Бакалаврская работа.

Тема: Исследование влияния функций окон данных на спектр сигнала.

Исполнитель: Резник Федор Валерьевич
Научный руководитель: к.ф.м.н. Гарбарук Андрей Викторович

Содержание

1 Введение.

Часто при анализе экспериментальных данных или результатов расчетов возникает необходимость анализа спектра сигнала. Чаще всего в этом случае используют спектральный анализ, который базируется на преобразовании Фурье, связывающем временной или пространственный сигнал с его представлением в частотной области.

При использовании спектрального анализа обычно приходится сталкиваться с двумя проблемами: ограниченная длина сигнала и наличие в сигнале постороннего шума. В таких случаях получение объективной информации о спектре сигнала превращается в некое ремесло субъективного характера, которое наряду с использованием научного подхода требует также определенного уровня эмпирического искусства.

При спектральном анализе конченых сигналов, исходный сигнал обычно как бы достраивается до бесконечного копированием исходного сигнала со сдвигом на его длину. Одним из последствий этого является появление разрыва при стыковке «начала» сигнала к его «концу». Для исправления этого недостатка обычно используются так называемые окна данных, являющиеся некоторой весовой функцией на которую умножается исходный сигнал. Существует большое число различных окон данных, тем не менее выбор конкретного окна[1] для решаемой задачи не может быть сделан исходя из теоретических предположений и зачастую требует наличия определенного опыта.

Целью настоящей работы является исследование большого количества окон применительно к характерным сигналам, получаемым в ходе исследования нестационарных газодинамических течений.

1 Обычно говорят просто об окнах. Хотя это не совсем корректно, т.к. следует различать окна данных, используемые в периодограммных оценках, и корреляционные окна, используемые в коррелограмных методах, мы все же иногда будем, ради краткости, опускать слово «данных».

2 Используемый метод оценки спектра.

При анализе спектров часто вместо амплитуд ряда Фурье используют так называемую спектральную плотность мощности (СПМ или power spectrum density – PSD). Это делается в первую очередь потому, что СПМ характеризует энергию, которую несет рассматриваемая частота.

СПМ может быть определена различным образом, но на практике наиболее удобным является определение, используемое в периодограммном методе оценки спектра.

$$P_{xx}(f)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{(2M+1)\Delta t}\left|\Delta t\sum_{n=-M}^{M}x(n)\exp(-2i\pi f n\Delta t)\right|^2 \quad (1)$$

Для конечного сигнала, содержащего N отсчетов (точек), формула (1) преобразуется в так называемый выборочный спектр:

$$\bar{P}_{xx}(f)=\frac{1}{N\Delta t}\left|\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp(-2i\pi fn\Delta t)\right|^2 \quad (2)$$

Можно показать (см., например, [1]), что выборочный спектр будет давать статистически несостоятельные оценки СПМ. На практике для сглаживания периодограммной оценки, полученной по формуле (2) применяют усреднение. Существуют несколько подходов к процедуре усреднения, но наиболее удачным из них считается метод периодограммы Уэлча.

В рамках этого подхода последовательность x(0)...x(N-1) отсчетов разбивается на Navg перекрывающихся сегментов, начала которых отличаются на величину сдвига shift, а каждый сегмент содержит по setl отсчетов. При этом p-ый сегмент имеет вид:

$$x^{(p)}(n)=\bar{x}+w(n,setl)\cdot(\bar{x}-x(n+p\,shift)),\,0\leqslant n\leqslant setl-1,0\leqslant p\leqslant N_{avg}-1 \quad (3)$$

Функция w(n,setl) в (3) является окном данных, исследованию влияния которого посвящена настоящая работа, а $\bar{x}$ – среднее значение последовательности.

Выборочный спектр p-го сегмента будет иметь вид:

$$\bar{P}_{xx}^{(p)}(f)=\frac{1}{U\,setl\,\Delta t}\left|\Delta t\sum_{m=0}^{setl-1}x^{(p)}(m)\exp(-2i\pi fm\Delta t)\right|^2 \quad (4)$$

Где U – это энергия окна:

$$U=\Delta t\sum_{m=0}^{setl-1}w^2(m,setl) \quad (5)$$

Периодограмма Уэлча определятся следующим выражением:

$$P_W(f)=\frac{1}{N_{avg}}\sum_{p=0}^{N_{avg}-1}\bar{P}_{xx}^{(p)}(f) \quad (6)$$

Следует отметить, что использование окон данных эпизодически становились предметом оживленных дискуссий в литературе, в частности, в ряде работ утверждается, что применение окон лишь придает одним отсчетам большую значимость перед другими, а также ухудшает разрешение без какого-либо компенсирующего уменьшения погрешности получаемых спектров (так называемой дисперсии спектральной оценки). Эти утверждения, несомненно, верны в отношении выборочного спектра, но по отношению к периодограмме Уэлча они не совсем верны, поскольку перекрытие сегментов приводит к выравниванию значимости отсчетов при получении спектра. Так, например, при 50% перекрытии сегментов (которое использовалось в данной работе) все данные используются дважды, кроме setl/2 отсчетов с каждой стороны исходной последовательности. С учетом функции окна это приводит к близкой значимости большинства отсчетов. При этом, как показано в [1], дисперсия периодограммы Уэлча обратно пропорциональна числу сегментов.

В настоящей работе были рассмотрены 12 различных окон (большинство из них взято из [2]) (см. таблицу 1 и Рисунок 1).

Таблица 1	
Окно	***Формула***
Прямоугольное	$w(i,N)=1$
Хэмминга	$w(i,N)=0.53836-0.46164\cos\left(\frac{2\pi i}{N-1}\right)$
Ханна[2]	$w(i,N)=0.5\left(1-\cos\left(\frac{2\pi i}{N-1}\right)\right)$
Гаусса	$w(i,N)=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{i-(N-1)/2}{0.4(N-1)/2}\right)^2\right)$
Бартлетта	$w(i,N)=\frac{2}{N-1}\cdot\left(\frac{N-1}{2}-\left\lvert i-\frac{N-1}{2}\right\rvert\right)$
Треуголное	$w(i,N)=\frac{2}{N}\cdot\left(\frac{N}{2}-\left\lvert i-\frac{N-1}{2}\right\rvert\right)$
Блэкмана	$w(i,N)=a_0-a_1\cos\left(\frac{2\pi i}{N-1}\right)+a_2\cos\left(\frac{2\pi i}{N-1}\right)$, где $a_0=0.42, a_1=0.5, a_2=0.08$
Наталла	$w(i,N)=a_0-a_1\cos\left(\frac{2\pi i}{N-1}\right)+a_2\cos\left(\frac{4\pi i}{N-1}\right)-a_3\cos\left(\frac{6\pi i}{N-1}\right)$, где $a_0=0.355768, a_1=0.487396, a_2=0.144232, a_3=0.012604$
Блэкмана-Харриса	$w(i,N)=a_0-a_1\cos\left(\frac{2\pi i}{N-1}\right)+a_2\cos\left(\frac{4\pi i}{N-1}\right)-a_3\cos\left(\frac{6\pi i}{N-1}\right)$, где $a_0=0.35875, a_1=0.48829, a_2=0.14128, a_3=0.01168$
Блэкмана-Наталла	$w(i,N)=a_0-a_1\cos\left(\frac{2\pi i}{N-1}\right)+a_2\cos\left(\frac{4\pi i}{N-1}\right)-a_3\cos\left(\frac{6\pi i}{N-1}\right)$, где $a_0=0.3635819, a_1=0.4891775, a_2=0.1365695, a_3=0.0106411$
Плоская вершина	$w(i,N)=a_0-a_1\cos\left(\frac{2\pi i}{N-1}\right)+a_2\cos\left(\frac{4\pi i}{N-1}\right)-a_3\cos\left(\frac{6\pi i}{N-1}\right)+a_4\cos\left(\frac{8\pi i}{N-1}\right)$, где $a_0=1.000, a_1=1.930, a_2=1.290, a_3=0.388, a_4=0.032$

2 Окно Ханна (Hann window) иногда называют окном Ханнинга (Hanning window), по аналогии с окном Хэмминга (Hamming window), однако это не правильно, т.к. эти окна носят имена собственные: Джулиуса фон Ханна и Ричарда Хэмминга, соответственно.

