МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Физико-механический факультет
Кафедра гидроаэродинамики

Работа допущена к защите
Зав.кафедрой,
_____ Смирнов Е. М.
"___"_____ 2012 г.

Численное решение двумерных задач динамики вязкой жидкости методом Lattice Boltzmann

Выпускная бакалаврская работа по направлению подготовки
010600 – Прикладные математика и физика

Выполнил студент гр. 4054/1 Гусева Е. К.

Руководитель Адамьян Д. Ю.

Санкт-Петербург
2012

Содержание

1. Введение 3
2. Метод решеточных уравнений Больцмана 4
3. Метод решеточных уравнений Больцмана для двумерной девятискоростной модели D2Q9 6
   - 3.1. Описание метода 6
   - 3.2. Граничные условия 10
     - 3.2.1. Условие непроницаемости и прилипания 10
     - 3.2.2. Условие заданной скорости на границе 11
4. Результаты расчетов 13
   - 4.1. Вихрь Тейлора-Грина 13
   - 4.2. Течение в начальном участке плоского канала 17
   - 4.3. Течение в каверне 22
   - 4.4. Течение в канале с внезапным расширением 25
5. Заключение 28
6. Список литературы 29
7. Приложение 30

1. Введение

Традиционно для решения задач гидродинамики применяются вычислительные методы, основанные на численном решении уравнений Навье-Стокса. Однако в последние 20 лет развивается альтернативный подход - метод решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann method или LBM), в котором для моделирования течения вязкой Ньютоновской жидкости решается дискретизированное уравнение Больцмана.

В настоящее время LBM достиг высокого уровня развития, и его возможности для ряда задач сопоставимы с возможностями традиционных методов решения уравнений Навье-Стокса. Созданы как коммерческие (PowerFLOW, XFlow), так и свободно распространяемые (Palabos) пакеты программ для расчета задач вычислительной гидродинамики, основанные на LBM.

Этот метод имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционным подходом, которые проявляются при моделировании многофазных и многокомпонентных течений, а также при обтекании пористых поверхностей. Кроме того, LBM является явным методом, поэтому естественным образом распараллеливается, что является особенно актуальным в связи с развитием технологий расчетов на графических процессорах.

В связи с этим представляет интерес реализация метода LBM и его апробация для расчета задач вычислительной гидродинамики.

Целью данной работы является **исследование точности 2-мерной 9-скоростной LBM-BGK модели применительно к расчету ламинарных течений, а также исследование влияния внутренних параметров метода.**

В качестве тестовых задач были выбраны: вихрь Тейлора-Грина – нестационарная задача, имеющая аналитическое решение, простейшие пристенные течения - течение в начальном участке канала и течение в каверне с движущейся крышкой, а также отрывное течение в канале с внезапным расширением.

2. Метод решеточных уравнений Больцмана

Кинетическое уравнение Больцмана для одночастичной функции распределения $f(\bar{r},\bar{\xi},t)$ без учета внешних сил имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\bar{\xi}\nabla f=\Omega, \qquad (1)$$

где Ω – интеграл столкновений, t - время, $\bar{r}=(x,y,z)$ - вектор пространственных переменных, $\bar{\xi}=(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ - вектор скорости частицы.

Макроскопические характеристики плотность $\rho(\bar{r},t)$ и скорость среды $\bar{u}(\bar{r},t)$ являются моментами функции распределения и находятся посредством интегрирования по всем возможным скоростям $\bar{\xi}$.

Дискретизация уравнения (1) производится в два этапа: на первом этапе осуществляется дискретизация в пространстве скоростей, а на втором этапе - дискретизация по времени и пространственным переменным. Для дискретизации в пространстве скоростей задается конечная совокупность векторов возможных скоростей $\{\bar{e}_k\}_{k=1}^{M}$, каждому вектору из заданной совокупности ставится в соответствие функция распределения, зависящая только от t и $\bar{r}$: $f_k(\bar{r},t)=f(\bar{r},\bar{e}_k,t), k=1,M$. Таким образом, уравнение (1) сводится к системе уравнений в частных производных относительно f_k:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}+\bar{e}_k\nabla f_k=\Omega_k \qquad (2)$$

- уравнение Больцмана с дискретными скоростями

Из этого уравнения, рассматривая равномерную по времени и по пространственным переменным сетку и предполагая, что частицы за шаг по времени перелетают в соседние узлы пространственной решетки (т. е. размер ячейки $\Delta\bar{r}_k=\bar{e}_k\Delta t$), может быть получено решеточное уравнение Больцмана:

$$f_k(\bar{r}+\bar{e}_k\Delta t,t+\Delta t)=f_k(\bar{r},t)+\Omega_k(f_k(\bar{r},t)). \qquad (3)$$

Более подробное получение решеточного уравнения Больцмана из (2) изложено в [1].

В методах LBM оператор столкновения обычно используется в виде BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) приближения, которое представляет собой линейную релаксацию к локальному равновесию:

$\Omega_k = (f_k^{eq}(\rho,\overline{u}) - f_k)/\tau$,

где τ – безразмерный параметр релаксации, а f_k^{eq} - равновесная функция распределения, имеющая вид:

$$f_k^{(eq)}(\vec{r},t) = w_k \rho(\vec{r})\left\{1 + 3\frac{(\vec{e}_k \cdot \vec{u})}{c^2} + \frac{9}{2}\frac{(\vec{e}_k \cdot \vec{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2}\frac{\vec{u}^2}{c^2}\right\}.$$

Здесь $c=\Delta x/\Delta t$ - базовая скорость в ячейке (Δx и Δt – шаг сетки и шаг по времени соответственно), а w_k - весовые коэффициенты, различные для разных моделей решеток и подбирающиеся так, чтобы при применении к уравнению (2) процедуры разложения Чепмена-Энскога получались уравнения Навье-Стокса [2].

Такой вид f_k^{eq} представляет собой разложение равновесной функции распределения Максвелла по скоростям $\vec{u}$ до членов третьего порядка малости.

Плотность жидкости ρ и скорость u в узле могут быть вычислены в соответствии с формулами:

$$\rho = \sum_{k=0}^{M} f_k$$

$$\rho\overline{u} = \sum_{k=0}^{M} \overline{e}_k f_k$$

Давление в соответствии с [1] рассчитывается по формуле $p = \rho\frac{c^2}{3}$.

3. Метод решеточных уравнений Больцмана для двумерной девятискоростной модели D2Q9

3.1 Описание метода

Для описания модели решетки в зависимости от размерности задачи и от набора возможных наборов скоростей вводится обозначение вида DpQn, где $p \in \{1, 2, 3\}$ - размерность физического пространства, а $n \in N$ - число возможных скоростей.

Наиболее распространенной моделью для двумерных задач гидродинамики является девятискоростная модель D2Q9, которая и реализована в данной работе в виде программы, написанной на языке Fortran.

На рисунке 1 показаны равномерная сетка в прямолинейных координатах (с размером ячейки *lu*) и возможные направления скоростей $\bar{e}_a$, где a=0…8 – индекс направления.

Скорость $\bar{e}_0 = 0$ означает, что частица находится в покое.

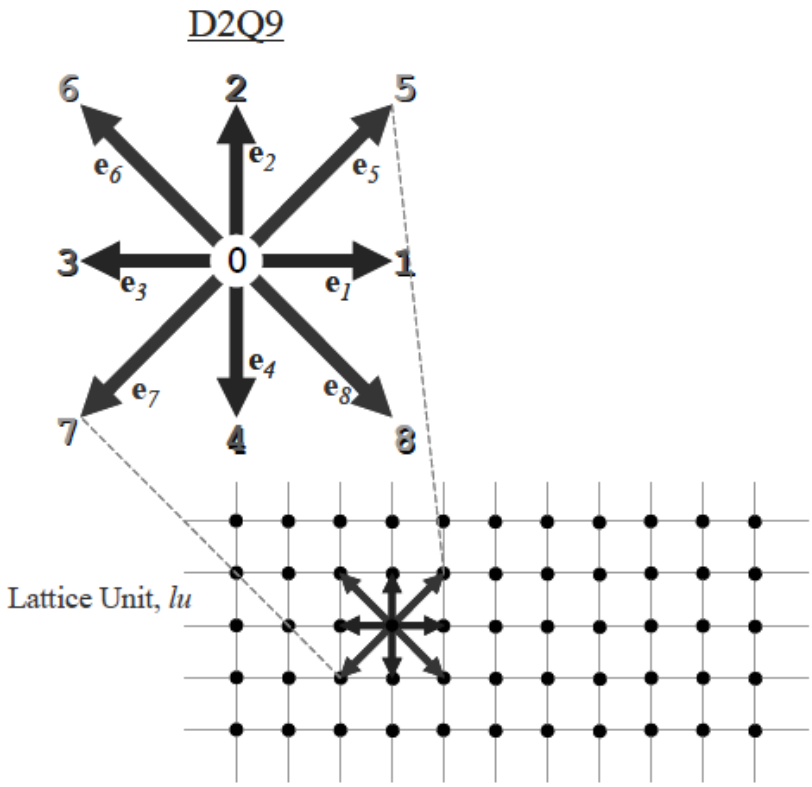

Рисунок 1. Возможные вектора скорости частиц в методе решеточных уравнений Больцмана для двумерной девятискоростной модели D2Q9

Определив базовую скорость в ячейке как $c = lu/ts$, где ts – величина шага по времени, получим, что величины скоростей $\bar{e}_1 = \bar{e}_2 = \bar{e}_3 = \bar{e}_4 = c$, а величины скоростей $\bar{e}_5 = \bar{e}_6 = \bar{e}_7 = \bar{e}_8 = \sqrt{2}c$. Компоненты скоростей, таким образом, равны или 0, или $\pm c$.

