэффициента трения на стенке, обозначения те же, что и для рис. 5.14.

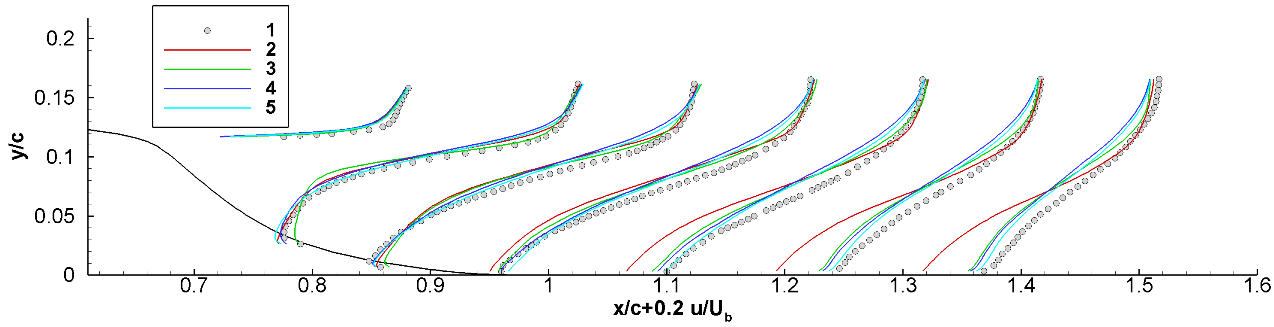

Рис. 5.16. Сравнение профилей скорости продольной компоненты скорости u вблизи области рециркуляции для всех вариантов расчета, обозначения те же, что и для рис. 5.14.

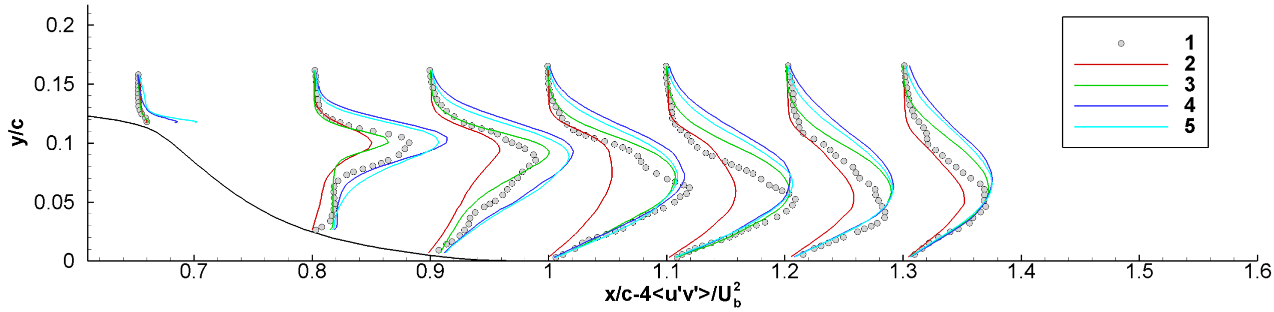

Рис. 5.17. Сравнение профилей напряжений Рейнольдса $\overline{u'v'}$ вблизи области рециркуляции для всех вариантов расчета, обозначения те же, что и для рис. 5.14.

