Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» Физико-механический факультет Кафедра гидроаэродинамики

> Работа допущена к защите Зав. кафедрой _____Е.М.Смирнов "_____2008 г.

«Разработка алгоритма основанного на интегральном преобразовании Абеля и его приложение к измерению плотности в газовой струе»

Выпускная бакалаврская работа по направлению подготовки 010600 – Прикладные математика и физика

Выполнил студент гр. 4054/2 Руководитель, доцент Д.А. Блохин А.В. Гарбарук

Санкт-Петербург 2008

Содержание

Введение	3
Интегральное преобразование Абеля	5
Методические исследования	8
Исследование зависимости погрешности от количества точек	8
Исследование зависимости погрешности от уровня шума в	исходном
распределении яркости.	10
Применение метода к экспериментальной фотографии	14
Заключение	16

Введение

В лаборатории газовой динамики ФТИ им. Иоффе РАН проводится экспериментальное исследование осесимметричной сверхзвуковой струи истекающей в вакуум из сопла Лаваля (а на рис.1). Для визуализации течения используется мощный плазменный источник света (b на рис.1), под влиянием которого электроны атомов газа в струе переходят на более высокие энергетические уровни. Спонтанный обратный переход на более низкие уровни приводит к свечению газа, причем яркость свечения пропорциональна количеству атомов на единицу объема, т.е. плотности газа.

Полученное свечение фотографируется на цифровую фотокамеру. При этом используются различные светофильтры, которые позволяют добиться наибольшего разрешения градаций яркости.



Рисунок 1. Фотография свечения струи, полученная при экспериментах в лаборатории газовой динамики ФТИ им. Иоффе РАН

Предполагая, что яркость люминесцентного свечения точки в пространстве пропорциональна плотности вещества, можно сказать, что яркость точки на фотографии пропорциональна интегралу от плотности по прямой, перпендикулярной плоскости фотографии. В предположении осесимметричности струи по фотографии можно восстановить радиальное распределение плотности газа в струе с точностью до множителя. Для определения этого множителя необходимо привлечь дополнительные соображения, поскольку он не может быть определен непосредственно из фотографии. Таким образом, можно сформулировать основные цели данной работы:

- Разработать алгоритм восстановления радиального распределения плотности из экспериментальных фотографий
- Оценить точность алгоритма в зависимости от разрешения фотографии (количества точек поперек струи)
- Оценить влияние ошибок эксперимента на точность алгоритма и попытаться уменьшить это влияние при помощи сглаживания
- Применить разработанный алгоритм к экспериментальной фотографии струи.

Интегральное преобразование Абеля

Рассмотрим сечение струи, перпендикулярное ее оси (рис.2). Видимая яркость точки на фотографии (рис. 1) при заданном значении координаты y пропорциональна интегралу от плотности по лучу F(y) (А на рис. 2).

В случае осевой симметрии интеграл F(y) связан с радиальным распределением яркости f(r) интегральным преобразованием Абеля:

 $F(y) = 2\int_{y}^{1} \frac{f(r)rdr}{\sqrt{r^{2} - y^{2}}}$ - прямое преобразование Абеля. $f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_{r}^{1} \frac{dF}{dy} \frac{dy}{\sqrt{y^{2} - r^{2}}}$ - обратное преобразование Абеля.



Рисунок 2. Иллюстрация к преобразованию Абеля: поперечное сечение круглой струи

Поскольку данные о яркости извлекаются из цифровой фотографии, они неизбежно являются дискретными с шагом дискретизации определяемым разрешением фотографии. Таким образом, полученное из эксперимента распределение F(y) будет кусочно-постоянной функций (рис. 3).



Рисунок 3. Типичное распределение F(y)*, полученное из эксперимента*

Основываясь на кусочно-постоянном виде функции F(y) был разработан следующий рекуррентный алгоритм реализации обратного преобразования Абеля. Так как функция F(y) принимается кусочно-постоянной на заданных интервалах, то область интегрирования разбивается на прямоугольники так, как это показано на рисунке 4.