Решеточное уравнение Больцмана:

$$\underbrace{f_a(\vec{r} + \bar{e}_a \Delta t, t + \Delta t) = f_a(\vec{r}, t)}_{\text{перенос}} - \frac{1}{\tau}\underbrace{\left[f_a(\vec{r}, t) - f_a^{(eq)}(\vec{r}, t)\right]}_{\text{релаксация}}, \text{ где a=0,...,8} \qquad (4)$$

Один шаг по времени состоит из двух этапов: сначала происходит перенос, схема которого представлена на рисунке 2, а затем релаксация к равновесной функции распределения.

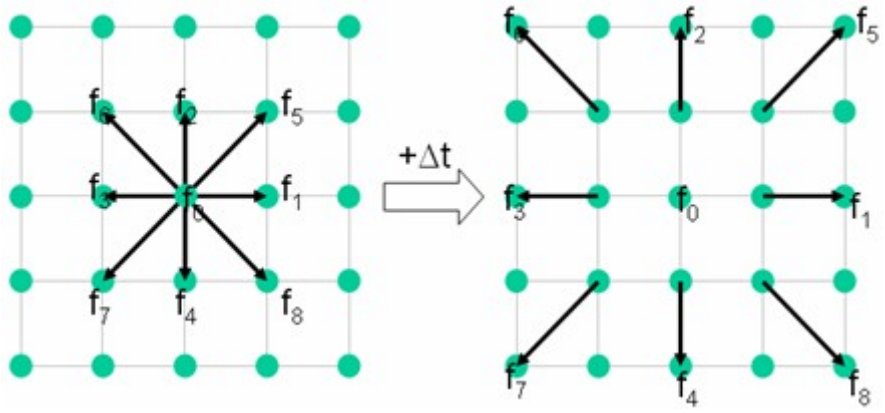

Рисунок 2. Перенос функций распределения за шаг времени

Равновесная функция:

$$f_a^{(eq)}(\vec{r}, t) = w_a \rho(\vec{r})\left\{1 + 3\frac{(\vec{e}_a \cdot \vec{u})}{c^2} + \frac{9}{2}\frac{(\vec{e}_a \cdot \vec{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2}\frac{\vec{u}^2}{c^2}\right\}, \qquad (5)$$

где весовые коэффициенты w_a согласно [2] определяются так:

$$w_a = \begin{cases} \frac{4}{9}, & \text{a=0} \\ \frac{1}{9}, & \text{a=1,2,3,4} \\ \frac{1}{36}, & \end{cases} \qquad (6)$$

Плотность жидкости ρ и скорость u вычисляются по формулам:

$$\rho = \sum_{a=0}^{8} f_a \tag{7}$$

$$\rho\bar{u} = \sum_{a=0}^{8} \bar{e}_a f_a \tag{8}$$

Из решеточного уравнения Больцмана для модели D2Q9 с помощью разложения Чепмена-Энскога можно вывести систему уравнений Навье-Стокса (подробный вывод приведен в приложении).

Решаемое дискретное уравнение (4) и функцию распределения (5) раскладывают в ряд по степеням малого параметра – шага по времени. Используя только первые два члена разложения уравнения, можно получить уравнение для гидродинамических величин:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 + O(\Delta t^2) + O\left(M^2\right)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u} + O\left(\Delta t^2\right) + O\left(M^3\right)$$

Оно отличается от уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости на величину второго порядка по шагу по времени, а также на величину второго порядка малости по параметру, который в терминах этого метода исторически принято называть числом Маха M, хотя по смыслу он является числом Куранта.

Этот параметр M рассчитывается по формуле:

$$M = \frac{u}{c}, \tag{9}$$

где u – масштаб скорости задачи, а c – уже упоминавшаяся базовая скорость.

Кинематическая вязкость жидкости в D2Q9 модели определена через параметр релаксации, размер сетки и временной шаг:

$$\nu = \frac{2\tau - 1}{6} \frac{lu^2}{ts}. \tag{10}$$

Решение физической задачи при числе Re=VL/ν (L - масштаб длины, V - характерная скорость, ν - кинематическая вязкость) в рамках этого метода производится следующим образом. В первую очередь выбирается размер ячейки *lu* и задается параметр релаксации τ (от 0.5 до 2). На их основе по формуле (10) рассчитывается временной шаг *ts* и определяется базовая скорость *c*. Затем необходимо проверить, что параметр M, рассчитанный по формуле (9), при таком выборе размера ячейки будет достаточно мал (согласно [5], параметр M должен быть не более 0.1).

При необходимости параметр M можно уменьшить либо измельчив сетку, либо уменьшив параметр релаксации, однако это может привести к неустойчивости (в соответствии с [5], самым «безопасным» значением является значение τ=1, соответствующее максимальному значению M).

3.2. Граничные условия

3.2.1. Условие прилипания и непроницаемости

На стенках для реализации условий непроницаемости и прилипания в LBM используется условие отскока. При таком подходе граница жидкости и стенки располагается между первым и вторым или, соответственно, предпоследним и последним рядами ячеек. При этом в крайних рядах не происходит релаксации к равновесной функции распределения, а вместо этого функции распределения f_a принимают значения функций распределения противоположного направления. Попавшие туда частицы возвращаются на следующем шаге назад в поток. На рисунке 3 показано, как происходит отскок на примере нижней границы области.

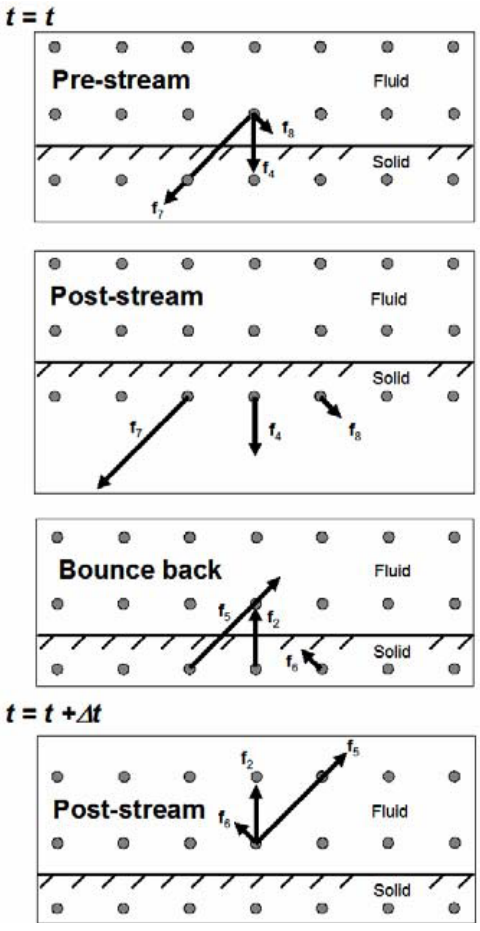

Рисунок 3. Иллюстрация схемы отскока

3.2.2. Условие заданной скорости на границе

Пусть на границе области задана скорость $\bar{u}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$, тогда нам необходимо определить плотность ρ и значения функций распределения. После шага переноса неизвестными будут функции распределения тех направлений, которые указывают из границы внутрь области.

Для нахождения неизвестных функций были использованы условия Зоу и Хе [3]. Рассмотрим, например, случай, когда граница находится сверху области (для других границ условия будут находиться аналогичным образом).

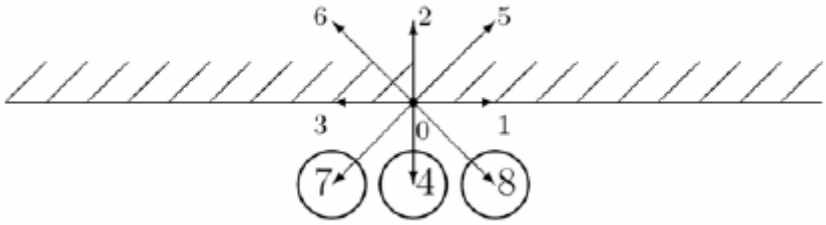

Рисунок 4. Неизвестные функции распределения для верхней границы

Из рисунка 4 видно, что для верхней границы области неизвестными нам функциями распределения будут являться f_4, f_7, f_8, для определения которых совместно с плотностью ρ необходимы 4 уравнения.

Первое из них – уравнение для расчета плотности:

$$\rho = \sum_{a=0}^{8} f_a \qquad (11)$$

Два уравнения могут быть получены из уравнения для расчета скорости на основе $\bar{u} = \frac{1}{\rho}\sum_{a=0}^{8} \bar{e}_a f_a$:

$$\rho u_0 = f_1 - f_3 + f_5 - f_6 - f_7 + f_8 \qquad (12)$$

$$\rho v_0 = f_2 - f_4 + f_5 + f_6 - f_7 - f_8 \qquad (13)$$

Наконец, четвертое уравнение, следуя Зоу и Хе [3], можно записать, предполагая, что выполняется условие равновесия в направлении, перпендикулярном границе:

$$f_2 - f_2^{eq} = f_4 - f_4^{eq} \tag{14}$$

Решение этой системы уравнений приводит к:

$$\rho = \frac{f_0 + f_1 + f_3 + 2(f_2 + f_5 + f_6)}{1 + v_0}$$

$$f_4 = f_2 - \frac{2}{3}\rho v_0$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) - \frac{1}{6}\rho v_0 - \frac{1}{2}\rho u_0$$

$$f_8 = f_6 - \frac{1}{2}(f_1 - f_3) - \frac{1}{6}\rho v_0 + \frac{1}{2}\rho u_0$$

Точно также, используя уравнения (11), (12), (13), (14), можно получить граничные условия для неизвестных функций распределения и скоростей в случае, когда задано давление на границе.

4. Результаты расчетов

4.1. Вихрь Тейлора-Грина

Первой модельной задачей, на которой был опробован метод LBM, была задача о вихре Тейлора Грина – нестационарная задача о диссипирующем вихре, имеющая аналитическое решение.

Расчетной областью, представленной на рисунке 5, является квадрат ABCD, со стороной AB=BC=CD=AD=2π (0≤x,y≤2π). При расчете использовалась равномерная сетка N×N.