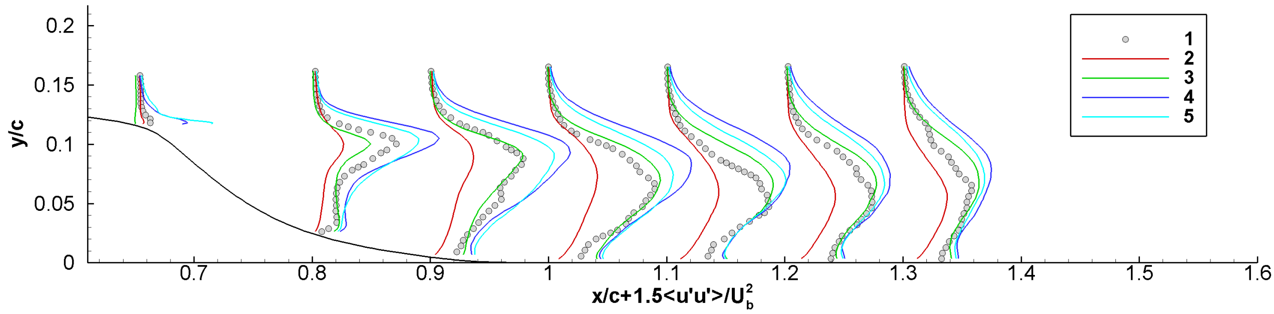

Рис. 5.18. Сравнение профилей напряжений Рейнольдса $\overline{u'u'}$ вблизи области рециркуляции для всех вариантов расчета, обозначения те же, что и для рис. 5.14.

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Разработан простой в реализации и экономичный метод задания входных граничных условий при расчете турбулентных течений несжимаемой жидкости в рамках вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентности, относящийся к классу методов генерации “синтетической турбулентности”.

2. Построен одноэтапный алгоритм реализации этого метода при расчете сложных течений в рамках комбинированных RANS-LES подходов к моделированию турбулентности.

3. Эти методы реализованы в рамках CFD программы общего назначения, что позволило провести их тщательную верификацию как на примере расчета трех “канонических” сдвиговых турбулентных течений

   - установившееся течение в плоском канале,
   - течение в пограничном слое на плоской пластине,
   - свободный плоский слой смешения,

   так и двух сложных турбулентных течений, характеризующихся существенной неравновесностью, анизотропией Рейнольдсовых напряжений и наличием отрыва и присоединения потока

   - течение в несимметричном диффузоре прямоугольного сечения,
   - обтекание выпуклости на плоской пластине.

В результате исследования показано, что разработанные методы по крайней мере не уступают, а в ряде случаев превосходят по точности лучшие из известных аналогов и, в тоже время, значительно превосходят их по простоте реализации и универсальности.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Адамьян Д.Ю. Разработка и тестирование алгоритмов сращивания RANS и LES областей при моделировании турбулентных течений / Д.Ю. Адамьян, А.К. Травин // XXXVIII Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Часть V. – Санкт-Петербург: Издательство Политехнического университета, 2009. – с. 19–20.

2. Адамьян Д.Ю. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на границе RANS и LES областей для расчетов турбулентных течений при помощи гибридных RANS-LES методов / Д.Ю. Адамьян, А.К. Травин // Доклады Всероссийской молодёжной конференции "Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей". – Новосибирск: Параллель, 2010. – с. 53–56.

3. Адамьян Д.Ю. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности для постановки входных граничных условий при расчетах турбулентных течений вихреразрешающими методами / Д.Ю. Адамьян, А.К. Травин // Молодые ученые – промышленности Северо-Западного региона: материалы конференций политехнического симпозиума. – Санкт-Петербург: Издательство Политехнического университета, 2010. – с. 25–28.

4. Адамьян Д.Ю. Сравнение гибридных подходов к моделированию турбулентности применительно к расчету течений с отрывом пограничного слоя от гладкой поверхности / Д.Ю. Адамьян, А.К. Травин // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в новых энергетических технологиях: Тезисы докладов XVIII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева (23-27 мая 2011г., Звенигород). – Москва: Издательский дом МЭИ, 2011. –

с. 317–318.

5. Adamian D.Y. An Efficient Generator of Synthetic Turbulence at RANS-LES Interface in Embedded LES of Wall-Bounded and Free Shear Flows / D.Y. Adamian, A.K. Travin // Proceedings of the 6th International Conference on Computational Fluid Dynamics. – Saint-Petersburg, 2010. – pp. 739-744.

