

Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Институт прикладной математики и механики
Кафедра гидроаэродинамики

Работа допущена к защите
Зав. кафедрой, проф., д.ф.-м.н.
_____Смирнов Е.М.
" ____ " _____ 2014 г.

Исследование применимости пристенных функций для расчета
аэродинамических профилей при углах атаки вплоть до срыва потока

Выпускная бакалаврская работа по направлению подготовки
010600 – Прикладные математика и физика

Выполнил студент гр. 43603/2

Котов Е.В.

Руководитель, к.ф.-м.н., доцент

Гарбарук А.В.

Санкт-Петербург
2014

Оглавление

Введение.....	3
Моделирование ветровых турбин	5
Пристенные функции	9
Расчет обтекания крылового профиля S809.....	11
Расчеты на серии сеток с постоянным по профилю первым пристенным шагом.....	15
Расчеты на сетках с переменным по профилю первым пристенным шагом.....	21
Заключение	27
Список литературы	28

Введение

Применение ветровых турбин для выработки электроэнергии, начатое в XIX веке, привело к их промышленному производству в XX веке, что потребовало сформировать определенные принципы расчета и проектирования основных элементов их конструкции. Среди них значительное внимание уделяется расчетам лопастей, форма, размеры и скорость вращения которых влияют на количество производимой ветровыми турбинами электроэнергии.

Теория и методы расчета лопастей ветровых турбин начали формироваться в 20-х годах прошлого века и прошли путь от интегральных методов расчета аэродинамических характеристик лопасти для стационарного воздушного потока [1,2], до прямого численного моделирования уравнений Навье-Стокса (DNS), обеспечивающего точное решение задачи турбулентного обтекания лопасти.

При всей эффективности последнего подхода, его применение в настоящее время технически трудно реализуемо из-за огромных требований к вычислительным ресурсам [3,4]. По этой причине обычно используется подход, основанный на численном решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS), и полуэмпирических моделях турбулентности. Точность вычислений и объем вычислительных затрат в этом случае зависят от способа моделирования пристенной области [4].

Более точный и одновременно более затратный подход основан на использовании низкорейнольдсовых сеток с переменным шагом по нормали к стенке, которые позволяют разрешить все особенности пограничного слоя вплоть до вязкого подслоя.

Альтернативный подход, широко используемый в инженерных расчетах, связан с использованием пристенных функций и применением более грубых сеток, что позволяет сократить вычислительные затраты.

Следует отметить, что пристенные функции основаны на рассмотрении пристенной турбулентности при локальном равновесии, поэтому их применение в случае отрывных течений может приводить к ошибкам. В частности, неочевидна применимость пристенных функций при расчете турбулентного обтекания аэродинамического профиля в широком диапазоне углов атаки вплоть до срыва потока.

Целью работы является исследование возможности применения расширенных пристенных функций программного пакета ANSYS FLUENT для расчета аэродинамических профилей лопастей ветряных турбин при углах атаки вплоть до срыва потока.

Моделирование ветровых турбин

Первые ветряные мельницы с вертикальной осью вращения лопастей появились на Ближнем Востоке в 1700 г. до нашей эры в Месопотамии. В VII-X веках ветряные мельницы такого типа часто встречаются на территории современного Афганистана, Китая и Персии. В XI веке появляются ветряные мельницы с горизонтальной осью вращения лопастей. На территории Европы этот тип мельниц распространяется в XII веке и с XIV века – на территории современной Польши и России. С XIII-XV веков в северной Европе, особенно Голландии, ветряные мельницы начинают использовать не только для помола зерна, но и для подачи воды, работы насосов, что приводит к совершенствованию их конструкции и к XVIII веку выработке определенных стандартов в изготовлении и обслуживании. В частности, лопасти изготавливают из плотной ткани, натянутой на деревянные рамы таким образом, чтобы можно было уменьшить их парусность при штормовом ветре, и сокращают число лопастей до четырех. В конце 18 века такие ветряные мельницы используются на территории США, а в середине 19 века в США начинается промышленный выпуск ветряных мельниц с использованием металлических конструкций, с более чем 20 металлическими лопастями диаметром 3-5 метров и автоматической системой управления ими при штормовом ветре. Примерно к этому же времени относятся первые инженерные идеи использования ветряных мельниц для выработки электрического тока.

В 1888 г. Ч. Браш (США) создает ветроэнергетическую установку с диаметром ротора 12 м, вырабатывавшую 12 кВт в час, а через три года профессор Ле Кур (Дания) разрабатывает промышленный вариант ветровой турбины, который выпускался в Дании до 1914 года.

Первые теоретические работы по расчету горизонтально-осевых ветровых турбин, основанные на теории обтекания гребного винта, относятся к 20-30 годам XX века. Они привели к созданию импульсной теории

элемента лопасти (Blade element momentum theory) – одного из старейших и наиболее широко применяемых инженерных методов расчета ветровых турбин [5,6].

Эта теория основана на струйной теории активного диска, впервые предложенной в конце XIX века В. Ранкиным [7] и Р. Фрудом [8] в работах об обтекании гребного винта. В 1919-20 годах эта теория была практически одновременно применена Н.Е. Жуковским [9] А. Бецем [10] для построения простейшей аэродинамической модели ветровой турбины, в которой ротор турбины рассматривался как проницаемый стационарным, несжимаемым, невязким потоком активный диск.

Диск представляет для потока некоторое сопротивление, которое моделируется сосредоточенной осевой силой сопротивления, совершающей работу над движущимся потоком, равную мощности в единицу времени, выводимой из потока. Эта мощность, при предположении отсутствия вращения потока за диском, принимается равной мощности, развиваемой ветровой турбиной. При этом предполагается, что активный диск - ротор турбины - имеет бесконечно большую угловую скорость вращения и бесконечно большое количество лопастей, профильное сопротивление которых равно нулю. Также предполагается, что течение потока осесимметричное, одномерное - с постоянными параметрами потока в любом его сечении, а статическое давление потока, достаточно удаленного до плоскости диска и после него, равно окружающему атмосферному давлению.

Несмотря на значительное число допущений, модель позволяет выявить фундаментальные особенности аэродинамического взаимодействия атмосферного потока и ротора, опираясь на основные уравнения течения: неразрывности, изменения количества движения (осевого импульса), сохранения энергии, уравнения состояния и баланса сил.

В работах Г.Х. Сабинина [11, 12] и А. Беца [13] в модель были внесены существенные дополнения, учитывающие вращение потока непосредственно за ротором и то, что с ростом торможения потока перед ротором, обтекание

ротора все более приближается к обтеканию малопроницаемого диска с образованием вихрей позади него. Эти результаты существенно улучшили качество модели. В зарубежной литературе эта модель называется импульсной теорией или теорией А. Беца, в отечественной - теорией идеального ветродвигателя Н.Е. Жуковского. Из нее следует, что максимальное значение коэффициента использования энергии ветра не может быть больше 0,593 при коэффициенте торможения, равного 0,333.

Этот подход позволяет определить суммарно действующие на лопасти ротора силы, моменты и соотношения между скоростями, в характерных поперечных сечениях идущего через ротор потока воздуха, но не позволяет учесть влияние на силы формы лопастей и их количество. Для устранения этого недостатка Г. Глауэртом [14] модель была дополнена элементарным методом лопасти (Blade element method), разработанным Р. Фрудом [15], Ф. Ланчестером [16] и С. Джевецким [17] для определения характеристик пропеллеров.

В рамках этого метода предполагается деление двумерной лопасти на большое количество независимых элементов малой толщины, между которыми нет аэродинамической взаимосвязи. Для каждого элемента строится треугольник скоростей и предполагается, что силы, действующие на элементы лопасти, определяются силой тяги, сопротивления и углом атаки лопасти. Для каждого из них определяется осевая, тангенциальная силы и крутящий момент и суммируются вдоль всей лопасти.

При использовании метода предполагается также, что поток воздуха является стационарным, равномерным и несжимаемым; количество лопастей конечно; высота, на которой находится ротор, не учитывается.

Альтернативным подходом является метод вихрей [18, 19], в рамках которого каждая лопасть ротора заменяется несущей линией с радиальным распределением присоединенной завихренности, поэтому часто эта модель называется теорией несущей линии. Линия-лопасть порождает систему свободных вихрей: присоединенные вихри создают подъемную силу,

действующую на лопасти, а кромочные вихри индуцируют поле скоростей в плоскости ротора и в следе. Силы и моменты, действующие на лопасти, определяются теоремой Кутта-Жуковского, сумма интегралов моментов по всем лопастям определяет мощность ветровой турбины. Следует заметить, что элементная теория лопасти является по существу частным случаем теории несущей линии.

Недостатком этих методов является то, что они не позволяют получить распределение аэродинамических характеристик вдоль поверхности лопасти при ее двумерном и тем более трехмерном моделировании.

Поэтому в настоящее время наибольшее применение в инженерной практике находят подходы к моделированию турбулентных течений, основанные на решении сформулированных Рейнольдсом в 1895 г. и получивших его имя осредненных по времени уравнений Навье-Стокса (Reynolds Averaged Navier –Stokes Equations - RANS) [20,21].