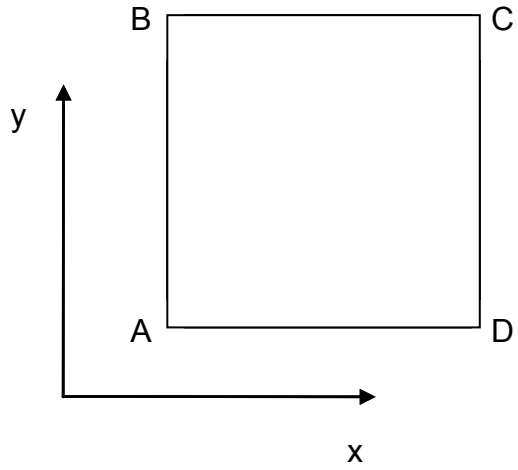

Рисунок 5. Расчетная область

Начальные поля скорости вихря Тейлора-Грина задавались так: $u = \sin x \cos y$, $\upsilon = -\cos x \sin y$. В качестве граничных условий задавалось условие периодичности по обоим направлениям.

С учетом этих начальных и граничных условий точное аналитическое решение уравнений Навье-Стокса имеет вид:

$$u = \sin x \cos y F(t)$$
$$\upsilon = -\cos x \sin y F(t)\text{'}$$

где $F(t) = e^{-2\nu t}$.

Расчет проведен для течения с числом Рейнольдса Re=30, рассчитанного по масштабу длины L=2π, и характерной скорости V=1.

На первом этапе было проведено исследование сеточной сходимости. Как уже было сказано, в данном алгоритме параметр M зависит от используемой сетки - ее измельчение ведет к уменьшению этого параметра.

В таблице 1 и на рисунке 6, на примере величины $\left|V_{\max} - V_{\max Theory}\right|$ в момент времени t=5, приведены результаты исследования сеточной сходимости. Видно, что начиная с сетки 50x50, решение сходится к аналитическому, что соответствует значению параметра M=0.1. Это значение согласуется с рекомендациями [5].

Таблица 1. Зависимость $\left|V_{\max} - V_{\max Theory}\right|$ от числа узлов N и параметра M

N	M	$\left\|V_{\max} - V_{\max Theory}\right\|$
21	0,250	0,00148
31	0,160	0,00059
51	0,100	0,00024
71	0,071	0,00006
91	0,056	0,00015
121	0,042	0,00003
151	0,033	0,00018

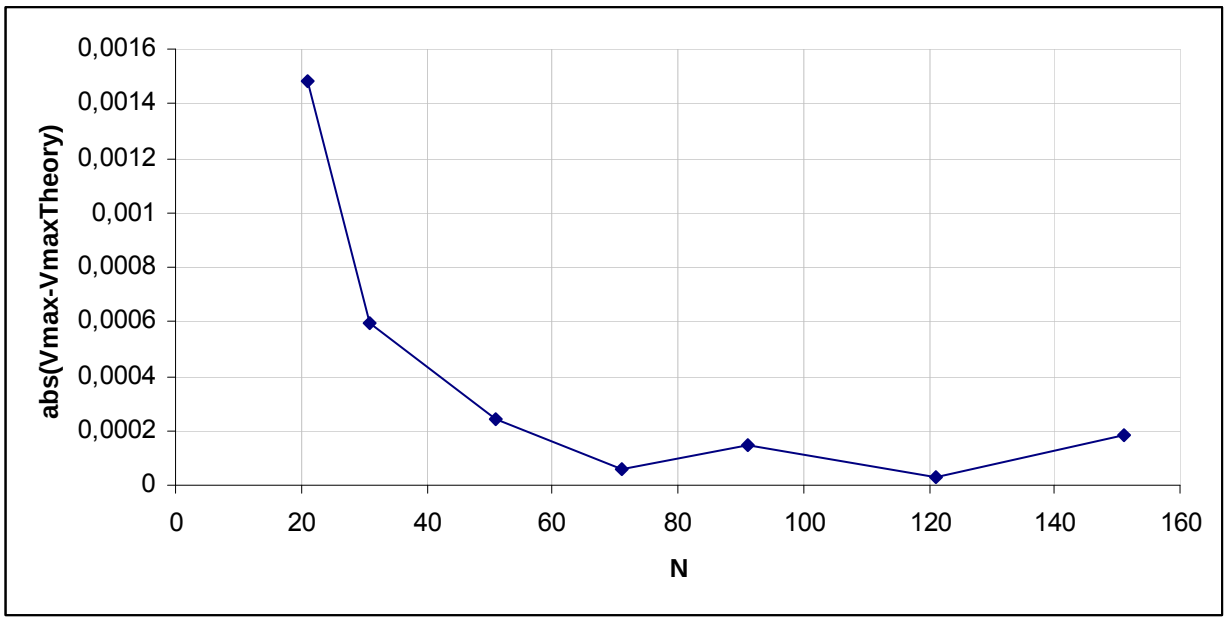

Рисунок 6. Сеточная зависимость

Из рисунка 7 видно, что поля скорости, полученные методом LBM, хорошо совпадают с аналитическим решением.

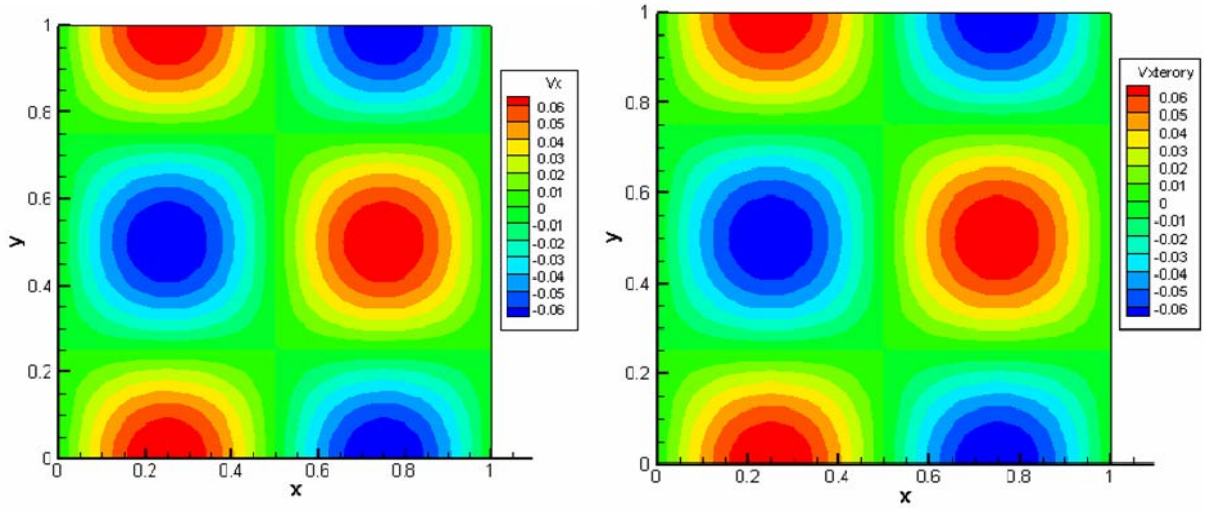

Рисунок 7 Поля Vx в момент времени t=500*Δt=6,28 полученные методам LBM и аналитически

Временная эволюция решения (таблица 2 и рисунок 8) также хорошо совпадает с аналитическим решением. Так, относительная погрешность, рассчитанная по формуле $\varepsilon = \frac{\left|V_{LBM} - V_{theory}\right|}{V_{theory}} \cdot 100\%$, не превышает 1%.

Таблица 2. Сравнение полученных максимальных значений скорости Vx с аналитическими данными

T	V_{LBM}	V_{theory}	ε, %
0	1,000	1,000	0,00
10	0,954	0,947	0,74
50	0,770	0,767	0,39
100	0,593	0,589	0,68
500	0,072	0,072	0,10
1000	0,005	0,005	0,03

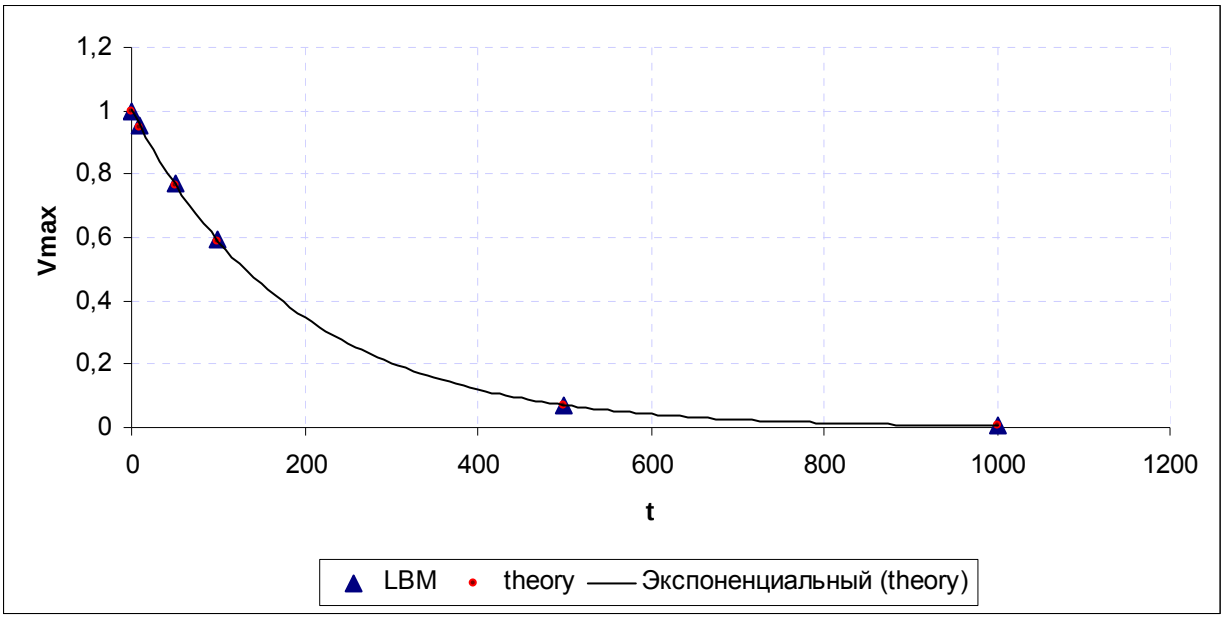

Рисунок 8. Зависимость максимального значения Vx от времени

Таким образом, на основании проделанных расчетов можно констатировать, что исследуемый метод обеспечивает высокую точность решения (погрешность менее 1%) на сетке, соответствующей значению параметра M=0.1.