6. Adamian D.Y. Assessment of an approach to generating inflow synthetic turbulence for LES of complex turbulent flows / D.Y. Adamian, A.K. Travin // CD-ROM Proceedings of the 4th European Conference on Aerospace Sciences — EUCASS4. – Saint-Petersburg, 2011. 7 P.

7. Адамьян Д.Ю. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS-LES подходов к расчету турбулентных течений / Д.Ю. Адамьян, М.Х. Стрелец, А.К. Травин // Математическое моделирование, том 23, № 7, с. 3–19. **(перечень ВАК)**.

8. Адамьян Д.Ю. Усовершенствованный метод генерации синтетических вихрей для задания нестационарных входных граничных условий при расчете турбулентных течений / Д.Ю. Адамьян, А.К. Травин // Теплофизика высоких температур, том 49, № 5, с. 728–736. **(перечень ВАК)**.

Литература

1. Боровская И., Козубская Т., Курбанмурадов О., Сабелфельд К. О моделировании однородных случайных полей и сигналов и их использовании в задачах аэроакустики // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 10. С. 76–88.

2. Волков К. Расчет свободного слоя смешения на основе метода моделирования крупных вихрей // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 9. С. 114–128.

3. Травин А. Численное исследование стационарных и нестационарных турбулентных отрывных течений: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 / Санкт-Петербургский Государственный Технический Университет. 1997.

4. Хинце И. Турбулентность. Москва: Физматгиз, 1963. С. 680.

5. Araya G., Castillo L., Meneveau C., Jansen K. A dynamic multi-scale approach for turbulent inflow boundary conditions in spatially developing flows // Journal of Fluid Mechanics. 2011. Vol. 670. Pp. 581–605.

6. Araya J. DNS of Turbulent Wall Bounded Flows with a Passive Scalar: Ph. D. thesis / Rensselaer Polytechnic Institute. 2008. P. 191.

7. Avdis A., Lardeau S., Leschziner M. Large Eddy Simulation of Separated Flow over a Two-dimensional Hump with and without Control by Means of a Synthetic Slot-jet // Flow, Turbulence and Combustion. 2009. Vol. 83, no. 3. Pp. 343–370.

8. Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S. Interfacing Statistical Turbulence

Closures with Large-Eddy Simulation // AIAA Journal. 2004. Vol. 42, no. 3. Pp. 485–492.

9. Bechara W., Bailly C., Lafon P., Candel S. Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows // AIAA journal. 1994. Vol. 32, no. 3. Pp. 455–463.

10. Bell J., Mehta R. Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers // AIAA Journal. 1990. Vol. 28, no. 12. Pp. 2034–2042.

11. Billson M., Eriksson L., Davidson L. Jet Noise Prediction Using Stochastic Turbulence Modeling // 9th AIAA / CEAS Aeroacoustic Conference. 2003.

12. Bohr E. Inflow Generation Techniques for Large Eddy Simulation of Turbulent Boundary Layers: Ph. D. thesis / Rensselaer Polytechnic Institute. 2005. P. 102.

13. Cambon C., Godeferd F. S., Nicolleau F. C. G. A., Vassilicos J. C. Turbulent diffusion in rapidly rotating flows with and without stable stratification // Journal of Fluid Mechanics. 2004. Vol. 499. Pp. 231–255.

14. Cherry E., Elkins C., Eaton J. Geometric sensitivity of three-dimensional separated flows // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2008. Vol. 29, no. 3. Pp. 803–811.

15. Chorin A. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // Journal of Computational Physics. 1967. Vol. 2, no. 1. Pp. 12–26.

16. Clark N. R., Vassilicos J. C. Kinematic Simulation of Fully Developed Turbulent Channel Flow // Flow, Turbulence and Combustion. 2010. Vol. 86, no. 2. Pp. 263–293.

17. Davidson L. Using Isotropic Synthetic Fluctuations as Inlet Boundary Conditions for Unsteady Simulations // Advances and Applications in Fluid Mechanics. 2007. Vol. 1, no. 1. Pp. 1–35.