Таблица 1	
Сглаженное прямоугольное	$w(i,N)=\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{i}{0.05(N-1)}\right)^2, i\leqslant 0.05(N-1)\\ 1, 0.05\leqslant i\leqslant 0.95(N-1)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(N-1)-i}{0.95(N-1)}\right)^2, i\geqslant 0.95(N-1)\end{cases}$

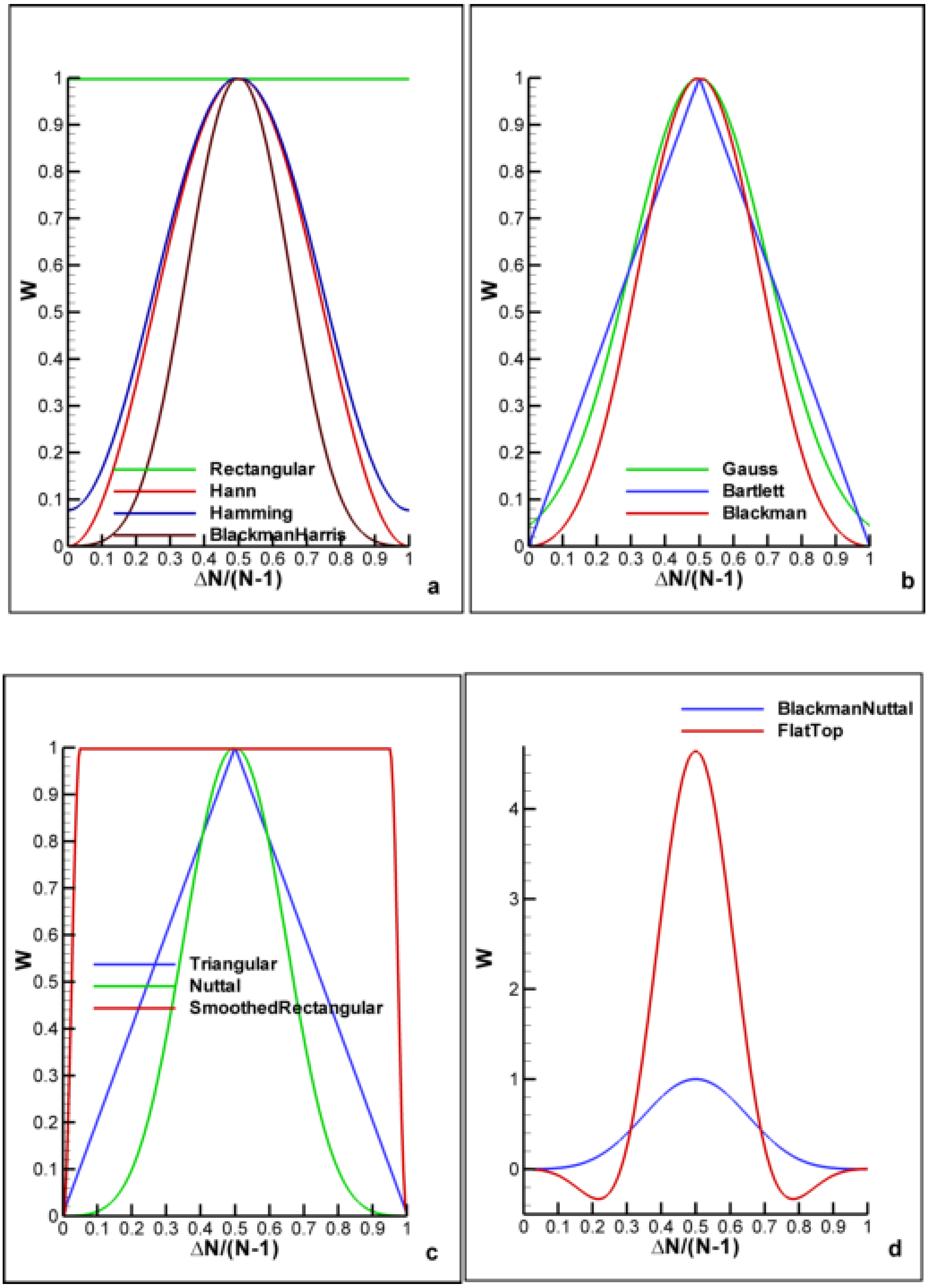


Рисунок 1: Форма окон во временной области.

a: Прямоугольное (Rectangular), Ханна (Hann), Хэмминга (Hamming), Блэкмана-Харриса(BlackmanHarris)

b: Гаусса (Gauss), Бартлетта (Bartlett), Блэкмана (Blackman)

c: Треугольное (Triangular), Наталла (Nuttal), Сглаженное прямоугольное (SmoothedRectangular)

d: БлэкманаНаталла (BlackmanNuttal), Плоская Вершина (FlatTop)

3 Тестирование окон на гармоническом сигнале.

Для предварительного тестирования окон была рассмотрена задача о построении спектра гармонического сигнала функции:

$$f(t)=\cos(2\pi t\cdot 4.5) \tag{7}$$

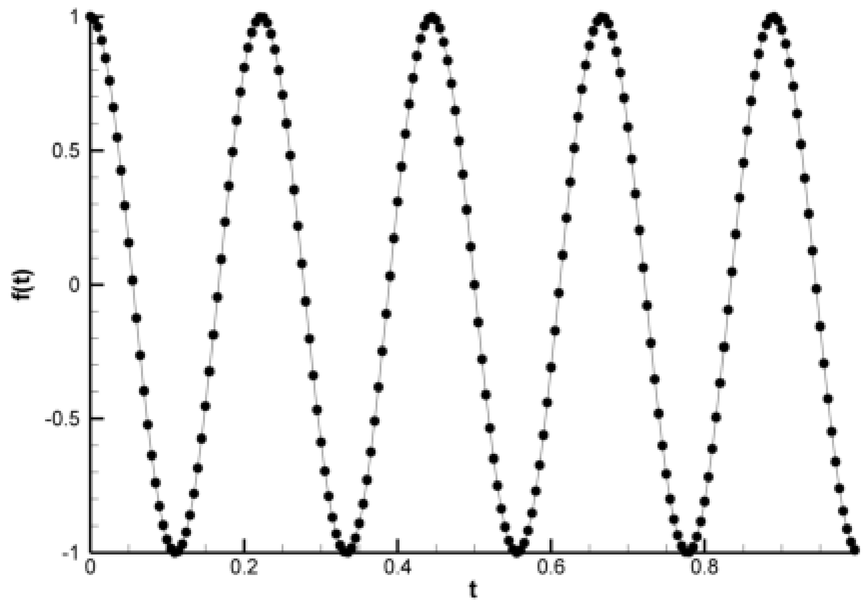
Аналитическим спектром этого сигнала является δ -функция в точке f=4.5.