4.2. Расчёт течения в начальном участке плоского канала

Следующей модельной задачей было ламинарное течение в начальном участке плоского канала. Расчетная область задачи представляет собой плоский канал ABCD высотой H и длиной L=5H (рисунок 9).

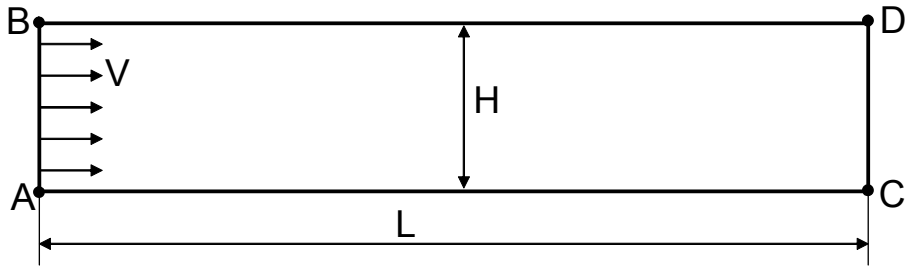

Рисунок 9. Расчетная область

На входной границе AB задается однородный профиль скорости U= $V_{вх}$=1, V=0, на выходной границе DC – постоянное давление P = 0. Границы AC и BD – твердые стенки.

Задача решается в безразмерной постановке для двух ламинарных режимов течения: Re = 20, 50. Использовалась одноблочная сетка с равномерным распределением узлов, причем Δx=Δy.

Исследование влияния расчетной сетки и связанного с ней параметра M было проведено на примере течения в канале с числом Рейнольдса Re=20 (таблица 3, рисунок 10). В ходе исследования было обнаружено, что скорость на оси канала оказывается завышенной по сравнению с теоретическим значением V_{max}=1.5. С уменьшением параметра M скорость на оси канала V_{max} стремится к теоретическому значению, но остается немного завышенной. Видно, что для достижения точности менее 1% необходима сетка, соответствующая M≤0.04. Таким образом, значение параметра M не является универсальным критерием оценки достаточности сетки.

Таблица 3. Зависимость максимальной скорости от числа M.

M	V_{max}
0,1150	1,7990
0,0854	1,6427
0,0667	1,5884
0,0556	1,5365
0,0390	1,5079
0,0224	1,5075

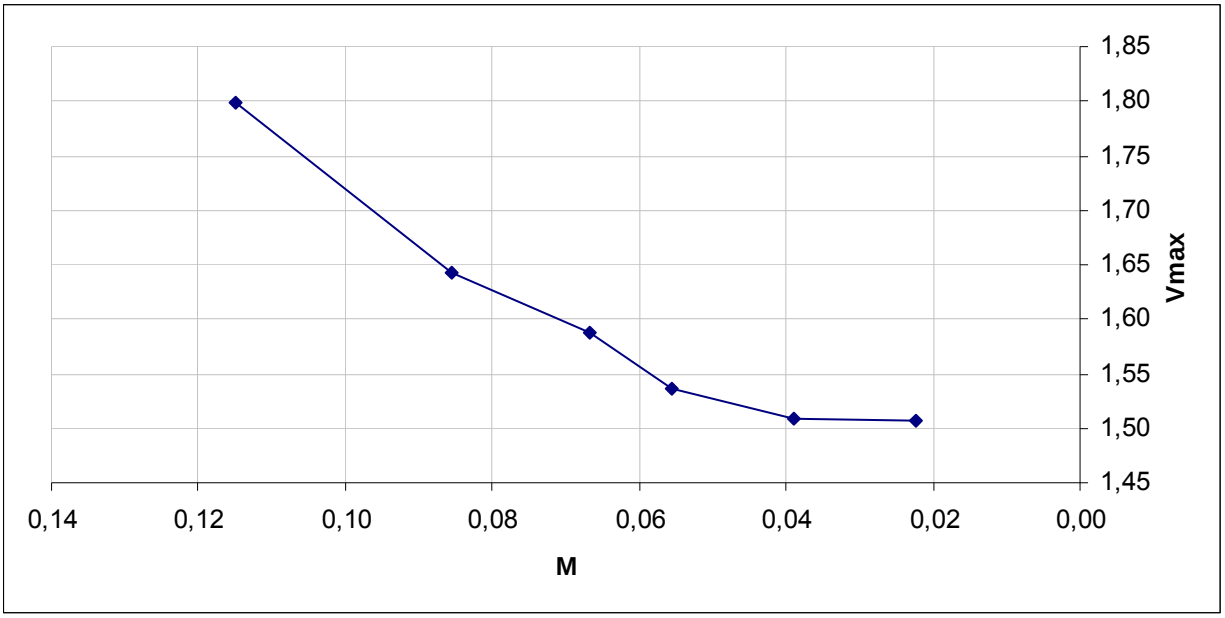

Рисунок 10 Зависимость максимального значения скорости от числа M.

Исследование влияния числа Рейнольдса на получаемое решение было проведено при параметрах, заданных в соответствии с таблицей 4.

Таблица 4. Параметры расчета

Re	N	τ	M
20	70	0,9	0.039
50	100	0,71	0.036

Здесь N – число ячеек на высоту канала H.

Поля скорости V_x соответствуют ожидаемым: в начале канала имеется начальный участок, а затем течение устанавливается, причем длина начального участка растет с увеличением числа Рейнольдса (рисунок 11).

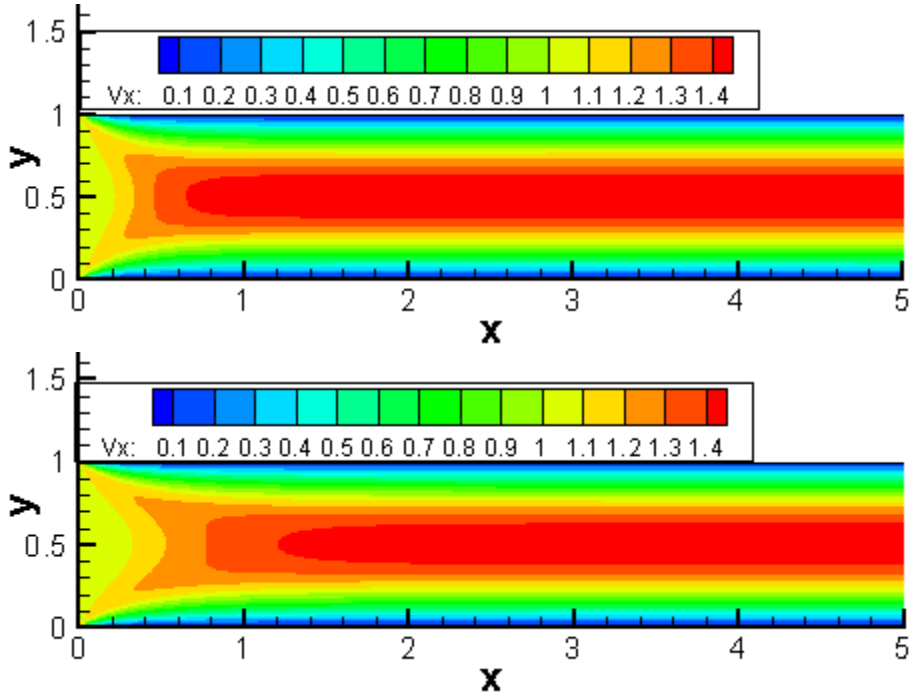

Рисунок 11. Распределение продольной компоненты скорости при Re=20 и Re=50

На рисунке 12 представлены профили скорости в различных сечениях в области начального участка и теоретический профиль скорости установившегося течения в плоском канале – парабола Пуазейля. Видно, что на начальном участке канала образуется μ-образный профиль, а далее вдоль оси канала профиль скорости стремится к параболе Пуазейля.

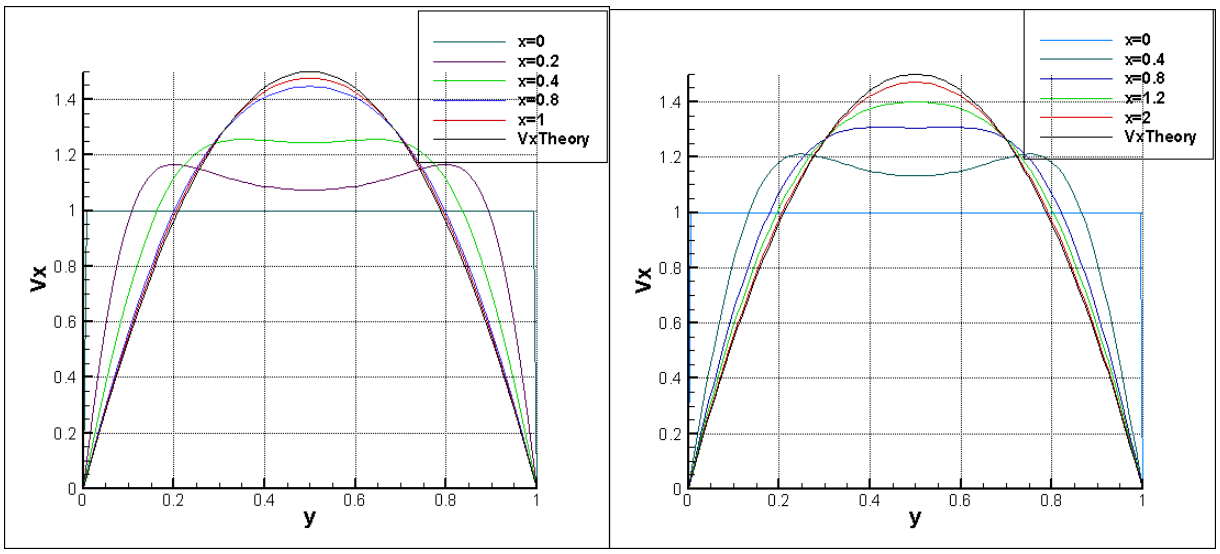

Рисунок 12. Профили скорости в различных сечениях при Re=20 и Re=50

Исследование зависимости скорости на оси канала показало, что при Re=20 эта скорость оказывается завышенной по сравнению с теоретическим значением V_{max}=1.5 и возрастает вдоль канала, а при Re=50 такого эффекта обнаружено не было (рисунок 13).