18. De Prisco G., Piomelli U., Keating A. Improved turbulence generation techniques for hybrid RANS/LES calculations // Journal of Turbulence. 2008. Vol. 9, no. 5. Pp. 1–20.

19. Deardorff J. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // Journal of Fluid Mechanics. 1970. Vol. 41, no. 2. Pp. 453–480.

20. di Mare L., Klein M., Jones W., Janicka J. Synthetic turbulence inflow conditions for large-eddy simulation // Physics of Fluids. 2006. Vol. 18, no. 2. P. 025107.

21. Durbin P. A. Near-Wall Turbulence Closure Modeling Without "Damping Functions" // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 1991. Vol. 3, no. 1. Pp. 1–13.

22. Ferrante A., Elghobashi S. A robust method for generating inflow conditions for direct simulations of spatially-developing turbulent boundary layers // Journal of Computational Physics. 2004. Vol. 198. Pp. 372–387.

23. Fung J. C. H., Hunt J. C. R., Malik N. A., Perkins R. J. Kinematic simulation of homogeneous turbulence by unsteady random Fourier modes // Journal of Fluid Mechanics. 1992. Vol. 236. Pp. 281–318.

24. Garbaruk A., Magidov D., Shur M. et al. Contribution by SPTU: Support of Partners' Efforts Directed to Implementation of DES Technology // FLOMANIA - A European Initiative on Flow Physics Modelling, Ed. by

W. Haase, B. Aupoix, U. Bunge, D. Schwamborn. Springer Berlin / Heidelberg, 2006. Pp. 101–108.

25. Garnier E., Adams N., Sagaut P. Large Eddy Simulation for Compressible Flows. Springer Berlin Heidleberg, 2009. P. 276.

26. Gilling L., Sørensen N. Imposing resolved turbulence in CFD simulations // Wind Energy. 2011.

27. Graf L., Kleiser L. Large-Eddy Simulation of Double Row Compound-Angle Film-Cooling: Computational Aspects // High Performance Computing on Vector Systems / Ed. by M. Resch, K. Benkert, X. Wang et al. Springer Berlin Heidelberg, 2010. Pp. 185–196.

28. Graham A., Zhang X. A computational investigation of the noise radiated by flow-induced cavity oscillations // 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, Nevada, USA: 2001.

29. Greenblatt D., Paschal K., Yao C., Harris J. A Separation Control CFD Validation Test Case Part 2. Zero Efflux Oscillatory Blowing // 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Vol. 485. Reno, Nevada, USA: 2005.

30. Harlow F., Nakayama H. Transport of turbulence energy decay rate: Tech. rep.: Los Alamos Science Lab, 1968.

31. Hoyas S., Jimenez J. Scaling of the velocity uctuations in turbulent channels up to $Re_\tau = 2003$ // Physics of Fluids. 2006. Vol. 18. Pp. 1–4.

32. Jarrin N. Synthetic Inflow Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Turbulence: Ph. D. thesis / University of Manchester. 2008.

33. Jarrin N., Benhamadouche S., Laurence D., Prosser R. A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2006. Vol. 27, no. 4. Pp. 585–593.

34. Jarrin N., Prosser R., Uribe J. et al. Reconstruction of turbulent fluctuations for hybrid RANS/LES simulations using a Synthetic-Eddy Method // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2009. Vol. 30, no. 3. Pp. 435–442.

35. Jewkes J. An Improved Turbulent Boundary Layer Inflow Condition, Applied to the Simulation of Jets in Cross-Flow: Ph. D. thesis / University of Warwick. 2008. P. 193.

36. Jiménez J., Moin P. The minimal flow unit in near-wall turbulence // Journal of Fluid Mechanics. 2006. Vol. 225. Pp. 213–240.