При этом исследовались два варианта. В первом случае рассматривался временной интервал длинной 1 с (т.е. 4.5 периода, что приводит к разрыву на концах промежутка, см. Рисунок 2,a), а во втором - длиной в 8/9 с (4 периода, Рисунок 2,b). В обоих случая рассматривалось дискретное представление сигнала на 200 отсчетах. Поскольку целью этого тестирования было исследование влияние окна данных на спектр, усреднение в этом случае не применялось.

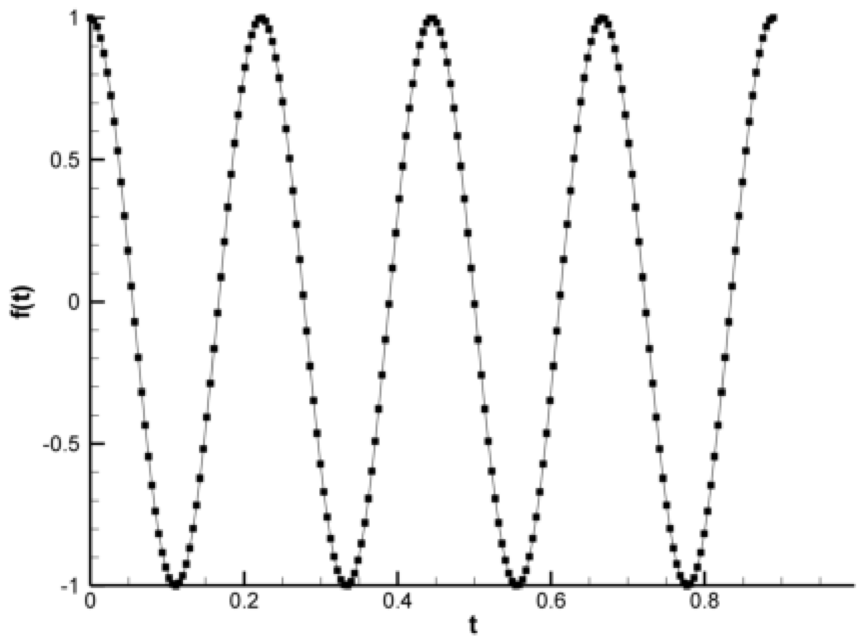
Полученные спектры оценивались по двум, общепринятым [1], параметрам : полуширина пика и скорость падения СПМ при удалении от пика. При этом использовались следующие количественные критерии: ширина пика на высоте равной $1/2$ от амплитуды пика (меньше – лучше), для полуширины пика; отношение амплитуд $\log(PSD_{\Delta N=0.05}/PSD_{\Delta N=0.2})$ (больше – лучше), для скорости падения СПМ. Результаты представлены в таблице 2: зеленым отмечены окна, показавшие лучший результат; а красным окна, не попавшие в 25% от наилучшего результата. На графиках Рисунок 3 и Рисунок 4 представлены по два окна с наименьшой и наибольшей полушириной пика для первого и второго варианта соответственно. На графиках Рисунок 5 и Рисунок 6 представлены по два окна с наибольшей и наименьшей скоростью падения СПМ для первого и второго варианта соответственно. При этом, как видно из рисунков 3 и 4 результаты по оценке полуширины пика отражают реальное состояние вещей. В то время как, из рисунков 5 и 6 видно, что введенная нами оценка скорости падения СПМ верна на всегда, т.к. она не учитывает, что падение может быть сильно не монотонным (см. например рисунок 6). Поэтому к результатам таблицы 2, относящимся к скорости падения СПМ стоит относиться осторожно.

С учетом замечания про монотонность падения СПМ, наилучшие результаты, по совокупности, показали окна: Прямоугольное, Ханна, Блэкмана и Треугольное. Наихудшие результаты у окон: Блэкман-Харриса, Наталла, Плоская вершина, Блэкмана-Наталла.

Стоит также обратить внимание на следующий любопытный факт окна Хэмминга, Гаусса и Треугольное, несмотря на то, что они не равны нулю на концах промежутка, оказываются на хуже многих окон с нулевыми значения на концах. Это ставит под сомнение тезис, выдвигаемый некоторыми авторами (например, [3]), о том что окна служат лишь для того, чтобы обнулить набор данных на концах промежутка, сделав его таким образом как бы периодическим.



a



b

Рисунок 2: Тестовые сигналы.
a. 4.5 периода
b. 4 периода

Таблица 2				
окно	***4.5 периода***		***4 периода***	
	полуширина пика, ΔN	скорость падения СПМ	полуширина пика, ΔN	скорость падения СПМ
Прямоугольное	1.984	3.362	1.000	6.430
Хэмминга	2.010	2.813	1.229	0.404
Ханна[3]	2.042	11.970	1.341	8.230
Гаусса	2.036	3.101	1.292	6.940
Бартлетта	2.012	8.504	1.210	7.197
Треуголное	2.011	9.806	1.205	7.195
Блэкмана	2.129	11.200	1.559	7.668
Наталла	2.274	5.879	1.899	1.684
Блэкмана-Харриса	2.265	4.446	1.877	1.148
Блэкмана-Наталла	2.250	0.724	1.841	5.198
Плоская вершина	3.816	7.129	3.696	6.593
Сглаженное прямоугольное	2.104	8.205	1.010	11.290

3 Окно Ханна (Hann window) иногда называют окном Ханнинга (Hanning window), по аналогии с окном Хэмминга (Hamming window), однако это не правильно, т.к. эти окна носят имена собственные: Джулиуса фон Ханна и Ричарда Хэмминга, соответственно.

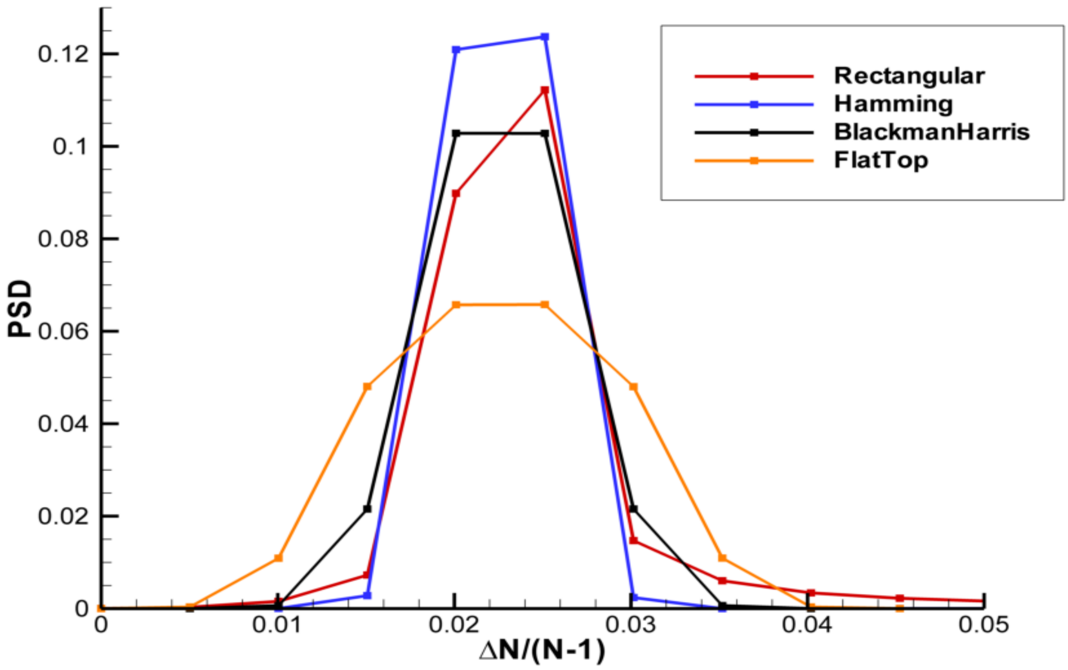


Рисунок 3: Тестирование окон на полуширину пика, тестовая последовательность Рисунок 2,а. Два самых узких и самых широких окна.