Сравнение длины начального участка (98% от максимальной скорости развитого течения $V_{max} = 1.5$) с теоретическим значением $L_{нач} = 0.04 \cdot Re$ [4] показало, что для Re=20 эта длина существенно завышена, в то время как для Re=50 наблюдается хорошее соответствие (таблица 5).

Причиной такой зависимости от числа Рейнольдса являются эффекты сжимаемости, присущие методу LBM. Эти эффекты определяются членами порядка O(M2), присутствующими в уравнениях (), определяющих эволюцию гидродинамических параметров. Уравнения () не соответствуют уравнениям Навье-Стокса для сжимаемого газа, поэтому LBM используют для несжимаемых течений, полагая M малым. Тем не менее, при конечном M эффекты сжимаемости присутствуют в решении.

Для канала при Re=20 падение давления на длине расчетной области составляет около 30% от начального, при этом относительное изменение плотности такое же. Этим и обусловлено отличие полей скорости для канала при Re=20 от результатов решения уравнений Навье-Стокса.

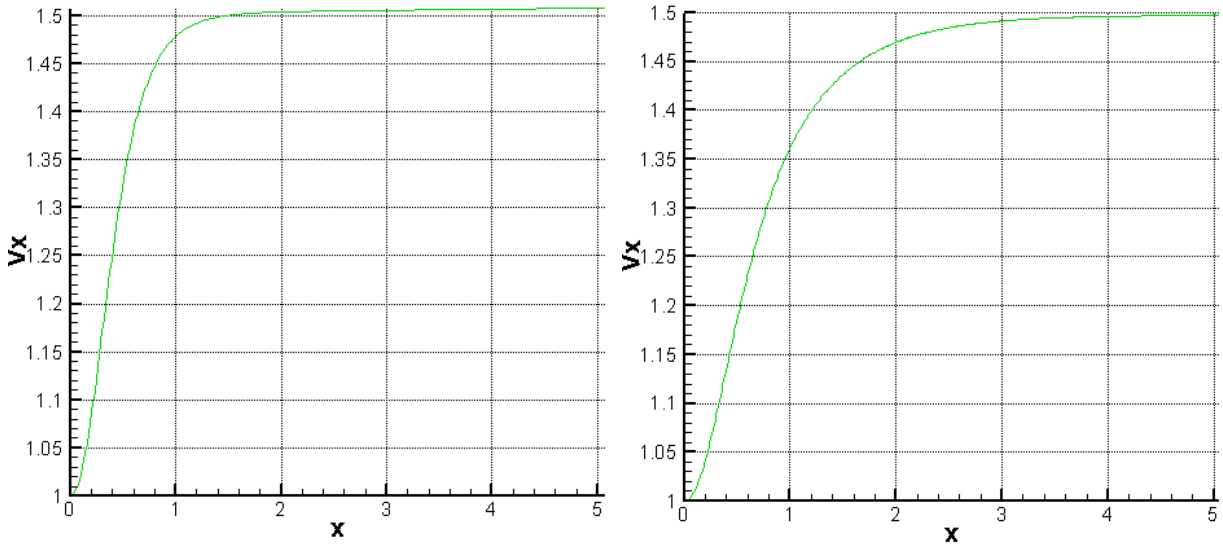

Рисунок 13. Зависимость скорости на оси канала от продольной координаты при Re=20 и Re=50

Таблица 5. Оценка точности длины начального участка

Re	$L_{нач}$	$L_{теор}$	ε, %
20	0,93	0,8	16,25
50	2,0	2,0	0

По результатам расчетов данного течения можно сделать следующие выводы:

1. Параметр M не является универсальным критерием достаточности сетки, в данном случае его значение не должно составлять $M \leq 0.04$.
2. Точность расчета повышается с увеличением числа Рейнольдса.

4.3. Течение в каверне.

В ходе работы было проведено сравнение расчетов ламинарного течения жидкости в каверне с движущейся крышкой, полученных с использованием настоящего кода и программы Flos.

Расчетная область представляла собой квадрат ABCD со сторонами AB=BC=H (рисунок 14).

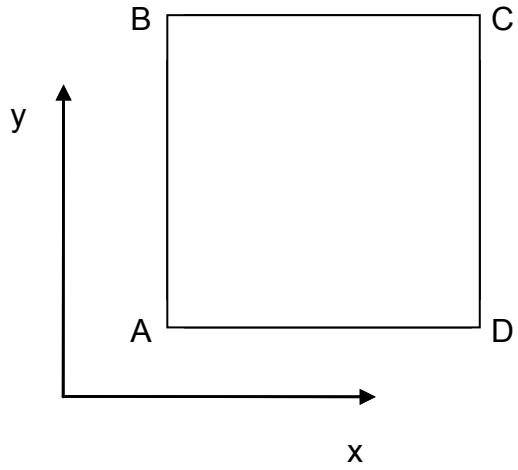

Рисунок 14. Расчетная область

На границах области задавались следующие условия: BC – движущаяся стенка, на которой U=1, V=0; AB, AD, DC– неподвижные твердые стенки.

Задача решалась в безразмерной постановке для двух ламинарных режимов течения при числах Рейнольдса $Re = 30,\ 100$. Использовалась одноблочная сетка с равномерным распределением узлов. Параметры расчета методом LBM для различных чисел Re приведены в Таблице 6 (здесь N – число ячеек области).

Таблица 6. Параметры задачи

Re	N	τ	M
30	200x200	1	0.025
100	251x251	1	0.066

Для расчета в программе Flos была построена равномерная одноблочная сетка 100x100 ячеек, был выбран метод расчета AC/SIMPLEC, число Куранта=1.

Сравнение полей и профилей скорости в различных сечениях при разных числах Рейнольдса (рисунки 15 – 17) свидетельствует о хорошем совпадении результатов расчета методом Lattice Boltzmann с решением уравнений Навье-Стокса.