37. Kaltenbach H.-J., Fatica M., Mittal R. et al. Study of flow in a planar asymmetric diffuser using large-eddy simulation // Journal of Fluid Mechanics. 1999. Vol. 390. Pp. 151–185.

38. Karweit M., Blanc-Benon P., Juve D., Comte-Bellot G. Simulation of the propagation of an acoustic wave through a turbulent velocity field: A study of phase variance // Journal of the Acoustical Society of America. 1991. Vol. 89, no. 1. Pp. 52–62.

39. Keating A., De Prisco G., Piomelli U. Interface conditions for hybrid RANS/LES calculations // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2006. Vol. 27, no. 5. Pp. 777–788.

40. Keating A., Piomelli U., Balaras E., Kaltenbach H. A priori and a posteriori tests of inflow conditions for large-eddy simulation // Physics of Fluids. 2004. Vol. 16, no. 12. Pp. 4696–4712.

41. Kempf A., Klein M., Janicka J. Efficient generation of initial- and inflow-conditions for transient turbulent flows in arbitrary geometries // Flow, Turbulence and Combustion. 2005. Vol. 74, no. 1. Pp. 67–84.

42. Kim J., Moin P., Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // Journal of Fluid Mechanics. 1987. Vol. 177. Pp. 133–166.

43. Klein M., Sadiki A., Janicka J. A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations // Journal of Computational Physics. 2003. Vol. 186, no. 2. Pp. 652–665.

44. Kok J. C., van Der Ven H. Destabilizing Free Shear Layers in X-LES Using a Stochastic Subgrid-Scale Model // Progress in Hybrid RANS-LES Modelling, Ed. by S.-H. Peng. Springer-Verlag Berlin Heidleberg, 2010. Pp. 179–189.

45. Kornev N., Hassel E. Method of random spots for generation of synthetic inhomogeneous turbulent fields with prescribed autocorrelation functions // Communications in Numerical Methods in Engineering. 2007. Vol. 23, no. 1. Pp. 35–43.

46. Kraichnan R. Diffusion by a random velocity field // Physics of Fluids. 1970. Vol. 13, no. 1. Pp. 22–31.

47. Le H., Moin P., Kim J. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step // Journal of Fluid Mechanics. 1997. Vol. 330. Pp. 349–374.

48. Lee S., Lele S., Moin P. Simulation of spatially evolving turbulence and the applicability of Taylor's hypothesis in compressible flow // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. 1992. Vol. 4, no. 7. Pp. 1521–1530.

49. Leschziner M. Modelling turbulent separated flow in the context of aerodynamic applications // Fluid Dynamics Research. 2006. Vol. 38, no. 2-3. Pp. 174–210.

50. Lund T., Wu X., Squires K. Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations // Journal of Computational Physics. 1998. Vol. 140, no. 2. Pp. 233–258.

51. Lyons D., Peltier L., Zajaczkowski F., Paterson E. Assessment of DES models for separated flow from a hump in a turbulent boundary layer // Proceedings of the 5th Joint ASME/JSME Fluids Engineering Conference. ASME, 2007.

52. Magagnato F., Pritz B., Gabi M. Generation of inflow conditions for large-eddy simulation of compressible flows // Proceedings of the 8th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows. 2007.

53. Mary I. RANS/LES Simulation of a Separated Flow in a 3D Curved Duct // Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Springer Beriln Heidelberg, 2010. Pp. 205–211.

54. Mathey F. Aerodynamic noise simulation of the flow past an airfoil trailing-edge using a hybrid zonal RANS-LES // Computers & Fluids. 2008. Vol. 37, no. 7. Pp. 836–843.

55. Mathey F., Cokljat D., Bertoglio J.-P., Sergent E. Assessment of the vortex method for Large Eddy Simulation inlet conditions // Progress in Computational Fluid Dynamics. 2006. Vol. 6, no. 1-3. Pp. 58–67.