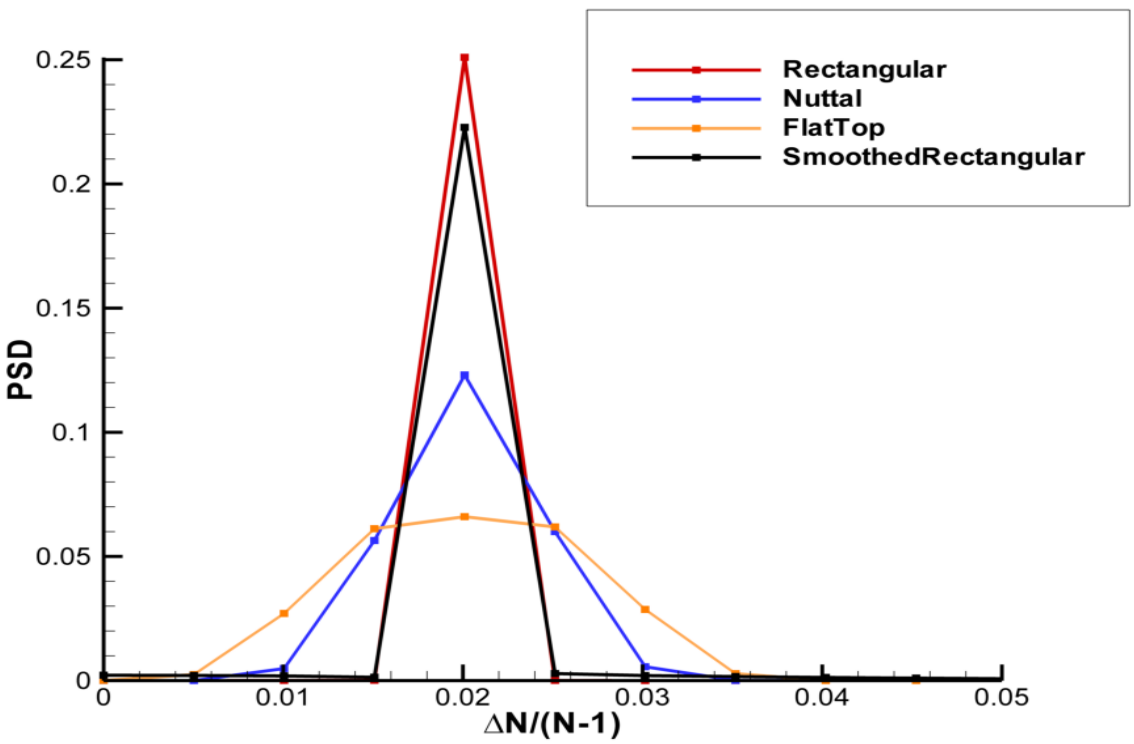


Рисунок 4: Тестирование окон на полуширину пика, тестовая последовательность Рисунок 2,b. Два самых узких и самых широких окна.

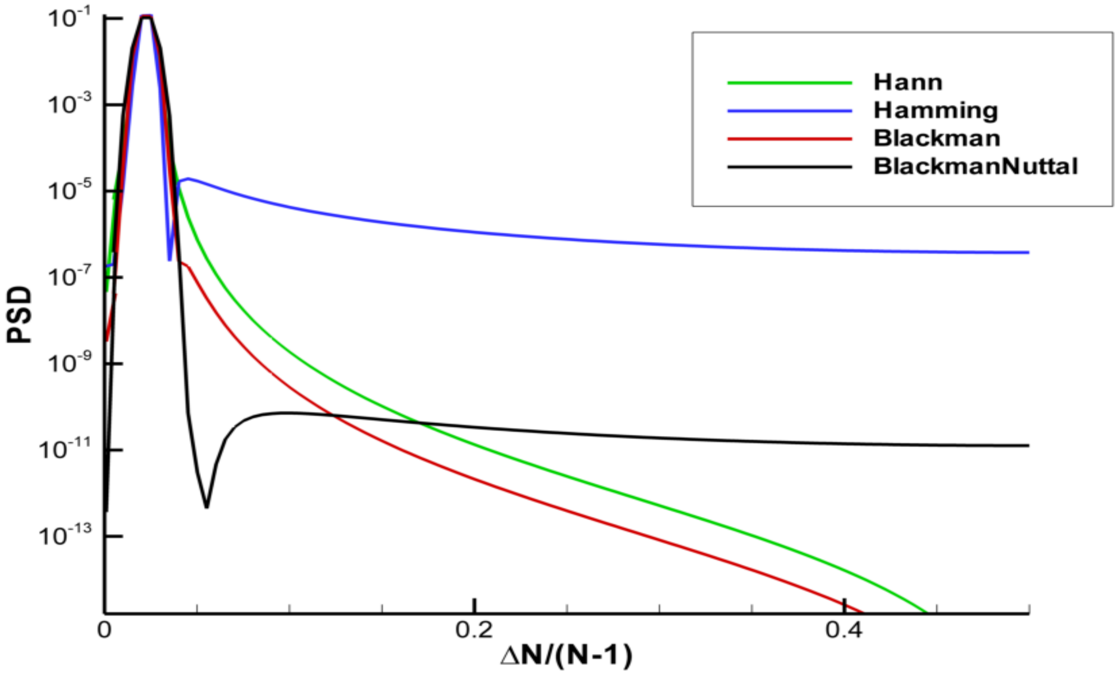


Рисунок 5: Тестирование окон на скорость падения СПМ, тестовая последовательность Рисунок 2,a. Два окна с наибольшей скоростью падения и два с наименьшей.