Для замыкания уравнений Рейнольдса используются различные полуэмпирические модели турбулентности. К настоящему времени разработаны сотни полуэмпирических моделей турбулентности, однако широко признано, что наиболее универсальной из них является модель Ф. Ментера SST [22], основанная на решении дифференциальных уравнений для кинетической энергии турбулентности k и удельной скорости диссипации ω .

В непосредственной окрестности стенки, может быть использован один из двух подходов. В рамках первого подхода используется расчетная сетка, позволяющая разрешать все особенности пограничного слоя вплоть до вязкого подслоя. При этом на твердой поверхности используется граничное условие прилипания и отсутствия турбулентных пульсаций.

Второй подход основан на использовании более сложных граничных условий, называемых пристенными функциями. Они основаны на закономерностях, присущих турбулентному пограничному слою, и позволяют проводить расчеты на сетках, не имеющих сгущения к стенке.

Пристенные функции

Метод пристенных функций был предложен Лаундером и Сполдингом в 1972 году [23]. Его разработка связана с k - ε моделью Харлоу и Накаямы, формулировка которой, удобная для численных расчетов, получила широкое распространение после публикации Лаундера и Сполдинга.

Необходимость использования пристенных функций связана с тем, что стандартная k - ε модель применима только для полностью развитой турбулентности и не способна прогнозировать параметры потока в вязком подслое и буферной области пограничного слоя.

Предположив, что градиенты компонент скорости и скалярных величин (кроме давления) по нормали к твердой поверхности намного превосходят градиенты вдоль указанной поверхности, и, основываясь на двухслойной структуре пограничного слоя, Лаундер и Сполдинг построили пристенные функции для k - ε модели.

Хотя эти пристенные функции успешно применяются уже более 40 лет, они обладают существенным недостатком, состоящим в жестком требовании к расчетной сетке, требующим попадания первого пристенного узла на логарифмический участок профиля скорости.

Идея пристенных функций оказалась весьма продуктивной и получила дальнейшее развитие в работах многих исследователей в части расширения области их использования [24], способах задания (аналитическом и численном) [25], повышения универсальности [26] и реализуемости в коммерческих вычислительных программах [27, 28].

В частности, пристенные функции представлены в коммерческом программном пакете ANSYS FLUENT. Для того, чтобы расширить возможности применения пристенных функций с сетками, первый пристенный узел которых попадает в вязкий подслой или буферную область, во FLUENT реализован подход, основанный на использовании более общего закона стенки, предложенного Кадером [29]:

$$U_1 = y^+ e^{-\Gamma} + \left[\frac{1}{k} \ln(E y^+) \right] e^{-1/\Gamma}$$

Здесь динамическая скорость определяется путем взвешивания соответствующих значений, основанных на закономерностях для вязкой и логарифмической областей [30]

$$u_\tau^{vis} = \frac{U_1}{y^+}; u_\tau^{log} = \frac{U_1}{\frac{1}{k} \ln(y^+) + C}; u_\tau = \sqrt[4]{(u_\tau^{vis})^4 + (u_\tau^{log})^4},$$

Величины E и Γ определяются соотношениями, $E = \exp(k y^+) / k$ и

$$\Gamma = -\frac{a(y^+)^4}{1 + b y^+}, \text{ где } a=0.01 \text{ и } b=5, \text{ а величина } y^+ \text{ (безразмерная координата)}$$

вычисляется как $y^+ = \frac{\Delta y_1 V^*}{\nu}$, где $V^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ - динамическая скорость, ν - кинематическая вязкость, ρ - плотность среды, а τ_w - касательное напряжение вычисляемое по значениям на предыдущей итерации.

Такой подход, предложенный Ментером [31], обладает рядом существенных преимуществ. Во-первых, при попадании первого пристенного узла на логарифмический участок профиля скорости такие пристенные функции не уступают подходу Лаундера и Сполдинга. Во-вторых, в случае попадания первого узла в вязкий подслои они автоматически переходят в условия прилипания. Наконец, эти граничные условия обеспечивают правильное решение при попадании первого узла в буферную область пограничного слоя. Поэтому эти пристенные функции, называются автоматическими [32].

В настоящей работе в рамках пакета FLUENT исследуется применимость этих пристенных функций совместно с моделью Ментера SST для расчета аэродинамических профилей при различных углах атаки вплоть до срыва потока.

Расчет обтекания крылового профиля S809

В настоящей работе рассматривается обтекание крылового профиля S809 потоком несжимаемой жидкости при числе Рейнольдса, построенном по скорости набегающего потока и хорде профиля, $Re=2 \cdot 10^6$. Данный профиль, разработанный Национальной Лабораторией Возобновляемой Энергии (NREL-National Renewable Energy Laboratory), является типичным для ветровых турбин, например NREL Phase II и III. Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик этого профиля было проведено в работах [33, 34].

Расчет проводится с использованием стационарных уравнений Рейнольдса (RANS) [27], замкнутых при помощи полуэмпирической $k-\omega$ SST модели турбулентности Ментера [22].

Для проведения расчетов в широком диапазоне углов атаки ($0-30^\circ$) была использована структурированная сетка С-типа, M1 (рис. 1), параметры которой приведены в таблице 1. Дополнительные расчеты при угле атаки 15° показали, что размер расчетной области ($\approx 20C$), был достаточно велик и его дальнейшее увеличение не влияет на решение в окрестности профиля. Расчет на измельченной сетке при угле атаки 15° показал, что рассматриваемая сетка обеспечивает сеточно-независимое решение.

Таблица 1. Параметры базовой сетки

Число ячеек	Число узлов ($N_x \times N_y \times N_z$)	Δy_1 , м	Δy_1^+ , max	Δy_1^+ , среднее
100080	$361 \times 181 \times 1$	$2 \cdot 10^{-6}$	0.234	0.098

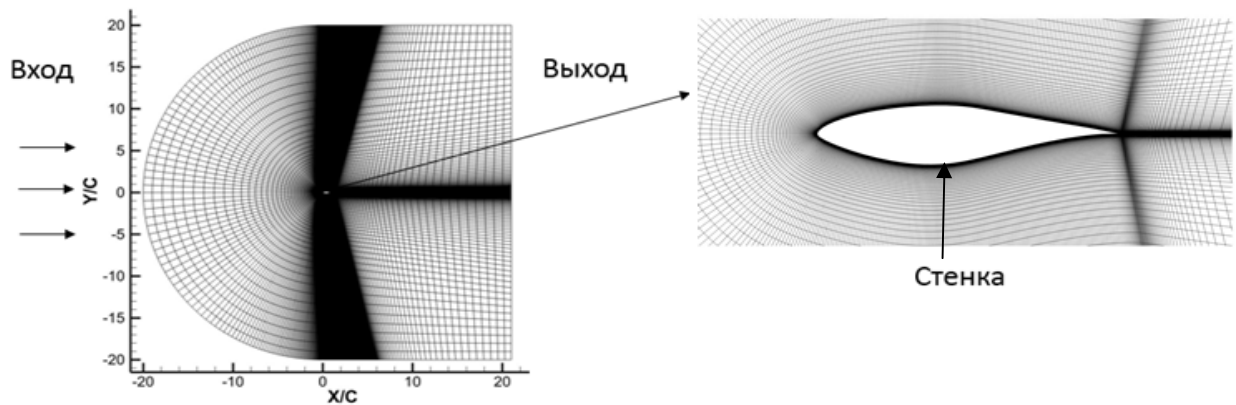


Рис.1. Расчетная сетка М1.

На входной границе задавался однородный профиль скорости при различных углах атаки ($u = U_0 \cos \alpha$, $v = U_0 \sin \alpha$) и характеристики турбулентности набегающего потока, обеспечивающие полностью турбулентное обтекание (уровень турбулентности $I=0.1\%$ и турбулентная вязкость $\nu_t/\nu = 0.1$, а давление экстраполировалось изнутри области). На выходной границе задавался постоянный уровень давления, а остальные переменные экстраполировались изнутри расчетной области. Для задания граничных условий на поверхности профиля использовались автоматические пристенные функции [31]. Следует отметить, что для данной сетки первый пристенный узел всегда попадает в вязкий подслой, поэтому автоматические пристенные функции эквивалентны условиям прилипания.

Результаты расчетов (рис. 2) показали, что при углах атаки, меньше 7° , течение является безотрывным. С увеличением угла атаки ($7^\circ < \alpha < 20^\circ$) на верхней поверхности появляется отрыв с задней кромки, который постепенно смещается вверх по потоку в сторону передней кромки (рис. 3). При дальнейшем росте угла атаки происходит срыв потока, характеризующийся резким падением коэффициента подъемной силы ($20^\circ < \alpha < 25^\circ$) вплоть до массивного отрыва с передней кромки ($\alpha > 25^\circ$).

При этом в зоне отрыва коэффициент давления практически постоянен (рис. 4), поэтому можно утверждать, что правильное предсказание

коэффициента подъемной силы может быть обеспечено только при правильном предсказании положения точки отрыва.

Следует отметить, что завышение расчетного значения максимального коэффициента подъемной силы и угла, при котором это значение достигается, относительно экспериментальных данных характерно для подобных задач [35]. Причины такого поведения связаны, по-видимому, с неправильным предсказанием положения отрыва.