56. McMullan W., Gao S., Coats C. The effect of inflow conditions on the transition to turbulence in large eddy simulations of spatially developing mixing

layers // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2009. Vol. 30, no. 6. Pp. 1054–1066.

57. Menter F. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA Journal. 1994. Vol. 32. Pp. 1598–1605.

58. Menter F., Kuntz M. Adaptation of eddy-viscosity turbulence models to unsteady separated flow behind vehicles // The aerodynamics of heavy vehicles: trucks, buses and trains, Volume 1. 2004. Pp. 339–352.

59. Menter F. R., Garbaruk A. V., Egorov Y. Explicit Algebraic Reynolds Stress Models for Anisotropic Wall-Bounded Flows // 3rd European Conference for Aero-Space Sciences. Versailles: 2009.

60. Moin P., Mahesh K. Direct numerical simulation: a tool in turbulence research // Annual Review of Fluid Mechanics. 1998. Vol. 30, no. 1. Pp. 539–578.

61. Morgan B., Larsson J., Kawai S., Lele S. K. Improving Low-Frequency Characteristics of Recycling/Rescaling Inflow Turbulence Generation // AIAA Journal. 2011. Vol. 49, no. 3. Pp. 582–597.

62. Moser R., Kim J., Mansour N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$ // Physics of Fluids. 1999. Vol. 11, no. 4. P. 943.

63. Nicolleau F., Yu G., Vassilicos J. C. Kinematic simulation for stably stratified and rotating turbulence // Fluid Dynamics Research. 2008. Vol. 40. Pp. 68–93.

64. Nikitin N., Nicoud F., Wasistho B. et al. An approach to wall modeling

in large-eddy simulations // Physics of Fluids. 2000. Vol. 12, no. 7. Pp. 1629–1632.

65. Orszag S., Patterson G. Numerical Simulation of Three-Dimensional Homogeneous Isotropic Turbulence // Physical Review Letters. 1972. Vol. 28, no. 2. Pp. 76–79.

66. Pamies M., Weiss P.-E., Garnier E. et al. Generation of synthetic turbulent inflow data for large eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows // Physics of Fluids. 2009. Vol. 21, no. 4. P. 045103.

67. Paterson E., Peltier L. Detached-Eddy Simulation of High-Reynolds-Number Beveled-Trailing-Edge Boundary Layers and Wakes // Journal of Fluids Engineering. 2005. Vol. 127, no. 5. Pp. 897–906.

68. Piomelli U., Balaras E. Wall-Layer Models for Large-Eddy Simulations // Annual Review of Fluid Mechanics. 2002. Vol. 34, no. 1. Pp. 349–374.

69. Piomelli U., Ferziger J., Moin P. Models for large eddy simulations of turbulent channel flows including transpirations: Tech. rep.: Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1987.

70. Roe P. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes // Journal of Computational Physics. 1981. Vol. 43, no. 2. Pp. 357–372.

71. Rogallo R. Numerical experiments in homogeneous turbulence: Tech. rep.: NASA, 1981.

72. Rogers S., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations // AIAA Journal. 1990. Vol. 28, no. 2. Pp. 253–262.

73. Rogers S. E., Chang J. L., Kwak D. A diagonal algorithm for the method of pseudocompressibility // Journal of Computational Physics. 1987. Vol. 73, no. 2. Pp. 364–379.

74. Rogers S. E., Kiris C., Kwak D. Steady and unsteady solutions of the incompressible Navier-Stokes equations // AIAA Journal. 1991. Vol. 29, no. 4. Pp. 603–610.

75. Rogers S. E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations // Applied Numerical Mathematics. 1991. Vol. 8, no. 1. Pp. 43–64.

76. Roidl B., Meinke M., Schröder W. Numerical Investigation of Shock Wave Boundary-Layer Interaction Using a Zonal RANS-LES Ansatz // High Performance Computing in Science and Engineering. 2010. Pp. 369–383.