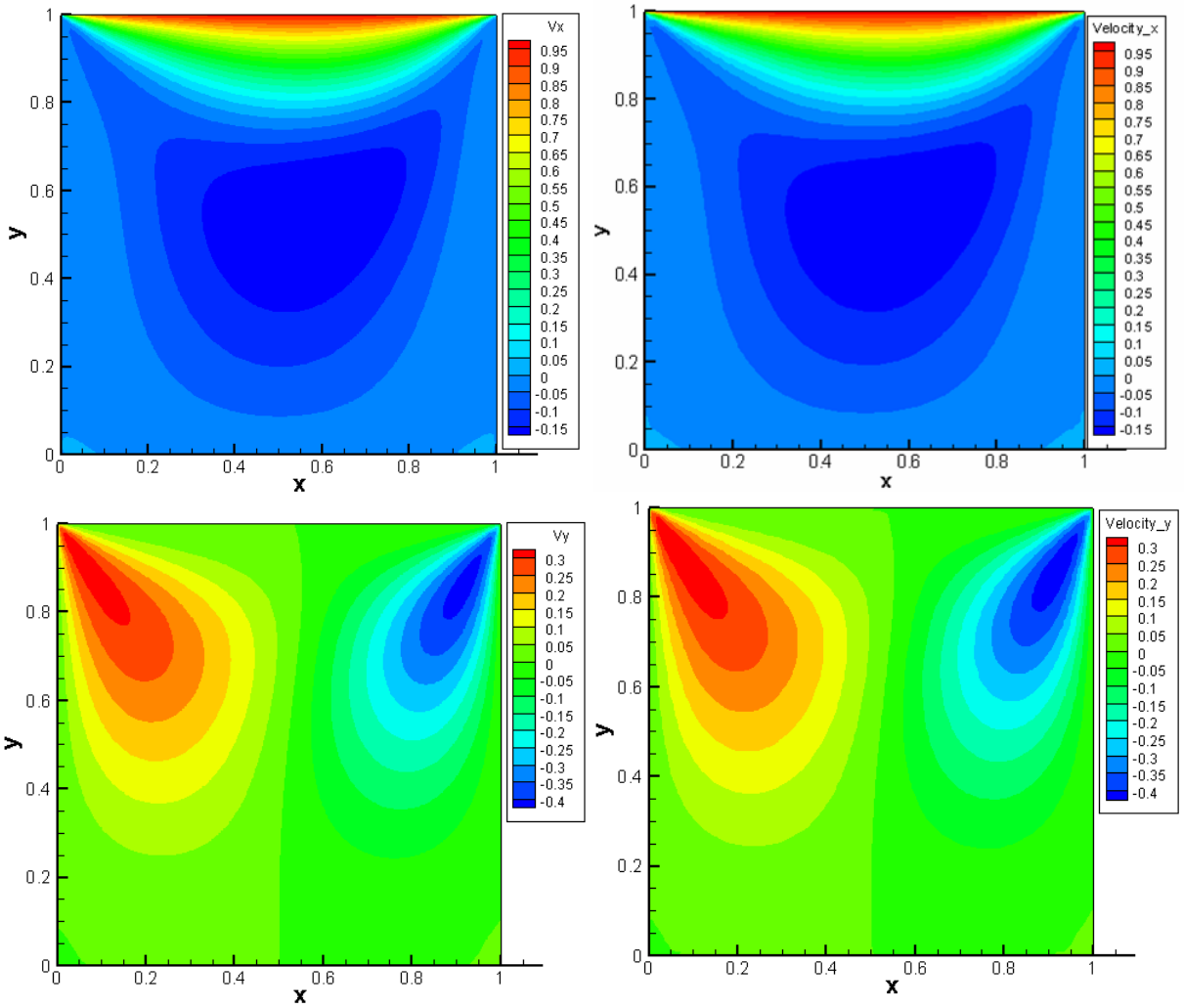

Рисунок 15. Поля Vx, Vy, полученные методом LB и программой Flos при Re=30

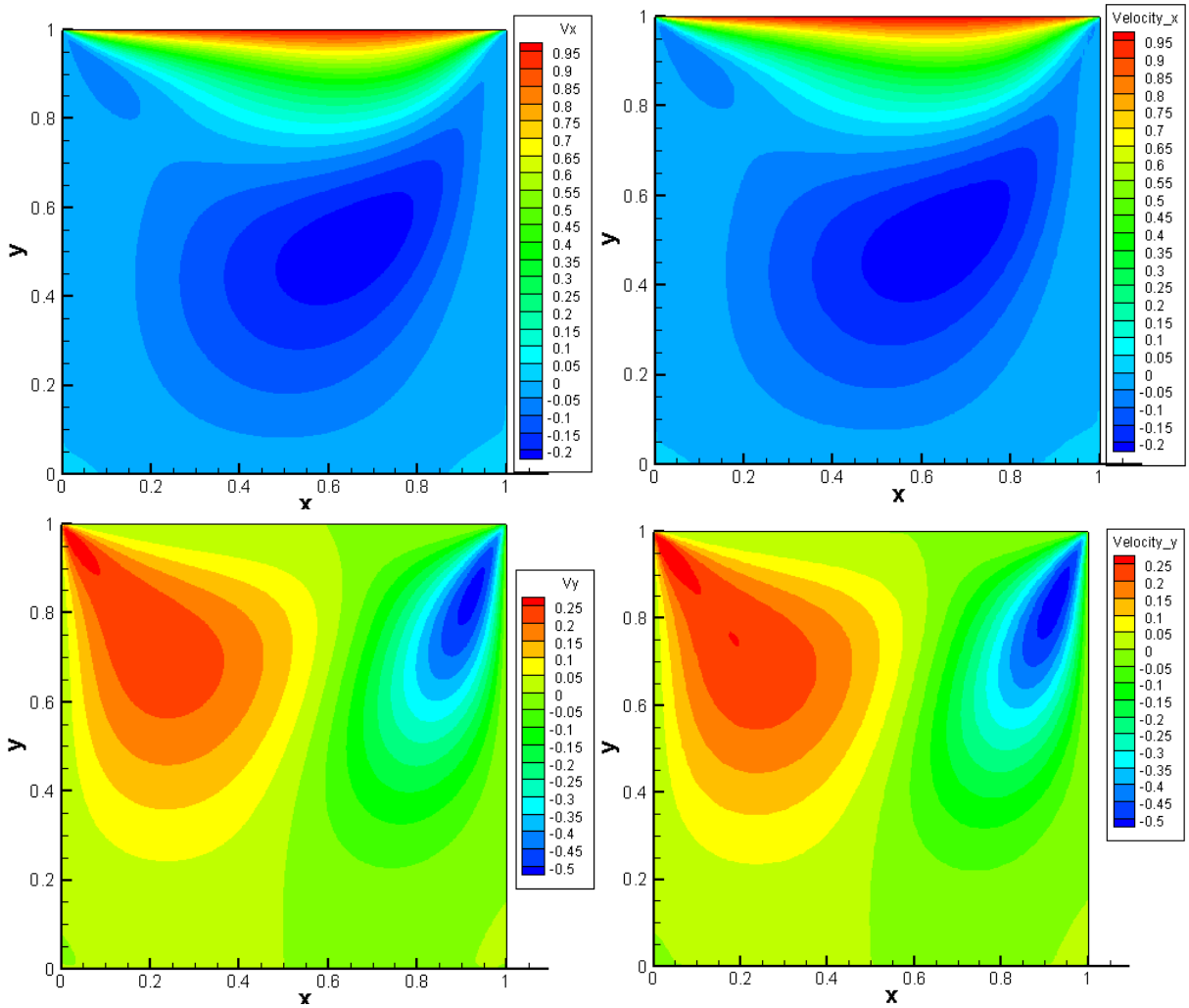

Рисунок 16. Поля Vx, Vy, полученные методом LB программой Flos при Re=100

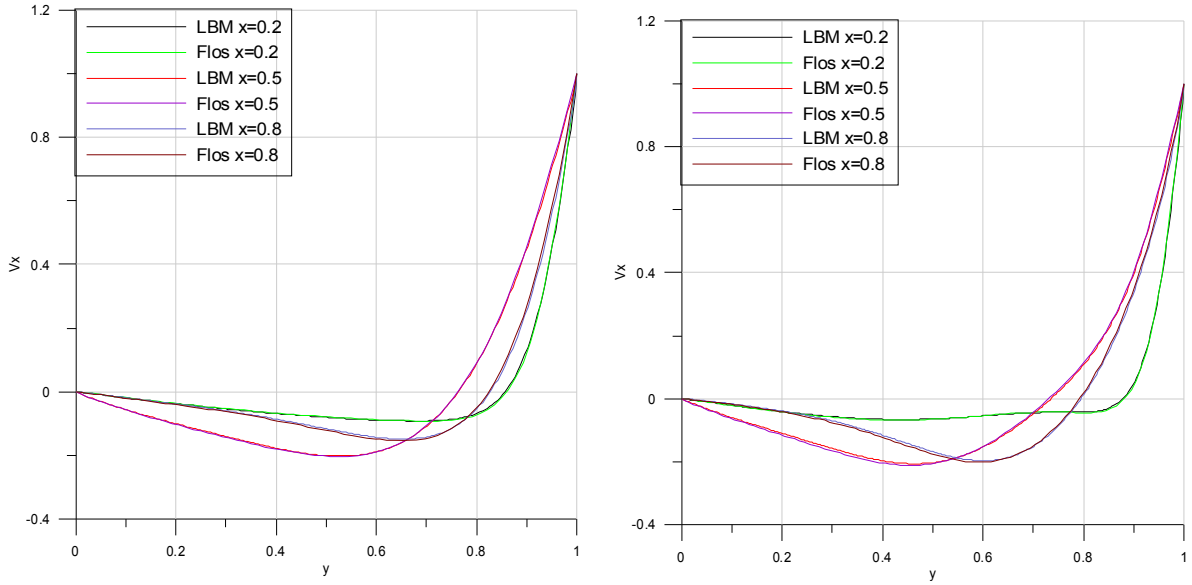

Рисунок 17. Профили скорости Vx в различных сечениях полученные с помощью LBM и программой Flos

4.4. Течение в канале с внезапным расширением

Последней тестовой задачей было течение в канале с внезапным расширением (рисунок 18).

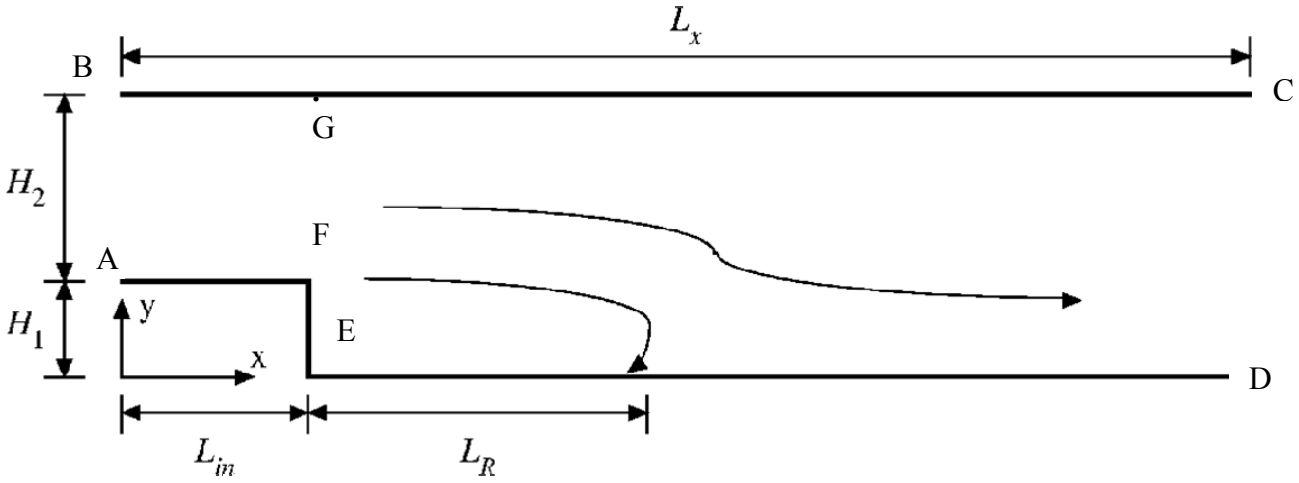

Рисунок 18. Расчетная область

Масштабом длины в данной задаче является высота ступеньки EF - H_1., а остальные размеры задачи равны: высота канала до расширения $H_2=2H_1$, длина ступеньки $L_{in}=10H_1$, длина всего канала $L_x=30H_1$.

На входе AB задавался однородный профиль скорости U=1, V=0; отрезки BC, ED, EF, AF являлись твердыми стенками, а на выходе CD задавалось постоянное давление P=0.

Задача решалась в безразмерной постановке для ламинарного режима течения при числе Рейнольдса Re = 10.

Для расчета в программе Flos расчетная область состояла из двух блоков: ABGF и GCDE, использовалась двухблочная сетка с равномерным распределением узлов с шагом $0.05H_1$. При расчете использовался метод AC/SIMPLEC, число Куранта =1.