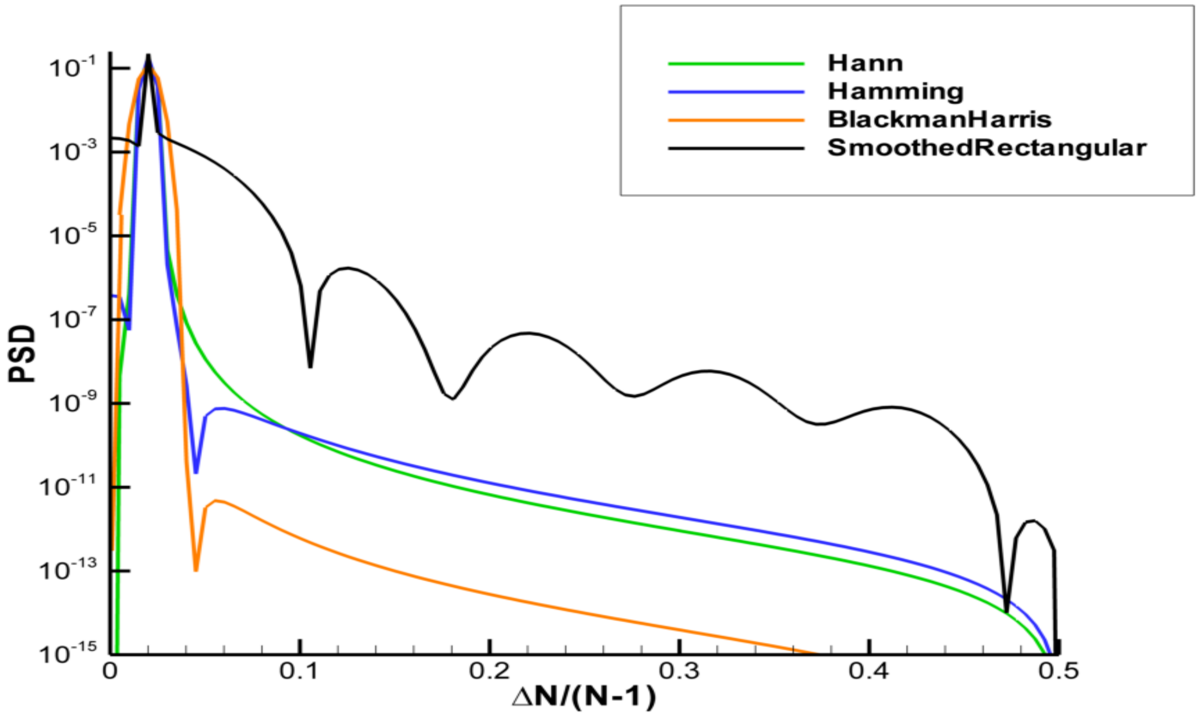


Рисунок 6: Тестирование окон на скорость падения СПМ, тестовая последовательность Рисунок 2,b. Два окна с наибольшей скоростью падения и два с наименьшей.

4 Тестирование окон на типичных сигналах, получаемых в газодинамических задачах.

Для исследования были выбраны наборы данных, полученные по результатам решения двух типичных газодинамических задач.

В первой задаче сигнал представлял из себя зависимости давления (в 2 точках p_1 и p_2), полученные при решении задачи об обтекании двумерной каверны в рамках прямого численного моделирования.

Перед непосредственным анализом влияния окон необходимо выбрать количество сегментов для усреднения. На графике Рисунок 7 представлены спектры, полученные с использованием прямоугольного окна для различных значений параметра N_{avg}. Из представленных графиков видно, что оптимальное соотношение между «шумностью» сигнала и способностью разрешить особенности спектра достигается при N_{avg}=10.

Перейдем к рассмотрению влияния различных окон на спектр.

Сравнение окон проводится в полосе 20-1200Гц для спектра p2 и в полосе 20-1250Гц для p1, т.к. при больших частотах амплитуда спектра быстро стремится к нулю (см., например, «Рисунок 7, b») и спектр при столь малых интенсивностях не представляет практического интереса.

Результаты расчетов спектра p_1 показали, что окна можно условно разделить на 4 группы: 3 группы: A (Ханна, Гаусса, Хэмминга), B (Бартлетта, Треугольное), C (Блэкмана, Наттала, Блэкман-Харриса, Блэкман-Наттала), в которых полученный спектр практически одинаков; и четвертая группа D (Прямоугольное, Сглаженное прямоугольное, Плоская вершина). На рисунке «Рисунок 8» показаны первые 3 группы, а также, на рисунке «Рисунок 8,d» показано сравнение групп между собой (сравнивается по одному представителю от каждой группы). При этом видно, что эти группы и между собой отличаются очень слабо, из особенностей стоит указать то, что группа C дает более гладкие спектральные оценки, что в частности приводит к тому, что пики на частотах порядка 383Гц и 472Гц, несколько сливаются, что свидетельствует о способности «смазывать» спектр при использовании этих окон.

На рисунке «Рисунок 9» проводится сравнение окон группы D с типичными представителями группы A («Рисунок 9,a») и группы B («Рисунок 9,b»). Из «Рисунка 9» видно, что окна групп A и B (красные кривые на обоих графиках) в целом дают более четкие пики, чем окна группы D, при этом окно плоская вершина дает оценки с наименьшим разрешением пиков, кроме того недооценивает величину пиков.

По результатам рассмотрения спектров для точки p_2 можно сказать, что окна входившие в группы A-C дали очень близкие результаты. Эти результаты могут быть условно разбиты на две группы: E (окна Ханна, Хэмминга, Гаусса, Бартлетта, Блэкмана, Треугольное), F (окна Наттала, Блэкмана-Харриса, Блэкмана-Наталла), внутри которых различия в спектральных оценках практически отсутствуют. На рисунке «рисунок 10» показаны группы E («Рисунок 10,a») и F («Рисунок 10,b»), а также сравнение группы F с типичным представителем группы E («Рисунок 10,b»). При этом из рисунка «Рисунок 10,b» видно, что окна группы E дают более четкий спектр: они описывают пять спектральных пиков на частотах: 237Гц, 374Гц, 477Гц, 539Гц, 614Гц; в то время как окна группы F смазывают слабый пик на частоте 539Гц. Поэтому можно считать, что они несколько хуже окон группы E.

Как и в случае точки p_1, окна группы D оказались существенно хуже остальных.

Так как окна группы F несколько уступают окнам группы E, то группа G сравнивалась с типичным представителем группы E (окно Ханна), данное сравнение представлено на рисунке «Рисунок 11». Из него видно, что не одно из окон группы G даже близко не подходит к группе E по разрешающей способности, при этом окно плоская вершина, дает самый размазанный спектр.

Во второй задаче рассматривается экспериментальная зависимость коэффициента сопротивления c_τ крылового профиля NACA0021, обтекаемого под углом 60°. Аналогичные исследования зависимости спектра от параметра N_{avg} показали, что наиболее удачным является значение N_{avg}=20.

На рисунке «Рисунок 12» приведены спектры, получаемые с применением различных окон. Видно, что спектр с применением всех окон оказывается практически идентичным. В этом случае невозможно четко установить превосходство одних окон над другими.