77. Rumsey C. Successes and Challenges for Flow Control Simulations // 4th AIAA Flow Control Conference. Seattle, WA, USA: 2008.

78. Sagaut P. Large Eddy Simulation for Incompressible Flows. Springer, 2004. P. 426.

79. Sagaut P., Garnier E., Tromeur E. et al. Turbulent Inflow Conditions for Large-Eddy Simulation of Compressible Wall-Bounded Flows // AIAA journal. 2004. Vol. 42, no. 3. Pp. 469–477.

80. Sandham N., Yao Y., Lawal A. Large eddy simulation of transonic turbulent flow over a bump // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2003. Vol. 24, no. 4. Pp. 584–595.

81. Schlatter P., Li Q., Brethouwer G. et al. Simulations of spatially evolving

turbulent boundary layers up to $Re_\theta = 4300$ // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2010. Vol. 31, no. 3. Pp. 251–261.

82. Schlüter J., Apte S., Kalitzin G. et al. Large-scale integrated LES-RANS simulations of a gas turbine engine. 2005.

83. Schlüter J., Moin P., Pitsch H. Large-Eddy Simulation Inflow Conditions for Coupling with Reynolds-Averaged Flow Solvers // AIAA Journal. 2004. Vol. 42, no. 3. Pp. 478–484.

84. Schlüter J., Wu X., Kim S. et al. Integrated RANS-LES of a realistic gas turbine compressor/combustor assembly. 2004.

85. Schneider H., von Terzi D., Bauer H.-J., Rodi W. Reliable and Accurate Prediction of Three-Dimensional Separation in Asymmetric Diffusers Using Large-Eddy Simulation // Journal of Fluids Engineering. 2010. Vol. 132, no. 3. P. 031101.

86. Schoenherr K. Resistances of flat surfaces moving through a fluid // SNAME Transactions. 1932. Vol. 40. Pp. 279–313.

87. Shur M., Spalart P., Strelets M., Travin A. Detached-eddy simulation of an airfoil at high angle of attack // Engineering turbulence modelling and experiments 4 / Ed. by W. Rodi, D. Laurence. Elsevier Science, 1999. Pp. 669–678.

88. Shur M., Spalart P., Strelets M., Travin A. Towards the prediction of noise from jet engines // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2003. Vol. 24. Pp. 551–561.

89. Shur M., Spalart P., Strelets M., Travin A. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2008. Vol. 29, no. 6. Pp. 1638–1649.

90. Shur M., Spalart P. R., Strelets M., Travin A. A Rapid and Accurate Switch from RANS to LES in Boundary Layers Using an Overlap Region // Flow, Turbulence and Combustion. 2010. Vol. 86, no. 2. Pp. 179–206.

91. Smirnov A., Shi S., Celik I. Random Flow Generation Technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // Journal of Fluids Engineering. 2001. Vol. 123, no. 2. Pp. 359–371.

92. Spalart P. Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 1440$ // Journal of Fluid Mechanics. 1988. Vol. 187. Pp. 61–98.

93. Spalart P. Detached-Eddy Simulation // Annual Review of Fluid Mechanics. 2009. Vol. 41, no. 1. Pp. 181–202.

94. Spalart P., Allmaras S. A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows // 30th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, Nevada, USA: 1992.

95. Spalart P., Deck S., Shur M. et al. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2006. Vol. 20, no. 3. Pp. 181–195.

96. Spalart P., Jou W., Strelets M., Allmaras S. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach // Advances in DNS/LES. Vol. 1. Columbus: Greyden Press, 1997. Pp. 4–8.

97. Spalart P., Strelets M., Travin A. Direct numerical simulation of large-eddy-break-up devices in a boundary layer // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2006. Vol. 27, no. 5. Pp. 902–910.

98. Spalart P., Watmuff J. Experimental and numerical study of a turbulent

boundary layer with pressure gradients // Journal of Fluid Mechanics. 1993. Vol. 249. Pp. 337–371.