Для расчета методом LBM использовалась одноблочная сетка с равномерным распределением узлов с шагом $1/30\ H_1$, параметр релаксации τ=0.77, чему соответствовало значение M=0,055.

Из рисунков 19 - 21 видно, что результаты, полученные с помощью LBM и программой Flos близки, однако скорость, полученная методом LBM, несколько завышена. Важно, что длина зоны рециркуляции оказалась одинакова для обоих расчетов: Lr=1.23 (рисунок 22).

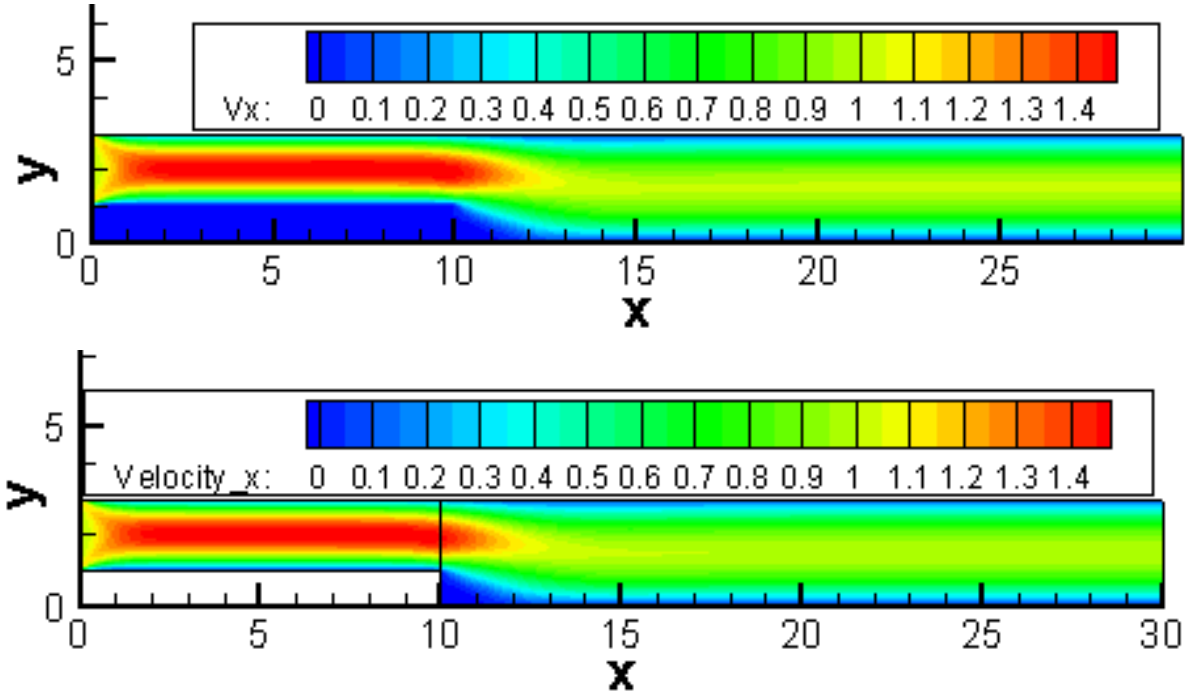

Рисунок 19. Поля скорости Vx, полученные методом Lattice Boltzmann и программой Flos

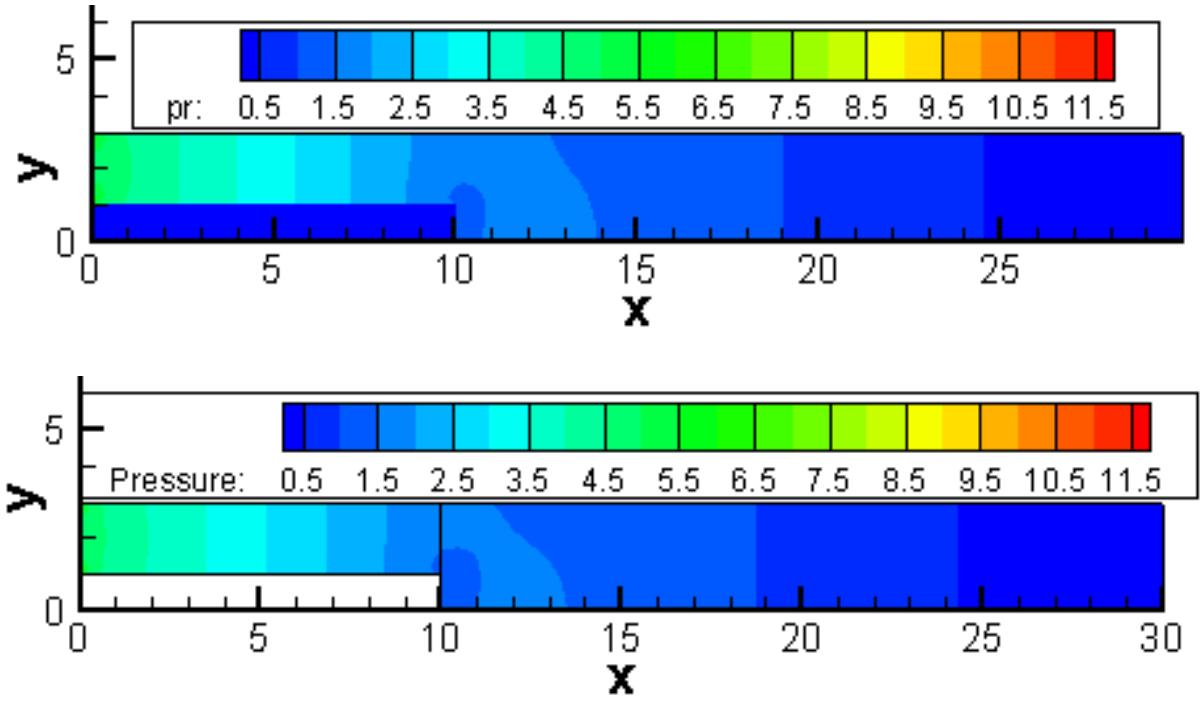

Рисунок 20. Поля давления, полученные методом Lattice Boltzmann и программой Flos

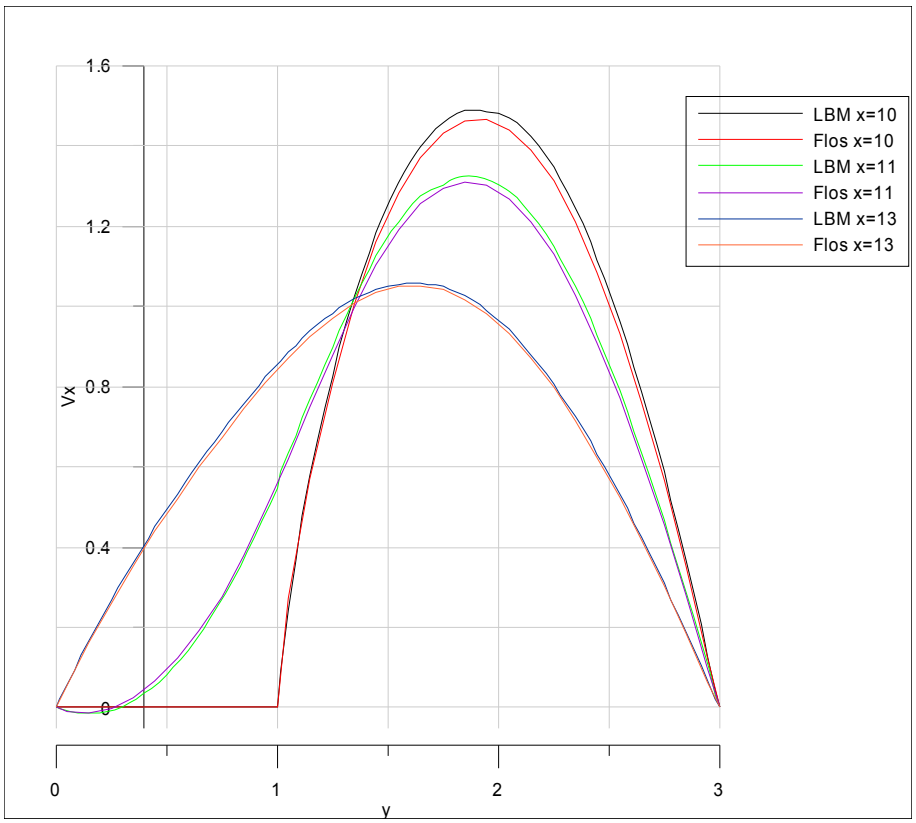

Рисунок 21. Профили скорости в сечениях x=10, x=11, x=13

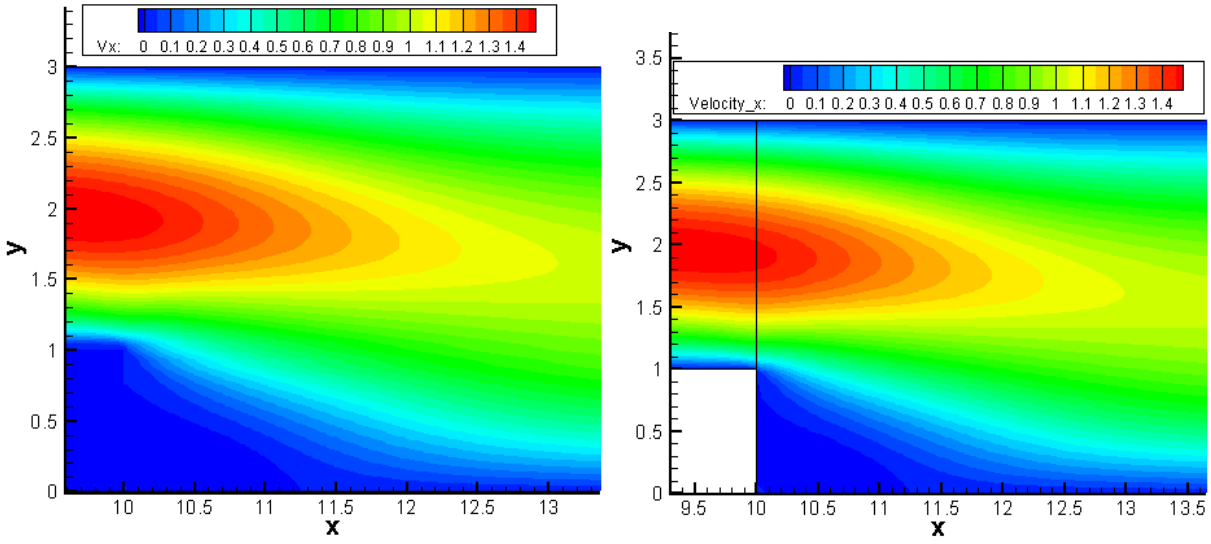

Рисунок 22. Поля скоростей Vx, полученные методом LBM и программой Flos. Области вблизи отрывных зон.