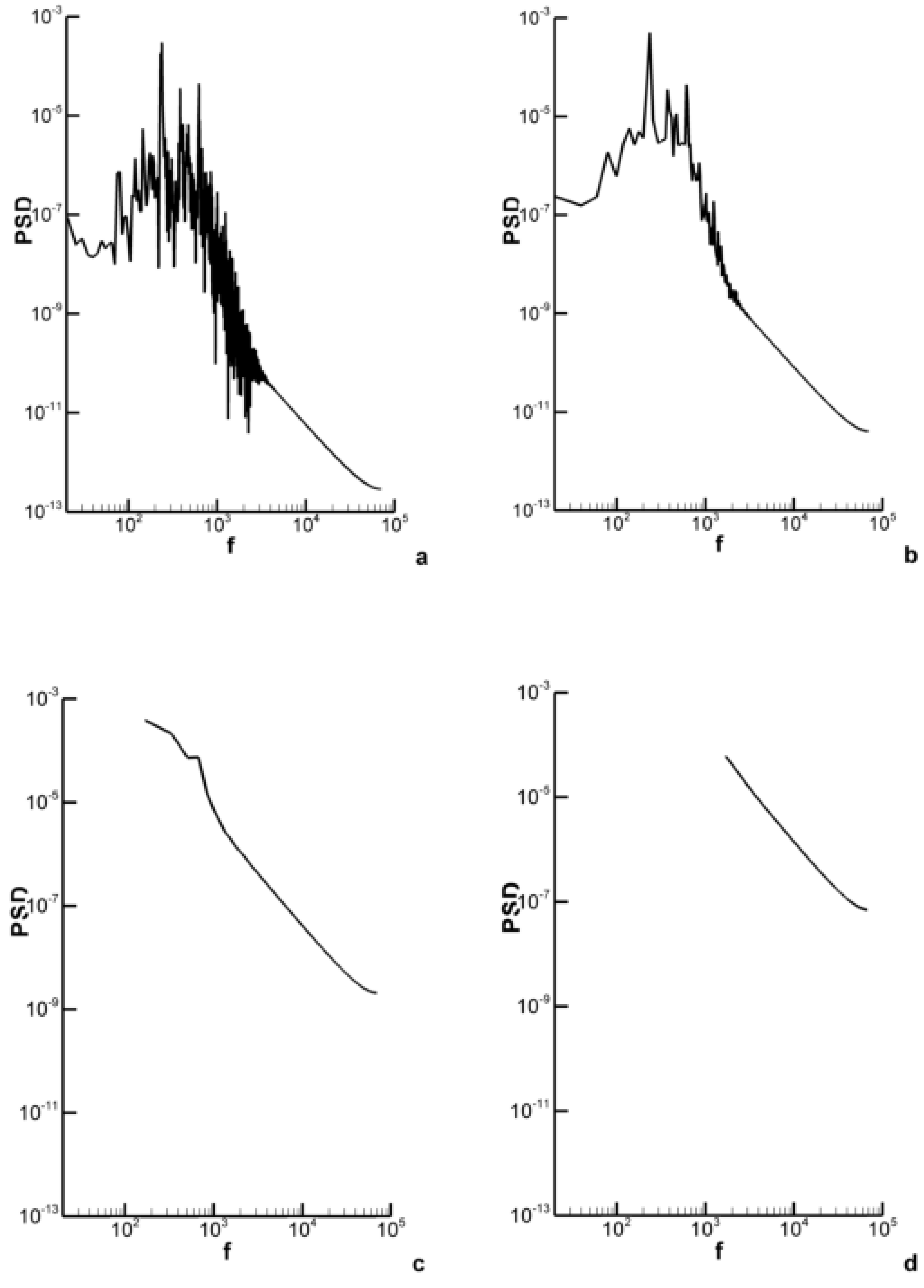


Рисунок 7: Влияние количества сегментов на спектр.
a. N_{avg}=1
b. N_{avg}=10
c. N_{avg}=100
d. N_{avg}=1000