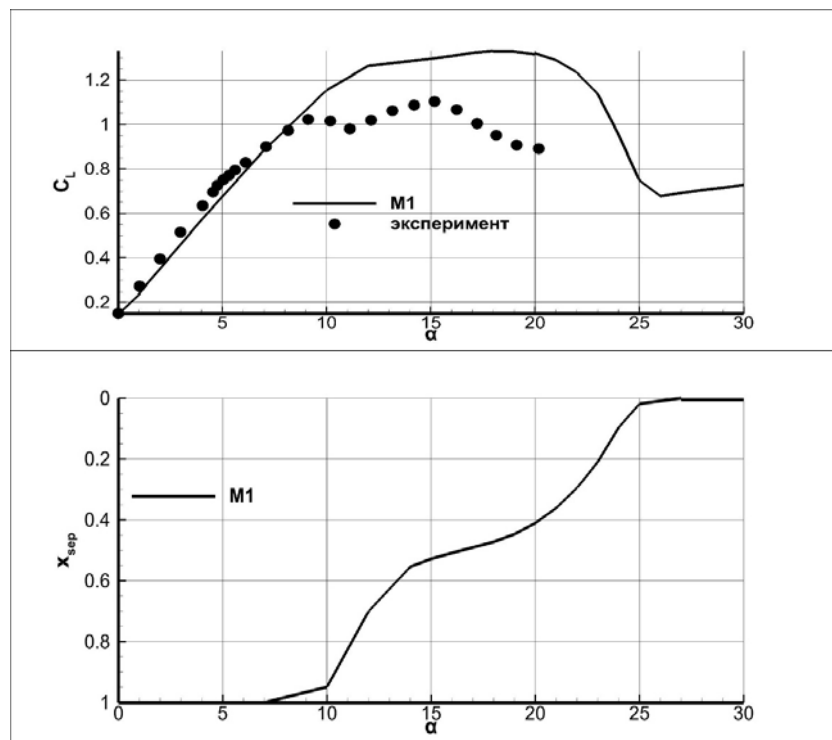


Рис 2. Зависимость коэффициента подъёмной силы и точки отрыва пограничного слоя от угла атаки.

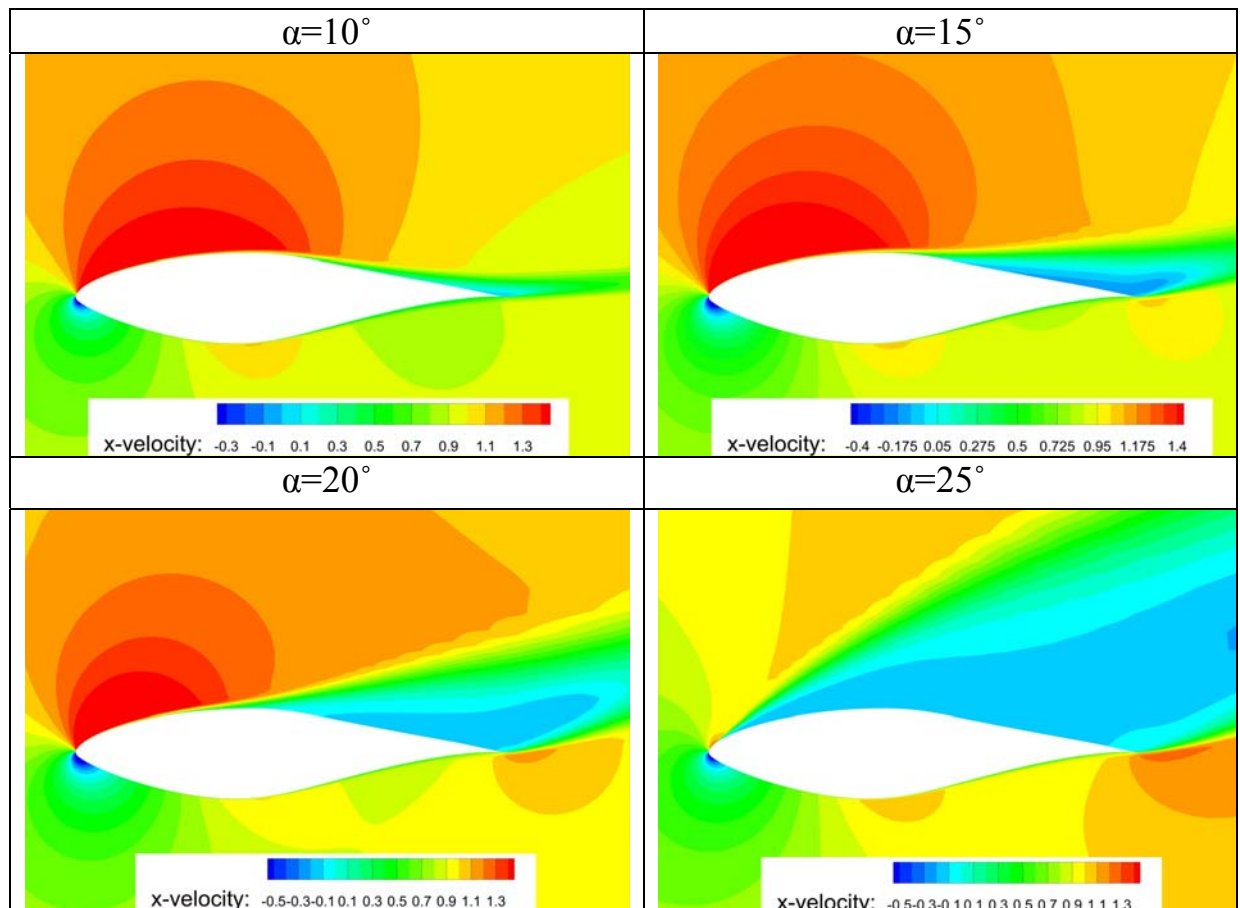


Рис. 3. Поля продольной компоненты скорости при различных углах атаки.

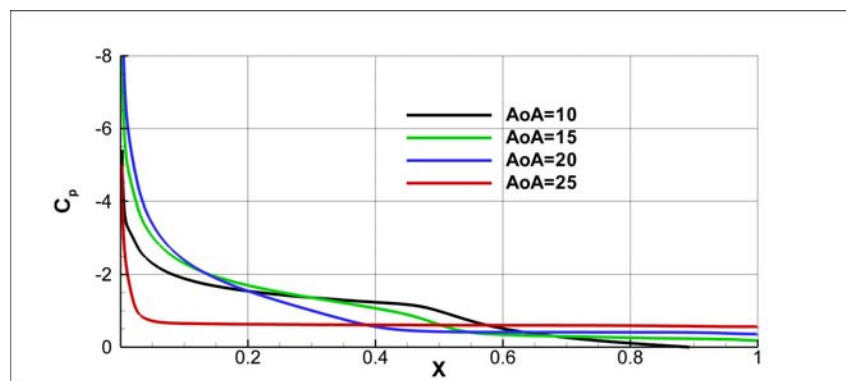


Рис. 4. Распределения коэффициента давления по верхней поверхности профиля.

Расчеты на серии сеток с постоянным по профилю первым пристенным шагом

Для исследования влияния пристенных функций на решение была построена серия сеток с одинаковым распределением шага сетки вдоль поверхности профиля и различными значениями величины первого пристенного шага. Сетки М2-М4 (таблица 2, рис. 5) были получены из базовой сетки М1 заглублением шага по нормали к поверхности, число точек на профиле на всех сетках составило 360.

Таблица 2. Характеристики сеток.

Параметры сетки	М1	М2	М3	М4
Число ячеек	100080	72280	55600	44480
Число узлов ($N_X \times N_Y \times N_Z$)	541×181×1	541×131×1	541×101×1	541×81×1
Δy_1 , м	$2 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
Δy_1^+ , max	0,234	1,17	12,05	90,48
Δy_1^+ , среднее	0,098	0,444	4,54	40,71