Таким образом, несколько завышенное значение скорости связанное, видимо, с недостаточно мелкой сеткой, соответствующей параметру M=0.055 не повлияло на длину зоны рециркуляции.

Заключение

В работе представлены результаты применения 2-мерной 9-скоростной LBM-BGK модели, реализованной на языке Fortran, для расчета нескольких двумерных задач гидродинамики.

Все полученные результаты с высокой точностью соответствуют теоретическим данным и данным других численных экспериментов. В целом можно сделать вывод, что метод LBM применим для расчета двумерных ламинарных течений.

Значение параметра M, достаточное для получения точности 1% для рассмотренных задач лежит в диапазоне от 0.04 до 0.1. При этом для течений при низком числе Рейнольдса этот параметр должен быть уменьшен.

Список литературы

1. Dieter A. Wolf-Gladrow D. A. Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction. Berlin: Springer 2005
2. Y. H. Qian, D. D'Humieres and P. Lallemand, Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation. Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Suphrieure, 1991
3. Zou Q, He X On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. Phys Fluids 1997(9):1591-1598
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М: Наука, 1974
5. Michael C. Sukop, Daniel T. Thorne, Jr. Lattice Boltzmann Modeling. An Introduction for Geoscientists and Engineers

Приложение

Вывод уравнений Навье-Стокса из решеточного уравнения Больцмана для модели D2Q9.

Для получения соответствующих решеточной модели D2Q9 уравнений, описывающих изменение гидродинамических параметров, применим следующее разложение по малому параметру ε, в качестве которого возьмем шаг по времени (т. е. $\varepsilon = \delta_t$):

$$f_\alpha\left(\vec{r}+\vec{c}_\alpha\delta_t, t+\delta_t\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\left(\partial_t + \vec{c}_\alpha\cdot\nabla\right)^n f_\alpha\left(\vec{r},t\right)$$

$$f_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n f_\alpha^{(n)}$$

$$\partial_t = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n \partial_{t_n}\ ,$$

Применим разложение по степеням ε к решеточному уравнению

$$f_\alpha\left(\vec{r}+\vec{c}_\alpha\delta_t, t+\delta_t\right) - f_\alpha\left(\vec{r},t\right) = -\frac{1}{\tau}\left[f_\alpha\left(\vec{r},t\right) - f_\alpha{}^{(eq)}\left(\vec{r},t\right)\right]$$

Тогда, приравнивая коэффициенты при степенях $m = 0, 1, 2$, получим

$$O\left(\varepsilon^0\right): f_\alpha^{(0)} = f_\alpha^{(eq)}$$

$$O\left(\varepsilon^1\right): \left(\partial_t + \vec{c}_\alpha\cdot\nabla\right) f_\alpha^{(0)} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(1)} \qquad (1')$$

$$O\left(\varepsilon^2\right): \partial_{t_1} f_\alpha^{(0)} + \left(\frac{2\tau-1}{2\tau}\right)\left(\partial_{t_0} + \vec{c}_\alpha\cdot\nabla\right) f_\alpha^{(1)} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(2)} \qquad (2')$$

Члены разложения функции распределения $f_\alpha^{(eq)}$ в ряд удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_\alpha f_\alpha^{(0)}\begin{bmatrix}1\\ \vec{c}_\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho\\ \rho\vec{u}\end{bmatrix}$$

$$\sum_\alpha f_\alpha^{(n)}\begin{bmatrix}1\\ \vec{c}_\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}, n>0$$

А равновесная функция распределения выбирается как

$$f_\alpha^{(eq)}(\vec{r},t)=\omega_\alpha\left\{\rho+\rho_0\left[3\frac{(\vec{c}_\alpha\cdot\vec{u})}{c^2}+\frac{9}{2}\frac{(\vec{c}_\alpha\cdot\vec{u})^2}{c^4}-\frac{3}{2}\frac{\vec{u}^2}{c^2}\right]\right\},$$

где ω_α - веса (см. формулу (6) основной части работы).

Предполагается, что функция распределения зависит от времени только через зависимость от макроскопических параметров:

$$\partial_t f_\alpha=\frac{\partial f_\alpha}{\partial\rho}\partial_t\rho+\frac{\partial f_\alpha}{\partial\vec{u}}\partial_t\vec{u}$$

Для модели D2Q9 тензор

$$E^{(n)}=\sum_{\alpha\neq0}\omega_\alpha c_{\alpha i_1}c_{\alpha i_2}\cdots c_{\alpha i_n}$$

имеет следующие свойства:

$$E^{(2)}=\frac{1}{3}c^2\delta_{ij},\ E^{(4)}=\frac{1}{9}c^4\left(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right),\ E^{(2n+1)}=0$$

С учетом этого моменты 0-го члена в разложении функции распределения определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_\alpha f_\alpha^{(0)}=\rho\\&\sum_\alpha\vec{c}_\alpha f_\alpha^{(0)}=\rho_0\vec{u}\\&\sum_\alpha c_{\alpha i}c_{\alpha j}f_\alpha^{(0)}=\frac{1}{3}c^2\rho\delta_{ij}+\rho_0u_iu_j\\&\sum_\alpha c_{\alpha i}c_{\alpha j}c_{\alpha k}f_\alpha^{(0)}=\frac{1}{3}c^2\rho_0\left(\delta_{ij}u_k+\delta_{ki}u_j+\delta_{jk}u_i\right)\end{aligned}\right\}\qquad(3')$$

При суммировании уравнения (1') по всем α получим следующие уравнения для моментов функции распределения:

$$\partial_{t_0}\rho+\nabla\cdot(\rho_0\vec{u})=0\qquad(4')$$

$$\partial_{t_0}(\rho_0\vec{u})+\nabla\cdot\Pi^{(0)}=0$$

где $\Pi^{(0)}=\sum_\alpha c_{\alpha i}c_{\alpha j}f_\alpha^{(0)}$ - тензор напряжений для функции распределения 0-го порядка.

С учетом (3'), эти уравнения могут быть записаны как

$$\frac{1}{c_s^2}\partial_{t_0}P+\nabla\cdot\vec{u}=0$$

$$\partial_{t_0}\vec{u}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}=-\nabla P-\vec{u}\nabla\cdot\vec{u}$$

где $P=\dfrac{c_s^2\rho}{\rho_0}$ - нормализованное давление, $c_S=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$, а член $\vec{u}\nabla\cdot\vec{u}\sim O\left(M^3\right)$.

Моменты уравнения (2') :

$$\left.\begin{aligned}&\partial_{t_1}\rho=0\\&\partial_{t_1}\left(\rho_0\vec{u}\right)+\frac{2\tau-1}{2\tau}\nabla\cdot\Pi^{(1)}=0\end{aligned}\right\}\qquad(5')$$

$\Pi^{(1)}$ - тензор напряжений для функции распределения 1-го порядка

С учетом (5') и (4') получим:

$$\Pi^{(1)}=\sum_\alpha c_{\alpha i}c_{\alpha j}f_\alpha^{(1)}=-\tau\sum_\alpha c_{\alpha i}c_{\alpha j}\left(\partial_{t_0}+\vec{c}_\alpha\cdot\nabla\right)f_\alpha^{(0)}=-\tau\left[\partial_{t_0}\Pi_{ij}^{(0)}+\frac{1}{3}c^2\rho_0\left(\nabla\cdot\vec{u}\delta_{ij}+\nabla_i u_j+\nabla_j u_i\right)\right]$$

$$\Pi^{(1)}=-\tau\left[\rho_0\partial_{t_0}\left(u_iu_j\right)+c_s^2\rho_0\left(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i\right)\right]$$

$$\Pi^{(1)}=\tau\left[c_s^2\left(u_i\rho+u_j\nabla_i\rho\right)+\rho_0\left(u_i\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)u_j+u_j\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)u_i\right)-c_s^2\rho_0\left(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i\right)\right]$$

где $\nabla_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$

Отбрасывая члены порядка $O(u^3)$ ($O(M^3)$) получим

$$\frac{2\tau-1}{2\tau}\nabla_j\cdot\Pi_{ij}=-\frac{\nu}{\delta_t}\rho_0\nabla_j\left(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i\right)+O\left(M^3\right)=-\frac{\nu}{\delta_t}\rho_0\left(\nabla_i\nabla\cdot\vec{u}+\nabla^2u_i\right)+O\left(M^3\right)$$

$$\frac{2\tau-1}{2\tau}\nabla_j\cdot\Pi_{ij}=-\frac{\nu}{\delta_t}\rho_0\nabla^2u_i+O\left(M^3\right)$$

где $\nu=\dfrac{2\tau-1}{6}\dfrac{\delta_x^2}{\delta_t}$ - коэффициент кинематической вязкости, соответствующей модели D2Q9.

Складывая результаты для функций распределения 0-го и 1-го порядков, положив при этом $\varepsilon=1$, получим соответствующие используемой модели уравнения для макроскопических величин:

$$\nabla\cdot\vec{u}=0+O\left(M^2\right)$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}=-\nabla P+\nu\nabla^2\vec{u}+O\left(M^3\right)$$