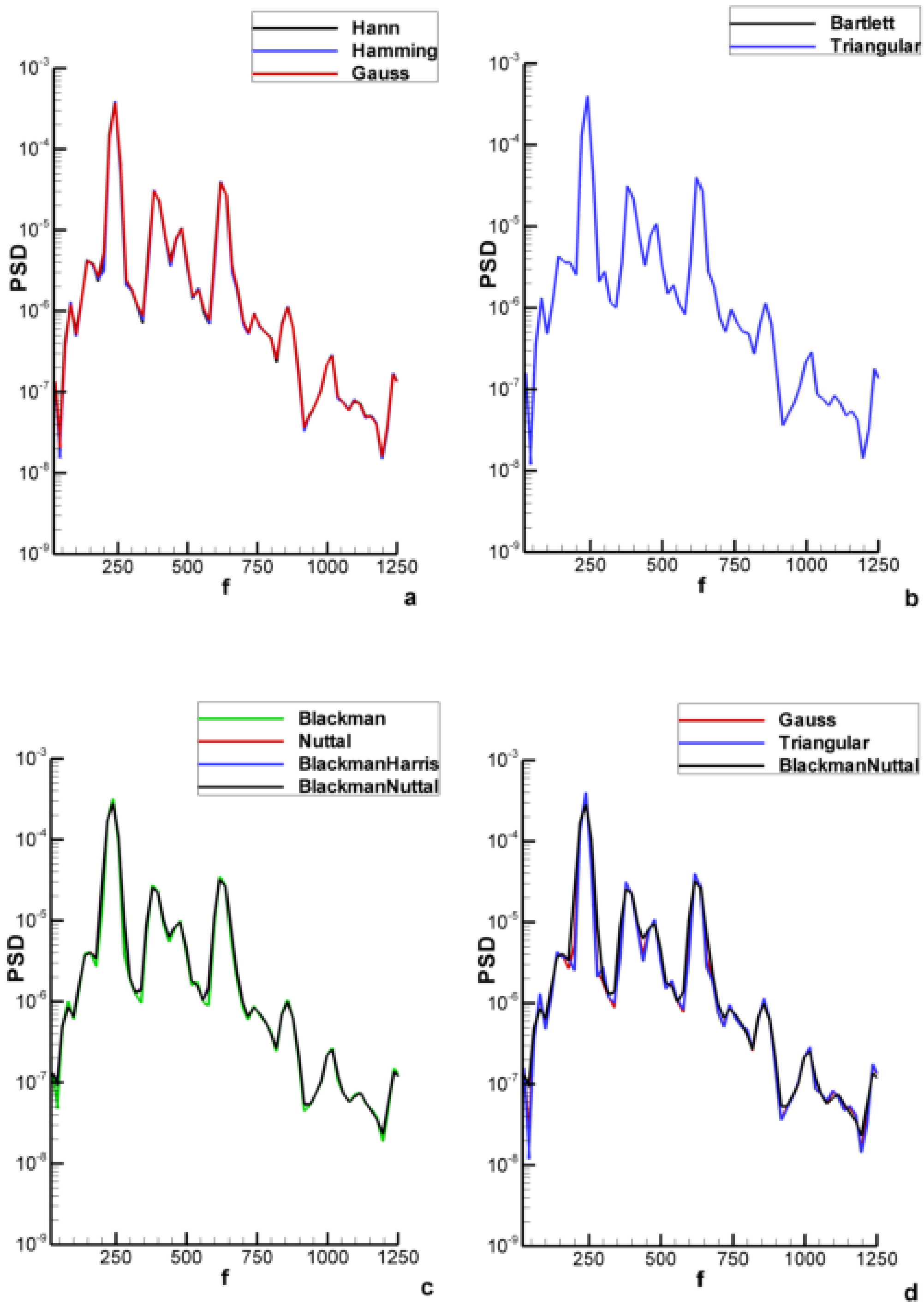


Рисунок 8: Группы окон дающие одинаковый спектр для p_1, сравнение групп

a. Группа A: окна Ханна, Гаусса, Хэмминга

b. Группа B: окна Бартлетта, Треугольное

c. Группа C: Блэкмана, Наттала, Блэкман-Харриса, Блэкман-Наттала

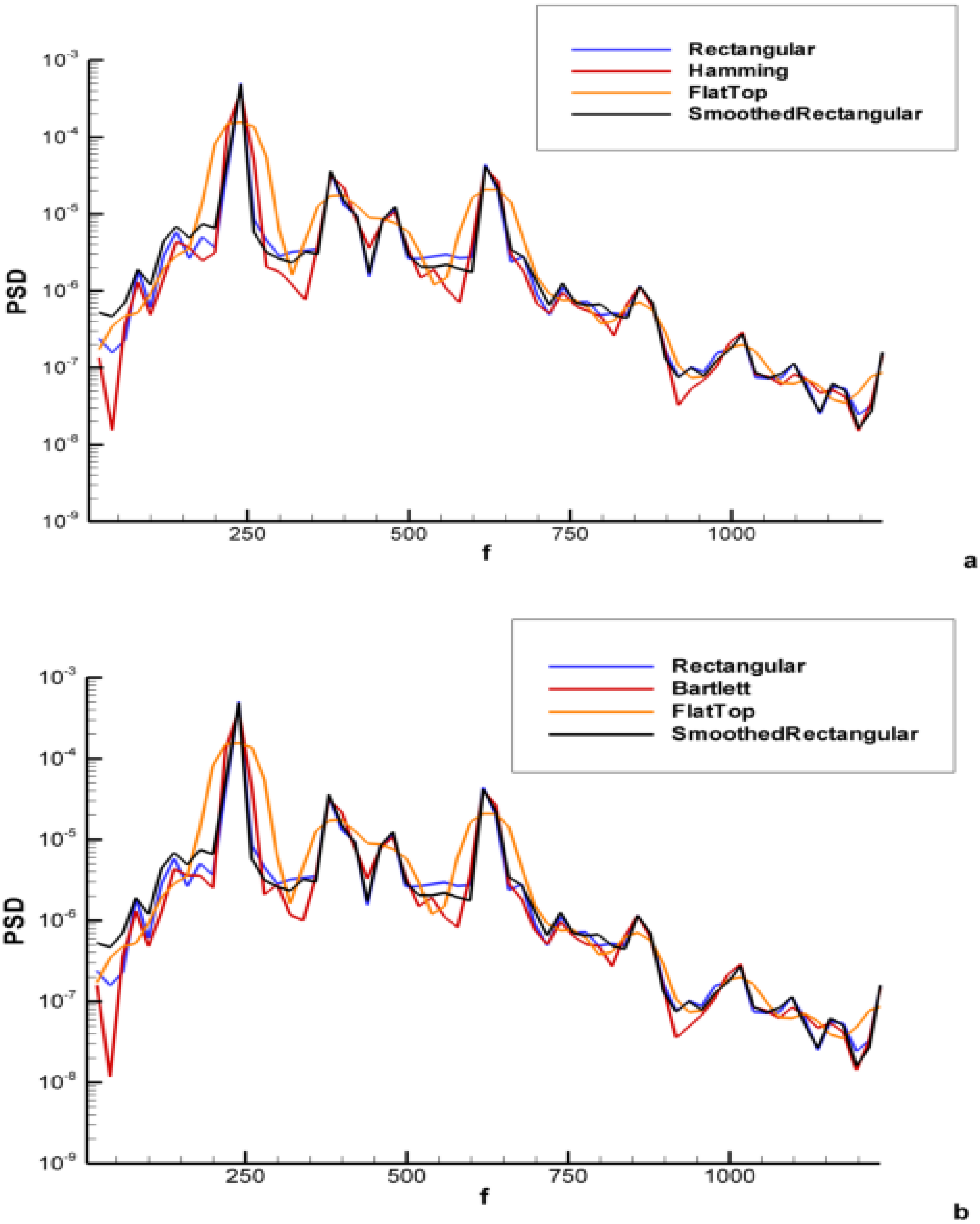


Рисунок 9: Сравнение группы окон D с типичными представителями групп A и B (окна Хэммига и Бартлетта, соответственно)

a. Сравнение группы D (окна Прямоугольное, Сглаженное прямоугольное, Плоская вершина) с типичным представителем группы A (окно Хэмминга)

b. Сравнение группы D (окна Прямоугольное, Сглаженное прямоугольное, Плоская вершина) с типичным представителем группы B (окно Бартлетта)

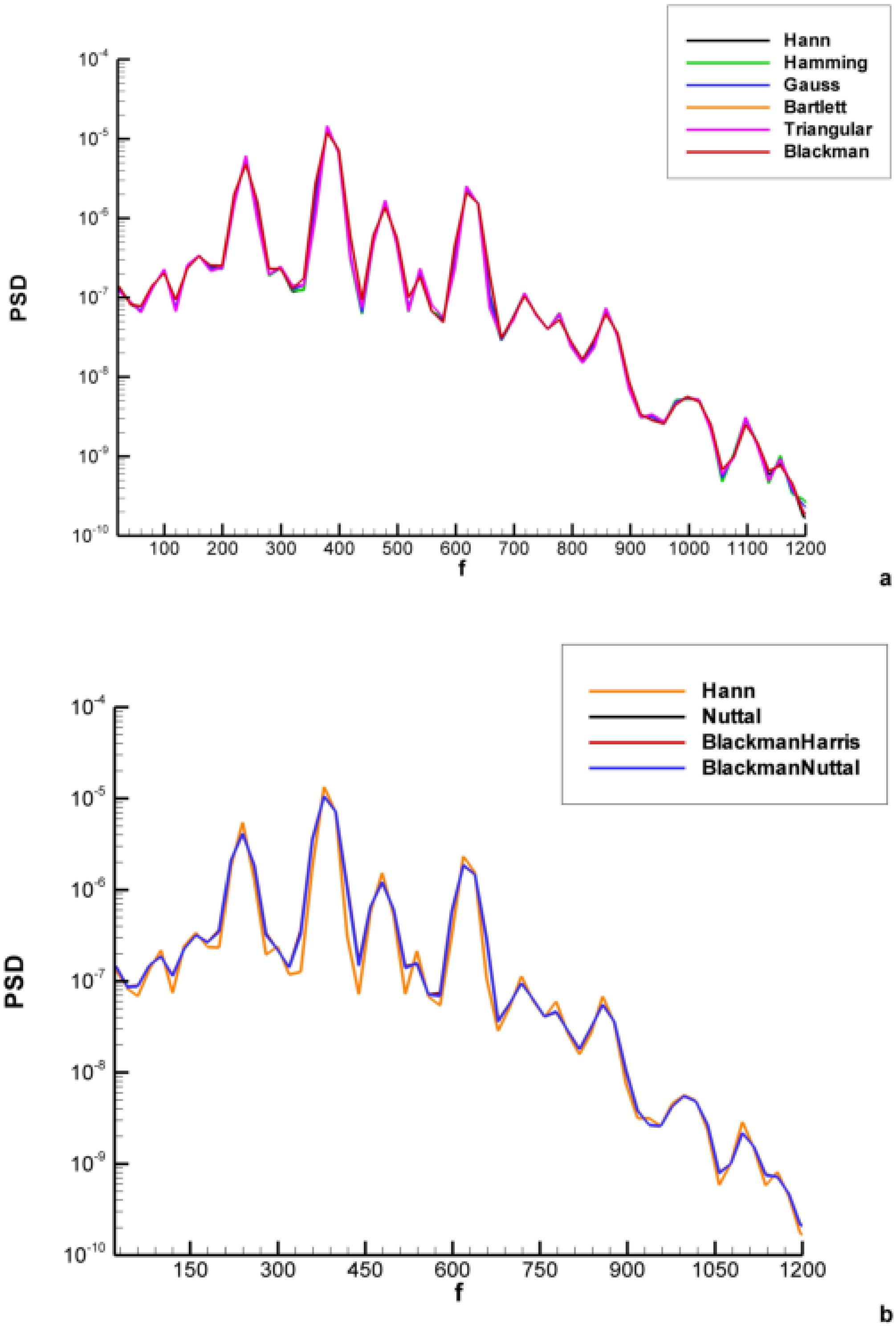


Рисунок 10: Группы окон дающих одинаковый спектр для p_2 сравнения групп
a. группа E окна: Ханна, Хэмминга, Гаусса, Бартлетта, Блэкмана, Треугольное
b. группа F окна: Наттала, Блэкмана-Харриса, Блэкмана-Наталла; сравнение с представителем группы E: окно Ханна.