Рисунок 4. Поясняющий рисунок к алгоритму нахождения f(r) из распределения F(y).

Введем следующие обозначения

 r_i - координаты краев пикселей с фотографии, отсчитываемые от оси струи, где і принимает значение от 0 до n.

 $y_i = r_i + \Delta y/2$ - координата середины пикселя с фотографии, отсчитываемая от оси струи, где і принимает значение от 0 до n-1 (n – количество точек исходного распределения яркости), а Δy - ширина пикселя на исходной фотографии.

Из рисунка 4 видно, что значение F(y) можно разбить на несколько частей (например, 1, 2, 3 рис. 4), на каждой из которых значение f(r) постоянно.

Основываясь на этом разбиении был построен рекуррентный алгоритм обратного преобразования Абеля. В этом алгоритме значение $f(r_i)$ определяется на основе значения $F(y_{i-1})$ и $f(r_i)$, где $n \ge j > i$:

$$f(r_i) = \frac{F(y_{i-1}) - 2\sum_{j=0}^{n-i} f(r_{i+j+1})(\sqrt{r_{n-j}^2 - r_{i-1}^2} - \sqrt{r_{n-j-1}^2 - r_{i-1}^2})}{2\sqrt{r_i^2 - r_{i-1}^2}}.$$

Соответствующие этому алгоритму прямое преобразование Абеля имеет вид:

$$F(y_{i-1}) = 2\sum_{j=0}^{n-i-1} f(r_{i+j+1}) \left(\sqrt{r_{n-j}^2 - r_{i-1}^2} - \sqrt{r_{n-j-1}^2 - r_{i-1}^2}\right)$$

Методические исследования

Возможные погрешности полученного радиального распределения f(r) могут иметь две причины. Во-первых, экспериментальный сигнал является дискретным, а во-вторых, функция F(y) может иметь экспериментальные погрешности. Для того, чтобы оценить чувствительность разработанного метода к дискретности и неточности исходных данных был проведен ряд методических исследований.

Исследование зависимости погрешности от количества точек.

Рассмотрим функцию $f(r) = \cos(r\pi/2)$ на участке 0 < y < 1 (рис. 5). Применение прямого преобразования Абеля с заведомо большим количеством точек (в данном случае их было выбрано 1000) позволяет получить "исходное" распределение F(y) (рис. 6).



Рисунок 5. Исходная функция $f(r) = cos(r\pi/2)$



Рисунок 6. "исходное" распределение F(y)

К "исходному" распределению функции F(y) (рис. 6) ,был применен разработанный алгоритм обратного преобразования Абеля на меньшем количестве точек. Полученная функция f(r) сравнивалась с "эталонной" (рис. 5). Исследования были проведены на 5 распределениях: 100, 50, 25, 13 и 7 точек.



Рисунок 7. Зависимость погрешности от количества точек

На рисунке 7 представлена зависимость погрешности (определяемой как максимальное значение модуля относительной разницы полученной и "исходной" функции f(r)). Видно, что точность метода существенно зависит от количества точек в распределении. Так, для достижения 10% точности количество точек должно быть не меньше 25, а для 5% - 50.

Исследование зависимости погрешности от уровня шума в исходном распределении яркости.

Вторым проведенным исследованием было исследование зависимости погрешности от уровня шума в исходном распределении яркости. Это исследование было сделано по той причине, что данные, полученные с фотографии, могут иметь некоторые погрешности, и было нужно узнать насколько сильно их влияние на восстановленную функцию.

За исходное распределение бралось распределение из 100 точек, соответствующее рис. 6. В это распределение вносился шум разного уровня, применялось обратное преобразование Абеля и полученная функция f(r) сравнивалась с "эталонной" (см. рис. 8). Видно, что даже незначительное возмущение функции F(y) приводит к существенным погрешностям в f(r).



Рисунок 8. Пример восстановленной функции. С внесенным в исходное распределение *F*(*y*) шумом и без него.