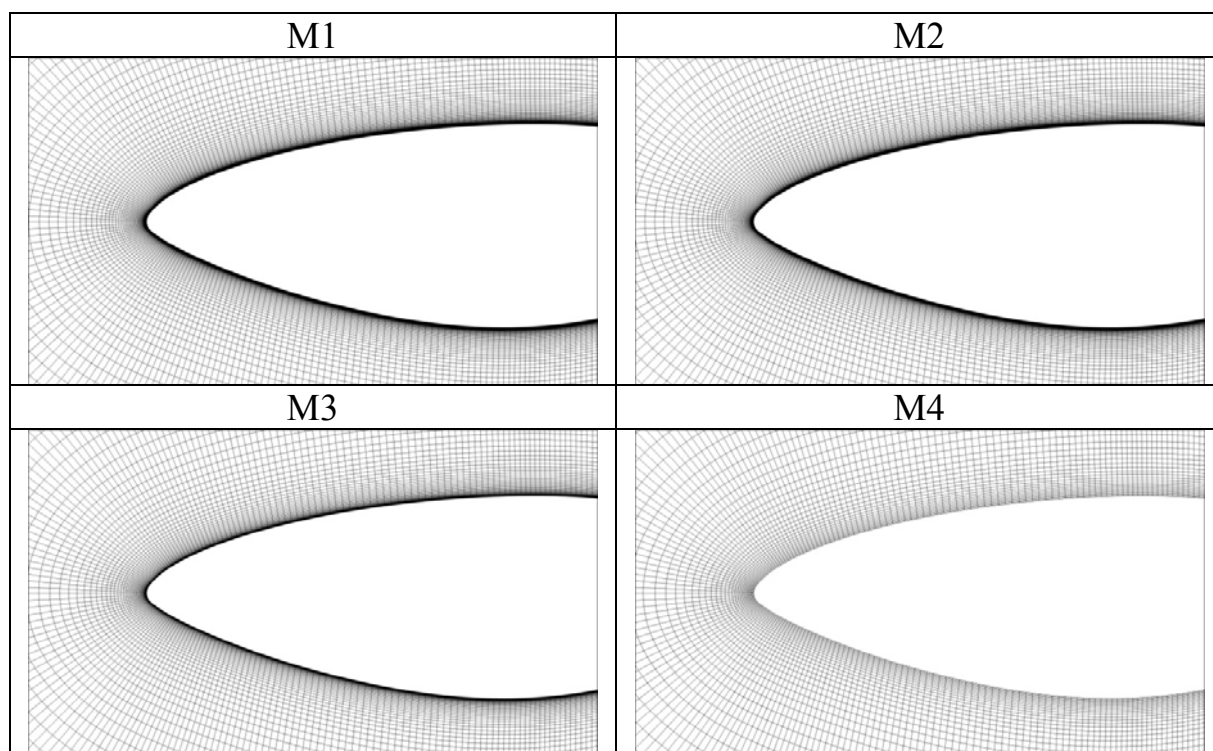


Рисунок 5. Расчетные сетки M1-M4.

Результаты расчетов (рис. 6) показали, что для углов атаки до 6° , соответствующих безотрывному обтеканию, решения на всех рассмотренных сетках отличаются слабо. При дальнейшем увеличении угла атаки видно, что решения, полученные на сетках M1 и M2, отличаются слабо, а для более грубых сеток характерно заметное занижение величины коэффициента подъемной силы. Положение точки отрыва зависит от используемой сетки, причем на наиболее грубой сетке точка отрыва сильно смещается к передней кромке.

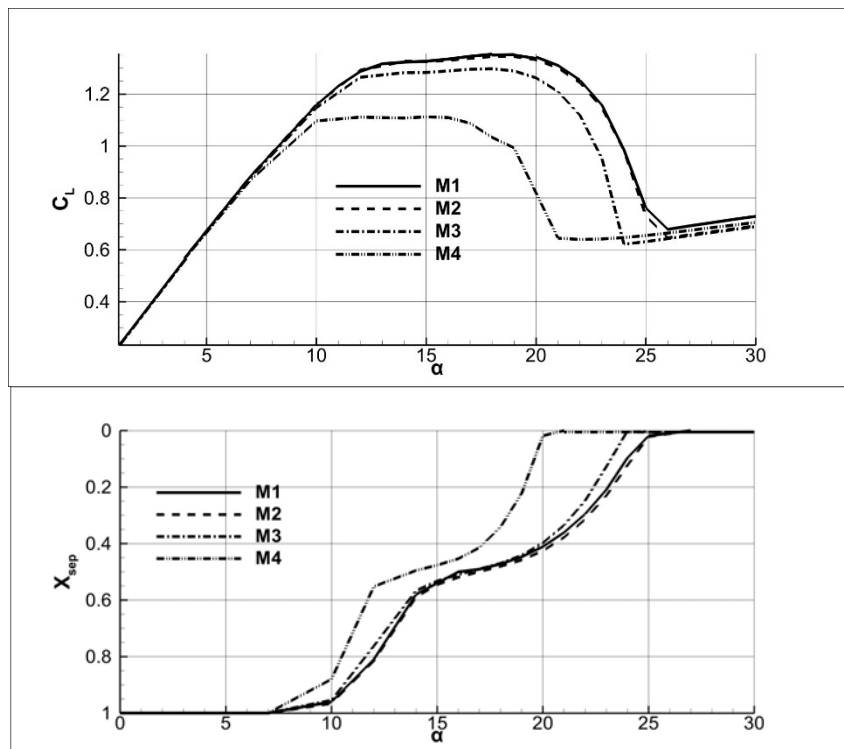


Рис.6. Зависимость коэффициента подъемной силы и точки отрыва от угла атаки.

Анализ распределения коэффициентов трения и давления по верхней поверхности профиля при различных углах атаки (рис. 7, 8) свидетельствуют о том, что распределения, полученные на сетках M1 и M2, сильно отличаются от результатов, полученных на более грубых сетках. При этом наиболее существенные различия наблюдаются в окрестности передней кромки крылового профиля.

Для выяснения причин подобного поведения были построены профили скорости на верхней поверхности профиля в различных сечениях (рис. 9, 10). Видно, что в окрестности передней кромки профиля ($x/c=0.05$) пограничный слой настолько тонок, что сетка M3 обеспечивает около 10 точек на пограничный слой, а сетка M4 – 1-4 точки. Очевидно, что этого недостаточно для разрешения пограничного слоя, что приводит к его искажению. Впоследствии искаженный профиль скорости развивается вниз по потоку, при этом его характеристики неверны, что влечет за собой неправильное предсказание точки отрыва.

Таким образом, причина различий между результатами расчетов на различных сетках обусловлена недостаточным разрешением пограничного слоя в окрестности передней кромки и, по-видимому, никак не связана с использованием пристенных функций.

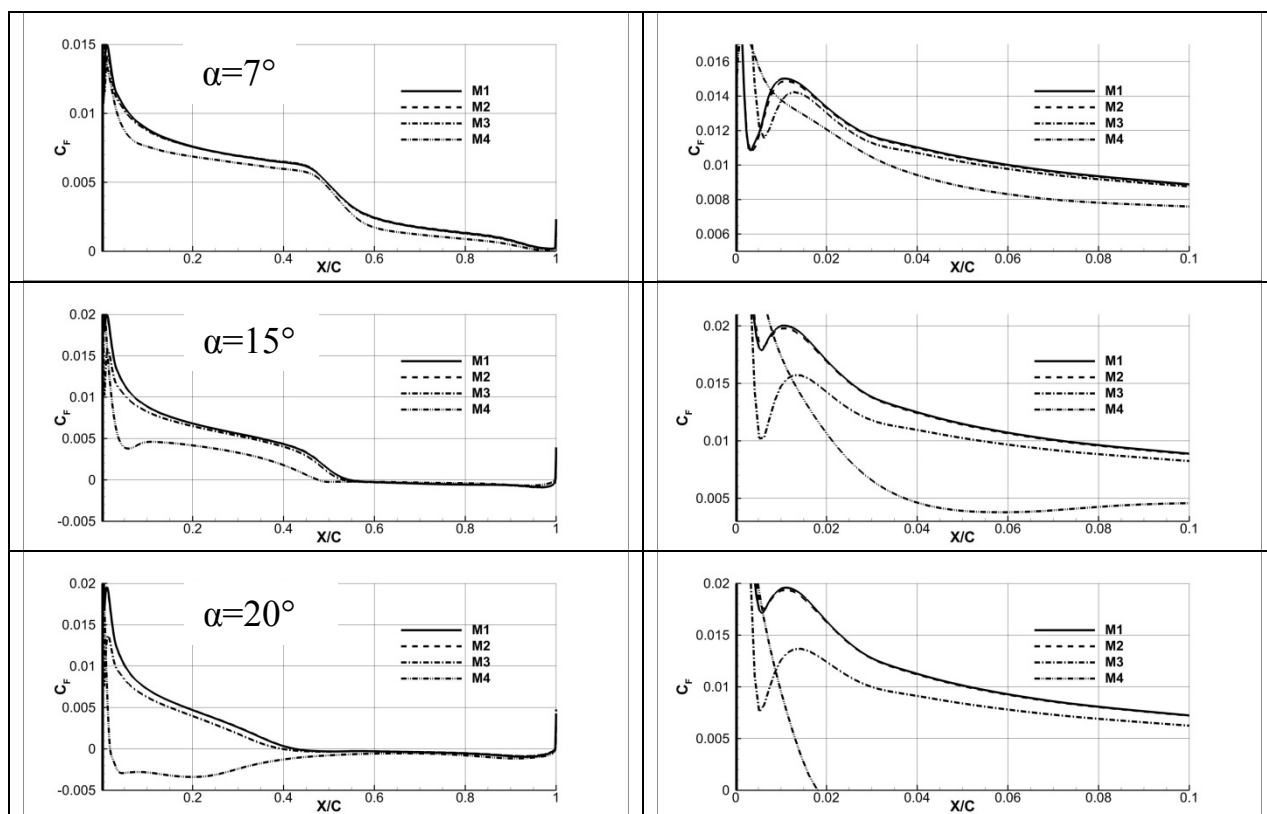


Рис.7. Распределение коэффициента трения по верхней кромке при углах атаки $\alpha = 7^\circ, 15^\circ$ и 20° .