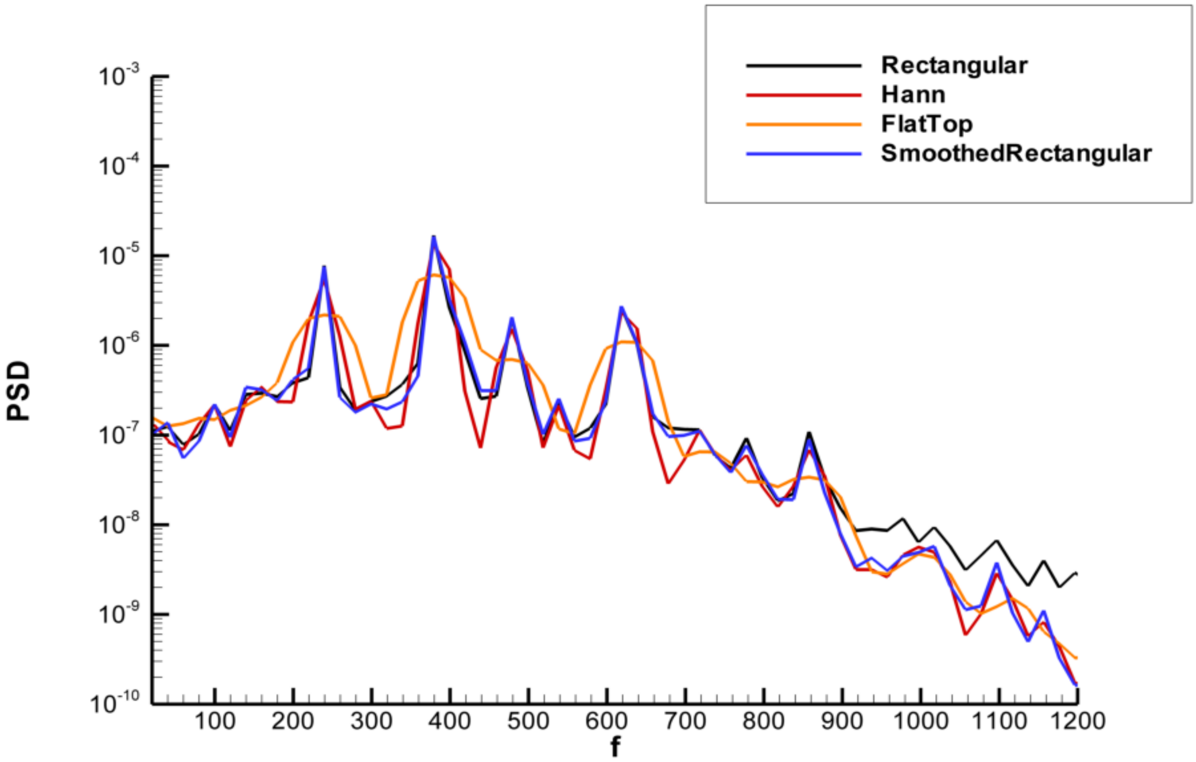


Рисунок 11: Сравнение группы окон G (окна Прямоугольное, Плоская вершина, Сглаженное Прямоугольное) с типичным представителем группы E (окно Ханна)

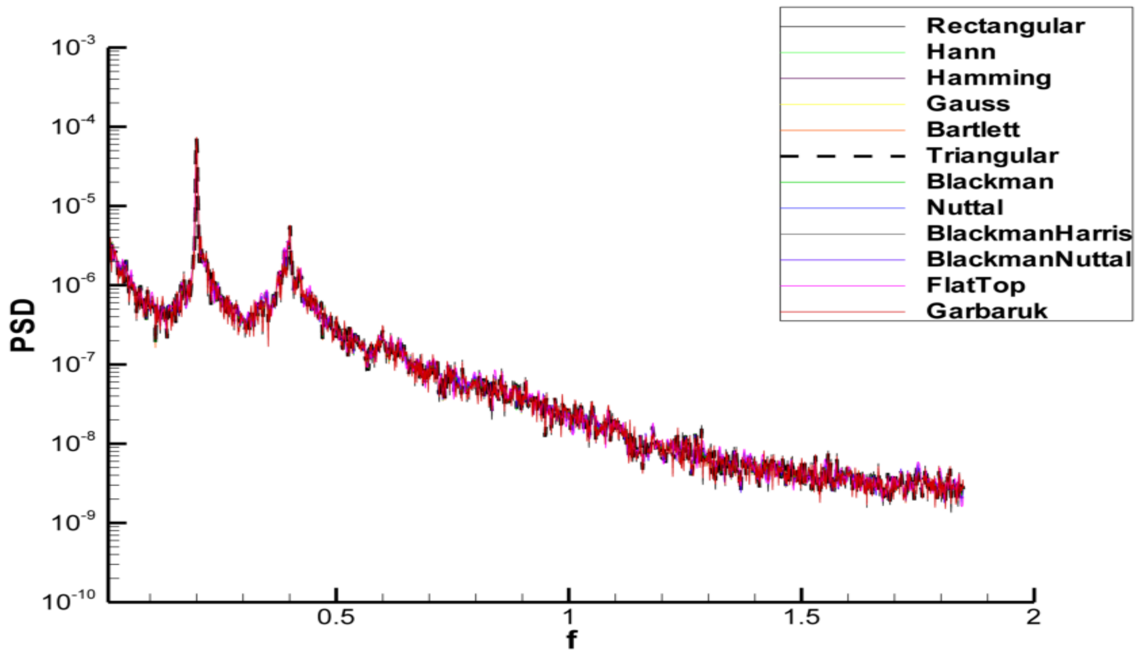


Рисунок 12: Спектр касательного коэффициента сопротивления.

5 Выводы.

5.1 Разработана программа для оценки СПМ периодограммным методом Уэлча. В программу введена возможность обработки данных с помощью 12 различных окон.

5.2 Показано, что при получении спектров имеет смысл использовать процедуру усреднения (в случае достаточного количества отсчетов).

5.3 Выводы о качестве окна существенно зависят от рассматриваемого сигнала. Так окна Гаусса, Блэкмана-Харриса и Хэмминга не очень хорошо показали себя на гармонических сигналах, в тоже время они дают одни из лучших оценок для типичных газодинамических сигналов. А, например, Прямоугольное окно, неплохо проявившее себя на гармонических сигналах, дает провальные результаты на типичных газодинамических сигналах. В то же время для исследования спектра c_τ все окна одинаковы пригодны.

5.4 Лучшими являются окна Ханна, Хэмминга, Бартлетта и Гаусса

5.5 Худшими окнами оказались: Прямоугольное, Сглаженное прямоугольное и Плоская вершина.

6 Литература.

1. С.Л. Марпл-мл. «Цифровой спектральный анализ и его приложения», М. Мир, 1990г
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Window_function
3. Sven Peth, Dandy Eschricht. «DFTAVG User Manual a Fourier Transform Tool»