Исследования проводились при уровне шума в 1, 3 и 5%. Зависимость погрешности восстановленной функции от уровня шума представлена на рис. 9 из которого также видно, что шум оказывает очень сильное влияние на полученный результат. Так, например, 5% шум уже дает погрешность в 300%. Из этого можно заключить, что по исходным данным с более чем 3% шумами нельзя достоверно восстановить радиально распределение плотности.



Рисунок 9. Зависимость погрешности восстановленной функции от уровня шума

Для уменьшения влияния шумов в данной работе использовалось сглаживание исходного сигнала, производимое по формуле $y_i^{n+1} = y_i^n + \alpha (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})^n$, где нижний индекс – номер элемента, а верхний – номер итерации. Коэффициент α и количество итераций являются параметрами этого сглаживания. После предварительных экспериментов было выбрано фиксированное значение $\alpha = 0.05$.

Из рис. 10, на котором приведен пример сглаживания распределения с 3% шумом, видно, что сглаживание в значительной степени убирает шум.

На рис. 11 и 12 приведены распределения зависимости погрешности функций F(y) и f(r) от количества сглаживаний. Видно, что при 100 итерациях погрешность F(y) уменьшается с 3 % до 0.5 %, а погрешность f(r) составляет 4%.

Полученные результаты показывают, что при применении обратного преобразования Абеля к экспериментальным сигналам необходимо использовать сглаживание. Параметры сглаживания должны подбираться исходя из вида конкретного сигнала.



Рисунок 10. Влияние сглаживания на вид исходной функции F(y)



Рисунок 11. Зависимость погрешности распределения яркости после сглаживания от количества итераций.



Рисунок 12. Зависимость погрешности восстановленной функции от количества итераций

Применение метода к экспериментальной фотографии.

В качестве объекта для применения разработанного алгоритма был выбран фрагмент фотографии, полученной в лаборатории газовой динамики ФТИ им. Иоффе РАН (рис. 13).



Рисунок 13. Исходная фотография

Струя на данной фотографии имеет примерно 40 пикселей от центра до периферии. На рис. 14 представлено одно из сечений струи и результаты сглаживания (α = 0.05 на 10). Значения яркости было отмасштабировано следующим образом: черный цвет принят за 0, а белый за 100. Фотография была заранее приведена в черно-белый вид. Единица по оси у соответствует 40 пикселям.



Рисунок 14. Исходное распределение яркости, снятое с фотографии и сглаженное.

Результат применения алгоритма к сглаженному распределению яркости в 10 сечениях представлен на рис 15.



Рисунок 15. Восстановленное радиальное распределение яркости в струе

Проведенные методические исследования позволяют оценить возможную погрешность распределения, представленного на рис. 15.

Так, погрешность, вносимая за счет малого количества точек составляет около 7%.

Погрешность, вносимая за счет шума после сглаживания может быть оценена в 15%, поскольку уровень шума исходного сигнала составляет около 1%-1.5%, что дает погрешность порядка 20% - 30%, но эта величина уменьшается за счет сглаживания примерно до 15% - 20%.

Таким образом, можно считать, что суммарная погрешность распределения, представленного на рис. 15, составляет не более 25%.

Заключение

Разработан алгоритм восстановления радиального распределения плотности в струе газа из экспериментальных фотографий.

Проведены исследования зависимости погрешности алгоритма от количества точек в исходном распределении яркости и от вносимых в исходное распределение шумов; было реализовано сглаживание исходных данных с целью уменьшения влияния шумов. Результатом этих исследований стали зависимости погрешности получаемого результата от указанных выше факторов, на основе которых можно оценить точность алгоритма.

Разработанный метод применен к экспериментально полученной фотографии и было получено поле радиального распределения плотности в струе. Также была проведена оценка погрешности полученного результата и показано, что она составляет не более 25%.

Список литературы:

[1] Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: основы реконстуктивной томографии. Пер. с англ. М.:Мир, 1983. 352 с.

[2]www.ru.wikipedia.org/wiki/Интегральное_преобразование_Абеля