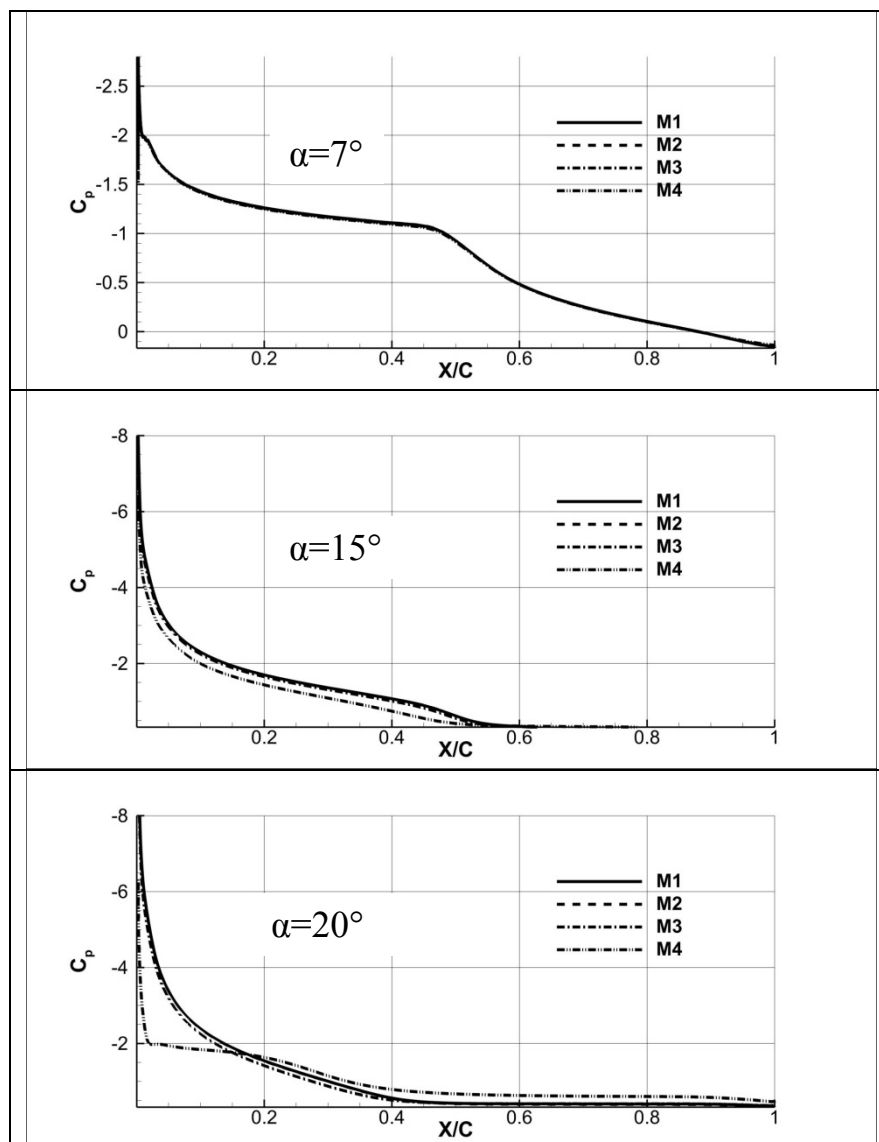


Рис.8. Распределение коэффициента давления по верхней кромке при угле атаки $\alpha = 7^\circ, 15^\circ$ и 20° .

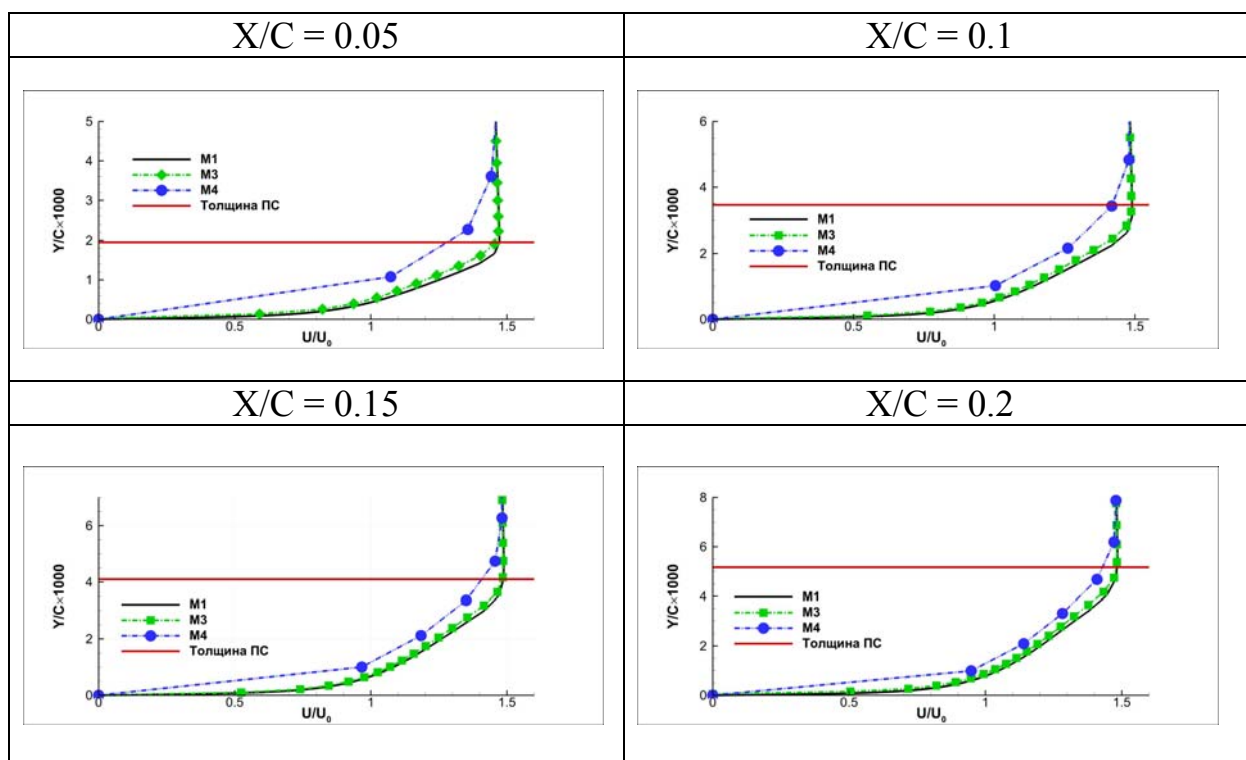


Рис. 9. Профили скорости в пограничном слое в различных сечениях при угле атаки $\alpha=7^\circ$.

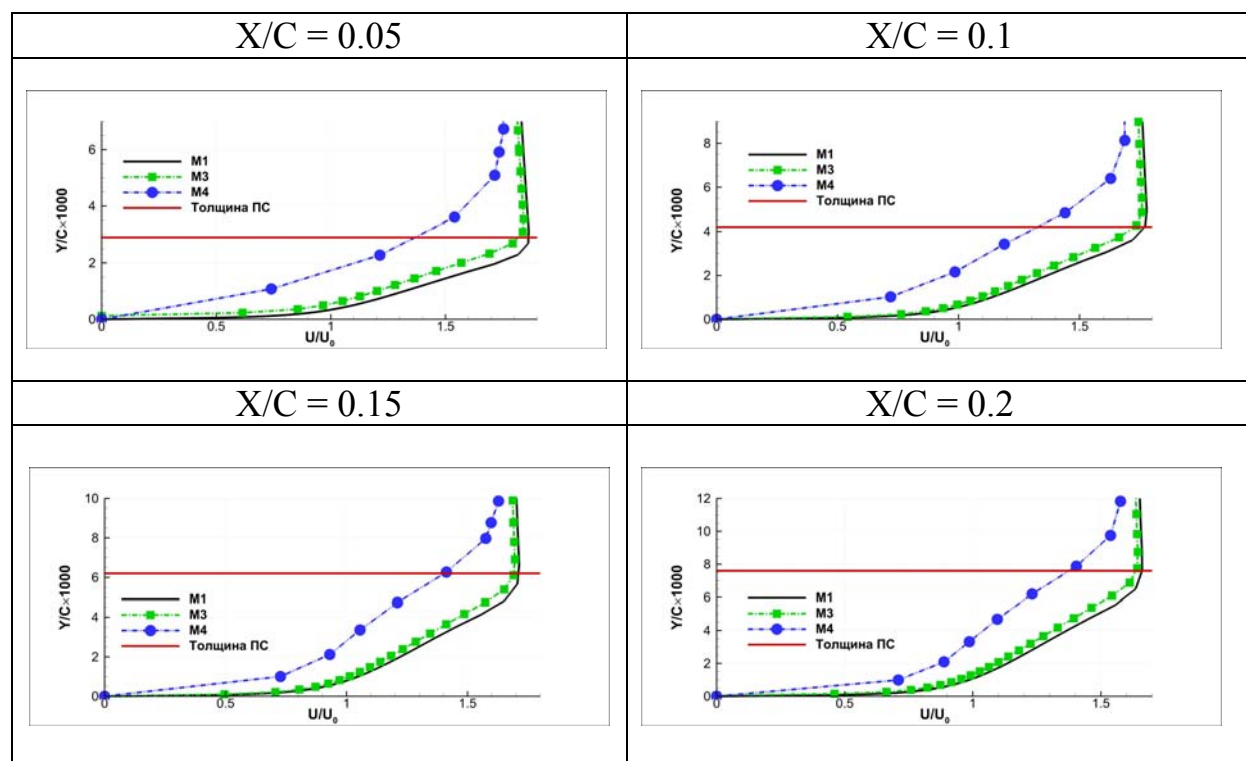


Рис.10. Профили скорости в пограничном слое в различных сечениях при угле атаки $\alpha=15^\circ$.