99. Spille-Kohoff A., Kaltenbach H.-J. Generation of Turbulent Inflow Data with a Prescribed Shear-Stress Profile // Proceedings of the 3rd AFOSR International Conference on DNS/LES. 2001. Pp. 319–326.

100. Stolz S., Adams N. Large-eddy simulation of high-Reynolds-number supersonic boundary layers using the approximate deconvolution model and a rescaling and recycling technique // Physics of Fluids. 2003. Vol. 15, no. 8. Pp. 2398–2412.

101. Strelets M. Detached eddy simulation of massively separated flows // 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, Nevada, USA: 2001.

102. Subbareddy P., Peterson D., Candler G., Marusic I. A synthetic inflow generation method using the attached eddy hypothesis // 24th Applied Aerodynamics Conference. San Francisco, California, USA: 2006. Pp. 1–18.

103. Tabor G., Baba-Ahmadi M. Inlet conditions for large eddy simulation: A review // Computers & Fluids. 2010. Vol. 39, no. 4. Pp. 553–567.

104. Tessicini F., Li N., Leschziner M. Large-eddy simulation of three-dimensional flow around a hill-shaped obstruction with a zonal near-wall approximation // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2007. Vol. 28, no. 5. Pp. 894–908.

105. Travin A., Shur M., Strelets M., Spalart P. Detached-Eddy Simulations Past a Circular Cylinder // Flow, Turbulence and Combustion. 1999. Vol. 63. Pp. 293–313.

106. Uribe J., Jarrin N., Prosser R., Laurence D. Hybrid $v^2 - f$ RANS/LES model and synthetic inlet turbulence applied to a trailing edge flow // Proceedings of the 5th international symposium on turbulence and shear flow phenomena. No. 1. 2007.

107. Uribe J., Revell A., Moulinec C. Computation of Flow in a 3D Diffuser Using a Two-Velocity Field Hybrid RANS/LES // Turbulence and Interactions / Ed. by M. Delville, T.-H. Le, P. Sagaut. Saint-Luce, France: Springer Beriln Heidelberg, 2009. Pp. 385–391.

108. Veloudis I., Yang Z., McGuirk J. et al. Novel Implementation and Assessment of a Digital Filter Based Approach for the Generation of LES Inlet Conditions // Flow, Turbulence and Combustion. 2007. Vol. 79, no. 1. Pp. 1–24.

109. von Terzi D., Schneider H., Bauer H. The Impact of Secondary Mean Vortices on Turbulent Separation in 3D Diffusers // High Performance Computing in Science and Engineering'10 / Ed. by W. Nagel, D. Kröner, M. Resch. Springer-Verlag Berlin Heidleberg, 2010. Pp. 339–352.

110. Wilcox D. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // AIAA Journal. 1988. Vol. 26, no. 11. Pp. 1299–1310.

111. Wu X., Moin P. Direct numerical simulation of turbulence in a nominally zero-pressure-gradient flat-plate boundary layer // Journal of Fluid Mechanics. 2009. Vol. 630. P. 5.

112. Wu X., Squires K. D. Numerical investigation of the turbulent boundary layer over a bump // Journal of Fluid Mechanics. 1998. Vol. 362. Pp. 229–271.

113. Xie Z., Castro I. Efficient Generation of Inflow Conditions for Large Eddy

Simulation of Street-Scale Flows // Flow, Turbulence and Combustion. 2008. Vol. 81, no. 3. Pp. 449–470.

114. Xu S., Martin M. P. Assessment of inflow boundary conditions for compressible turbulent boundary layers // Physics of Fluids. 2004. Vol. 16, no. 7. Pp. 2623–2639.

115. Zhang Q., Schröder W., Meinke M. A zonal RANS-LES method to determine the flow over a high-lift configuration // Computers & Fluids. 2010. Vol. 39, no. 7. Pp. 1241–1253.