Расчеты на сетках с переменным по профилю первым пристенным шагом

Результаты расчетов на сетках, имеющих одинаковый первый пристенный шаг, показали, что с их помощью невозможно оценить применимость пристенных функций для расчета подобных течений. Таким образом, необходимо построить набор сеток, который обеспечивает достаточно высокие значения Δy_1^+ на поверхности профиля и одновременно обеспечивает достаточное количество точек внутри пограничного слоя для его разрешения. Очевидно, что этого можно достичь только при использовании переменного шага сетки вдоль поверхности профиля.

Для решения этой задачи были построены сетки Н1 и Н2 (рис. 11), первый пристенный шаг которых изменялся вдоль поверхности профиля и был примерно пропорционален толщине пограничного слоя в рассматриваемом сечении, определенного из расчета на сетке М1 (рис. 12). Первый узел практически по всей поверхности профиля попадает в буферную область ($\Delta y_1^+ > 5$), а на сетке Н2 в некоторых сечениях попадает в логарифмическую область (рис. 13, таблица 3).

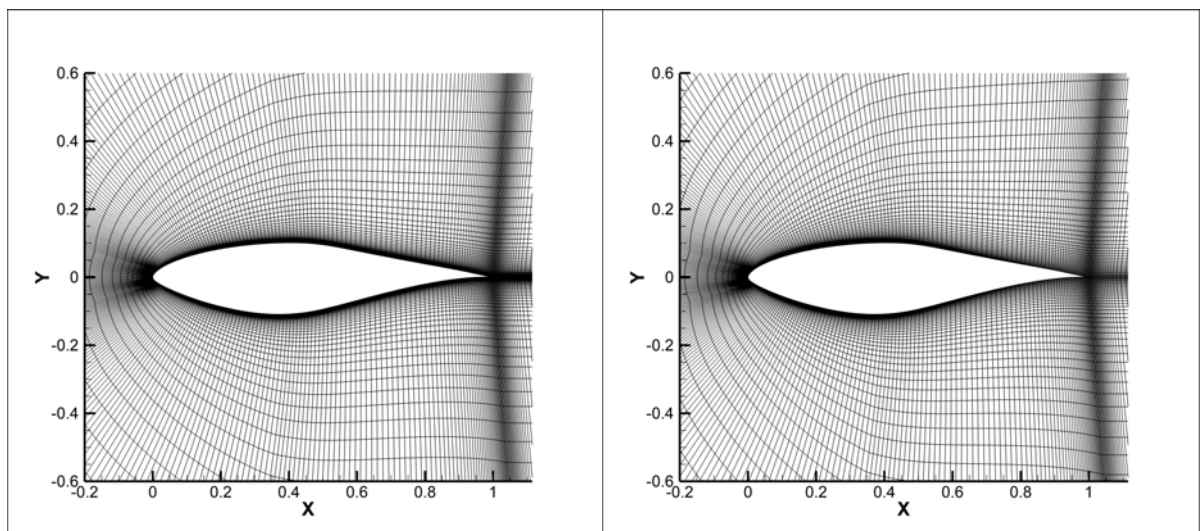


Рис.11. Расчетные сетки Н1 и Н2.

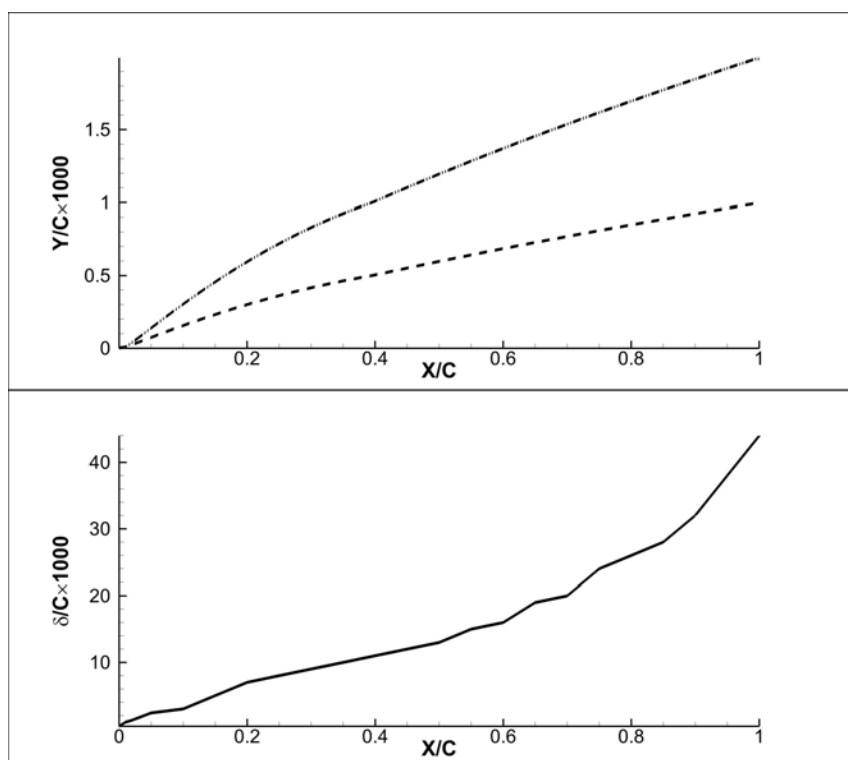


Рис.12. Распределение величины первого пристенного шага на сетках Н1 и Н2 (верх) и толщины пограничного слоя при угле атаки $\alpha=7^\circ$ (низ) на стороне разряжения.

Таблица 3. Характеристики сеток.

Параметры сетки	M1	H1	H2
Число ячеек	100080	34440	34440
Число узлов ($N_X \times N_Y \times N_Z$)	541×181×1	411×85×1	411×85×1
Число точек на профиле	361	311	311
Δy_1^+ , max	0,234	22,48	44,16
Δy_1^+ , среднее	0,098	13,612	27,53

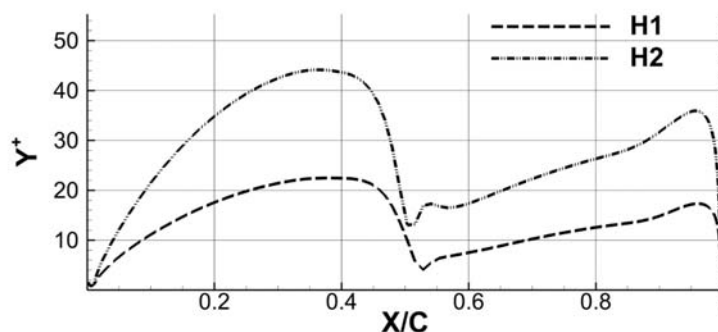


Рис.13. График распределения Δu_1^+ по верхней кромке профиля.

Профили скорости, полученные с использованием сеток Н1 и Н2, близки к профилям скорости, полученным на базовой сетке М1 (рис. 14, 15). Видно, что сетка Н1 обеспечивает не менее 12 точек внутри пограничного слоя в окрестности передней кромки, а сетка Н2 – не менее 8.

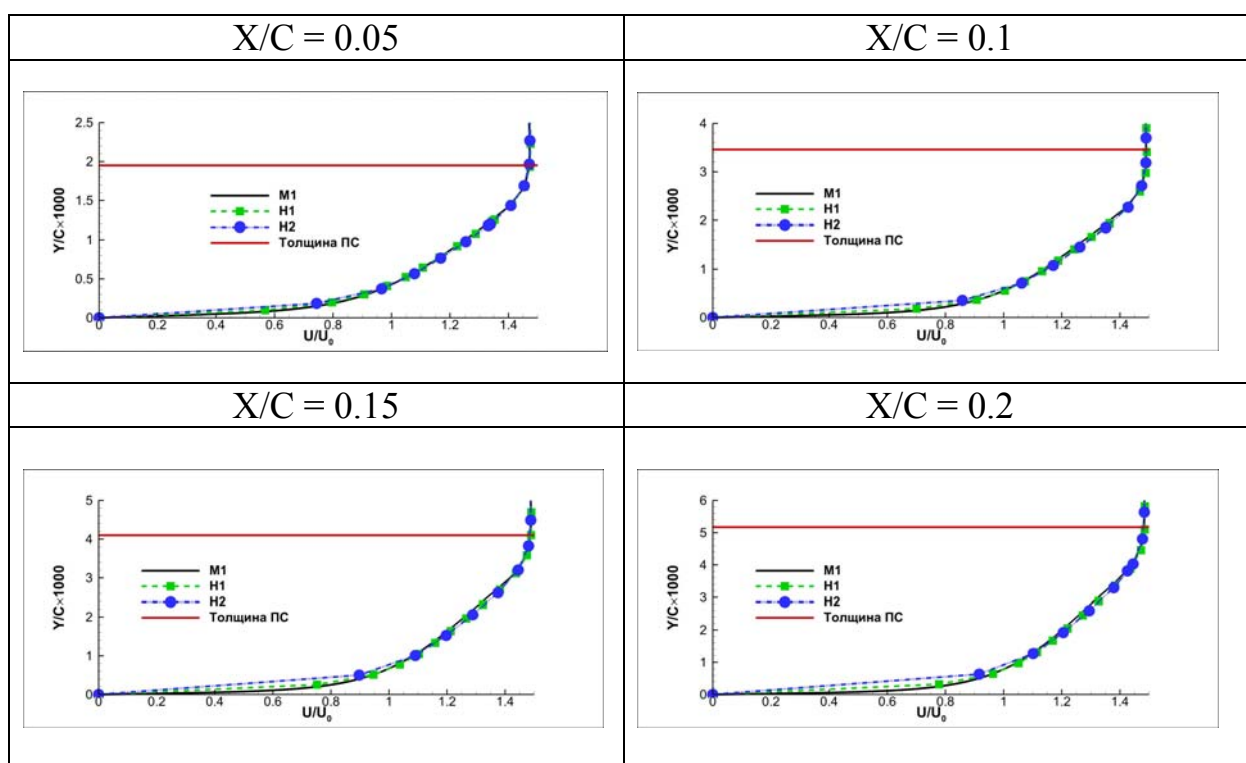


Рис. 14. Профили скорости в пограничном слое в различных сечениях при угле атаки $\alpha=7^\circ$.

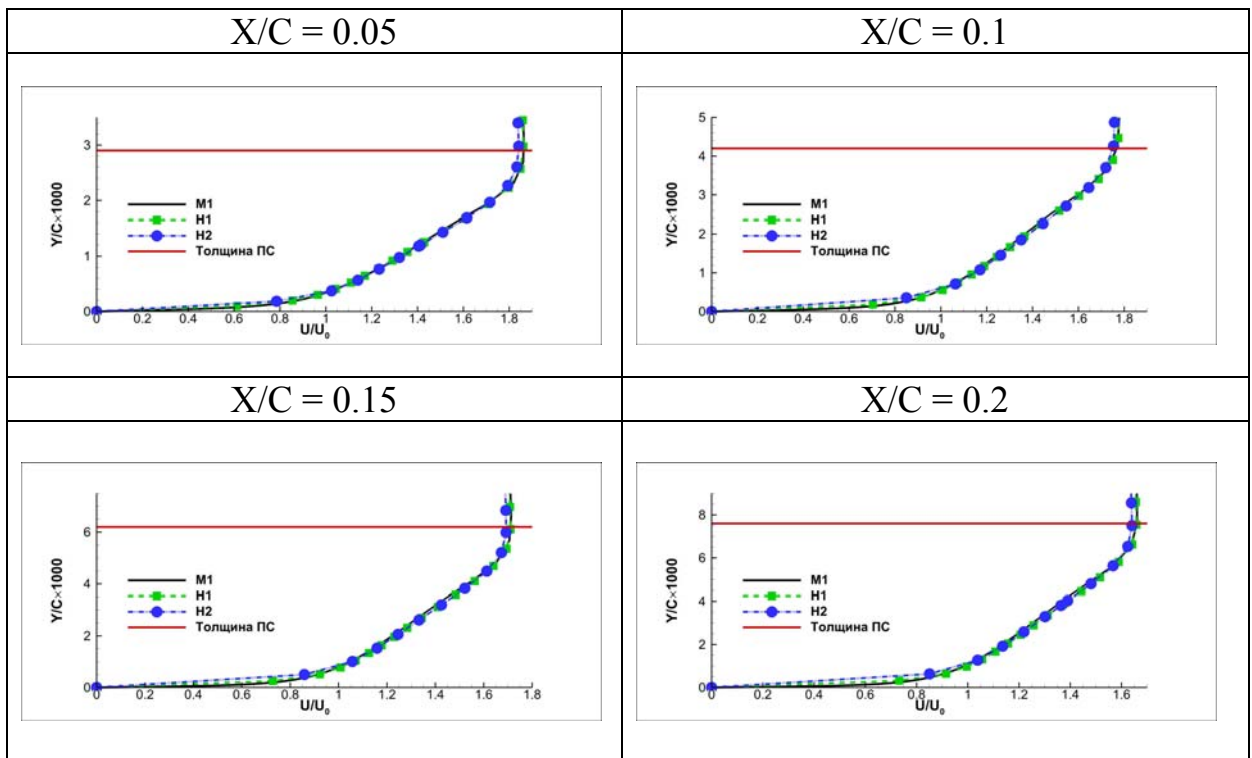


Рис. 15. Профили скорости в пограничном слое в различных сечениях при угле атаки $\alpha=15^\circ$.

Распределения коэффициента подъемной силы в зависимости от угла атаки (рис. 16), полученные на сетке H1 и H2 отличаются от результатов, полученных на базовой сетке M1 не более чем на 1.5% и 4%, соответственно. Наибольшее различие в положении точки отрыва также достигается на сетке H2 при углах 11-13° и достигает 0.1с (рис.16). Различия в коэффициенте трения при различных углах атаки не превышают 0.0005 (рис.17).

К сожалению, имеющиеся результаты не позволяют однозначно судить, является ли источником наблюдаемых ошибок недостаточное количество точек в пограничном слое или эти ошибки вызваны использованием пристенных функций.

Тем не менее, вносимая использованием более грубых сеток ошибка в коэффициенте подъемной силы существенно меньше разницы с экспериментальными данными (рис. 16), т.е. ошибки, вносимой моделью турбулентности. В этой связи применение более грубых сеток совместно с пристенными функциями кажется оправданным, поскольку позволяет экономить до 50% вычислительных ресурсов.

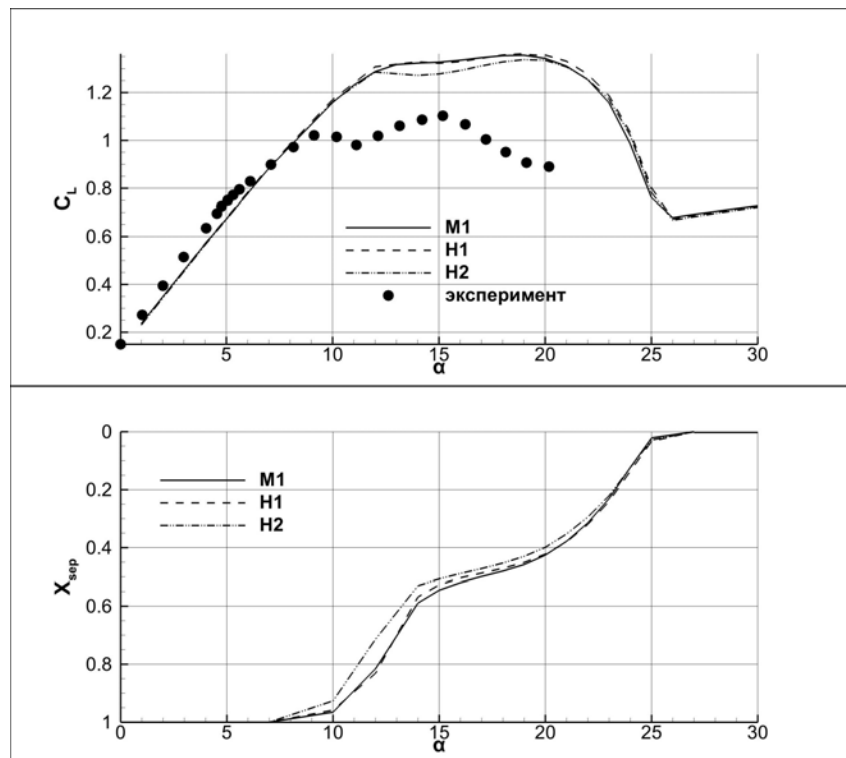


Рис. 16. Графики зависимости коэффициента подъемной силы и точки отрыва от угла атаки.

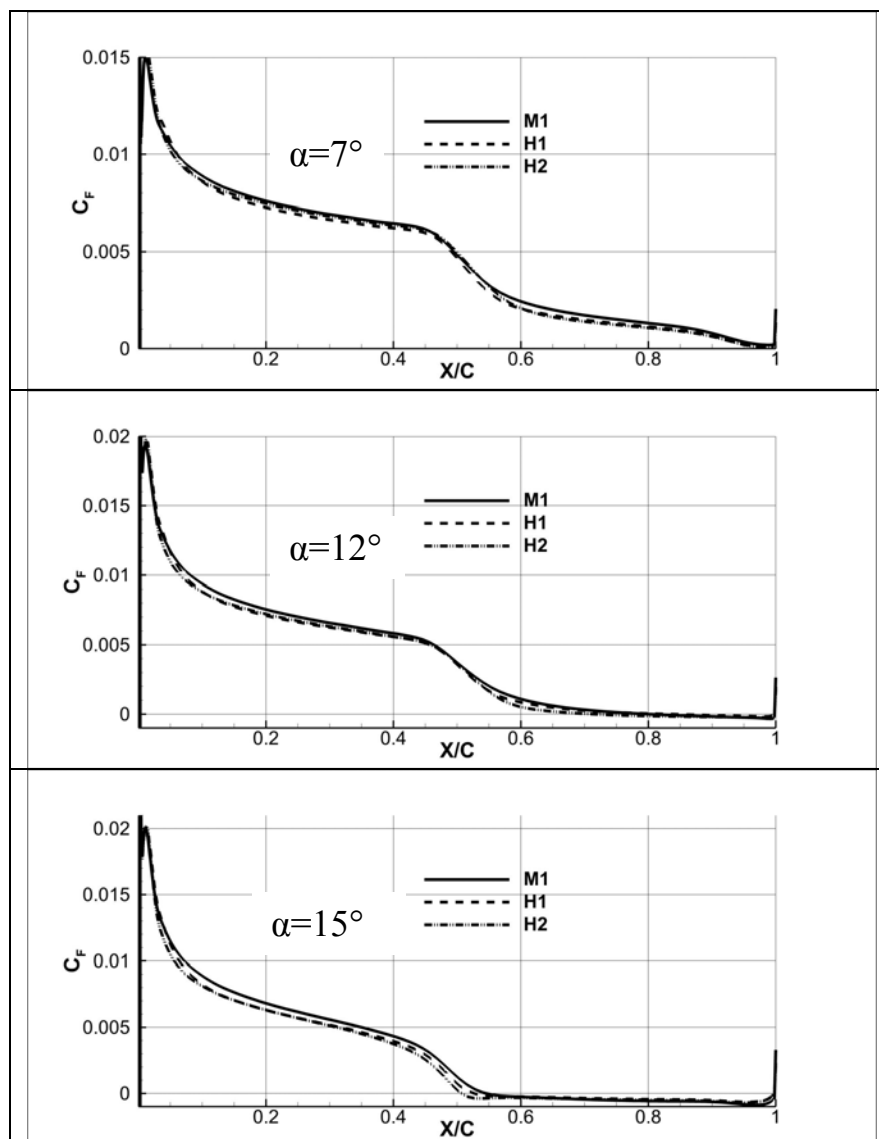


Рис.17. Распределение коэффициента трения по верхней кромке при угле атаки $\alpha=7^\circ$, 12° и 15° .

Заключение

По результатам работы можно сделать следующие выводы.

Автоматические пристенные функции применимы к расчету отрывных течений.

Использование более грубых сеток по нормали к стенке совместно с автоматическими пристенными функциями позволяет примерно в 2 раза сократить вычислительные затраты, при этом потеря точности в расчете коэффициента подъемной силы не превышает 4%.

При построении сеток, ориентированных на расчеты с использованием пристенных функций, необходимо следить за тем, чтобы количество узлов поперек пограничного слоя не становилось бы меньше 10.

Список литературы

1. R. Gasch, J. Twele. Wind Power Plants/ Fundamentals, Design, Construction and Operation. Springer, 2012 – 548 p.
2. J. Wayne. Helicopter theory. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980 – 856 p.
3. The CRC handbook of mechanical engineering / edited by F. Kreith, Y. Goswami. – 2nd ed. CRC Press LLC, Boca Raton, 2000.-1900 p.
4. G. Kalitzin, G. Medic, G. Iaccarino, P. Durbin. Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions. Journal of Computational Physics 204 (2005). P. 265-291.
5. Р.А.Янсон. Теория идеального горизонтально-осевого ветродвигателя в свободном атмосферном потоке: Учебное пособие по курсу «Ветроэнергетика» под ред. М.И. Осипова. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. - 32 с.
6. В.Л. Окулов, Ж.Н. Соренсен, Г.А.М. ван Куик. Развитие теории оптимального ротора. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2013. – 120 с.
7. W.J.M. Rankine. On the mechanical principles of action of propellers. // Transactions of the Institution of Naval Architects. 1865. Vol. 6. P.13-39 p.
8. R.E. Froude. On the part played in propulsion by differences of fluid pressure.// Transactions of the Institution of Naval Architects. 1889.Vol. 30. P. 390-405.
9. Н.Е. Жуковский. Аэродинамический расчет медленно движущихся ветряных мельниц (статья первая). Тихоходная ветряная мельница (статья вторая). Ветряная мельница НЕЖ (статья третья). // Труды ЦАГИ (литографическое издание) 1920. Переиздано в IV томе полного собрания сочинений Жуковского Н.Е. (1935-1937) с. 387- 424.

10. A. Betz. Das Maximum der theoretischmoglichen Ausnutzung des Windesdurch Windmotoren. // Zeitschrift fur das gesamteTurbinenwesen. 1920. Vol.26. P. 307-309.
11. Г.Х. Сабинин. Теорияидеального ветряка. // Труды ЦАГИ. 1927. Вып.32. С. 12- 20.
12. Г.Х. Сабинин. Теория и аэродинамический расчет ветряных двигателей. // Труды ЦАГИ. 1931. Вып.104. С. 35- 49.
13. A. Betz. Wind-Energie und ihre Ausnützungdurch Windmühlen. Göttingen: Bandenhdect&Ruprecht. 1926. 64 p.
14. H. Glauert. Airplane propellers. // Division L in Aerodynamic Theory.Vol. IV (ed. Durand W.F.). Springer: Berlin. P. 169-330.
15. R.E. Froude. The acceleration in front of a propeller. // Transactions of the Institution of Naval Architects. 1911. Vol. 53. P. 139-182.
16. F.W. Lanchester. A contribution to the theory of propulsion and the screw propeller. // Transactions of the Institution of Naval Architects. 1915. Vol. 30 (5). P. 98-116.
17. С.К. Джевецкий. Теория воздушных винтов и способ их вычисления / Авт. предисл. Н.Б. Делоне. –Киев: Тип. Р.К. Лубковского. – 62с.
18. Е.Н. Жуковский. Вихревая теория гребного винта, I-IV. // I-III в Трудах Отделения физических наук Общества любителей естествознания: I, 1912, т. 16 (1); II 1914, т. 17 (1); III 1915, т. 17(2); IVв Трудах авиационного расчетно-испытательного бюро, 1918, № 3.
19. A. Betz. Schrauben propeller mitneringstem Energieverlust: miteinem Zusatz von L. Prandtl. GöttingenNachrichten, Göttingen.1919. 97 p.
20. А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец, М.Л. Шур. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. - 88 с.
21. Ю.В. Лапин, А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец. Алгебраические модели турбулентности для пристенных канонических течений (немного истории и некоторые новые результаты). Научно-технические ведомости 2

2004. Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры «Гидроаэродинамика»). С. 1-32.

22. F.R.Menter. Review of the shear-stress transport turbulence model experience from an industrial perspective. // International Journal of Computational Fluid Dynamics. 2009. Vol. 23.N0 4. P. 305-316.

23. B. E. Launder, D.B Spalding. Mathematical Models of Turbulence. Academic Press Inc. Limited, London, 1972, - 169 p.

24. Salim M. Salim, S.C. Cheah. Wall y^+ Strategy for Dealing with Wall-bounded Turbulent Flows. IMECS 2009, 72-78 p.

25. T.J. Craft, S.E. Gant, A.V. Gerasimov, H. Iacovides, B.E. Launder. Developments and application of wall-function treatments for turbulent forced and mixed convection flows. Fluid Dynamics Research 38 (2006) 127-144 p.

26. Th. Alrutz, T. Knopp. Near-wall grid adaptation for wall-functions. 2013, 54-62 p.

27. ANSYS FLUENT Theory Guide. Release 14.0. November 2011, - 826 p.

28. С.В. Жлуктов, А.А. Аксенов, С.А. Харченко, И.В. Москалев, Г.Б. Сушко, А.С. Шишаева. Моделирование отрывных течений в программном комплексе FLOWVISION-НПС. Вычислительные методы и программирование. 2010. Т.11, 234-248 с.

29. Б.А. Кадер, А.М. Яглом. Спектры анизотропных турбулентных пульсаций скорости и температуры в пристеночных турбулентных потоках. В сб.: Проблемы турбулентных течений, М.: Наука, 1987, с.65-74.

30. F.R. Menter, J. Carregal Ferreira, T. Esch, B. Konno. The SST Turbulence Model with Improved Wall Treatment for Heat Transfer Predictions in Gas Turbines. Proceeding of the International Gas Turbine Congress 2003 Tokyo. – 7p.

31. F.R.Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. // AIAA, 1994. Vol. 32, No 8. P. 1598 -1605.

32. В.В. Шабаров. Применение системы ANSYS к решению гидрогазодинамических задач. Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «Информационные системы в математике и механике», Нижний Новгород, 2006 -112 с.
33. D. M. Somers. Design and Experimental Results for the S809 Airfoil. NREL, January, 1997 - 103 p.
34. Eswara Rao Anjuri. Comparison of Experimental results with CFD for NREL Phase VI Rotor with Tip Plate. INTERNATIONAL JOURNAL of RENEWABLE ENERGY RESEARCH. Vol. 2, No 4, 2012. P. 46-58.
35. C.P. Butterfield, W.P. Musial, D.A. Simms. Combined Experiment Phase I. Final Report. October 1992. NREL/TP – 257 – 4655. P. 221.