МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Институт прикладной математики и механики
Кафедра гидроаэродинамики

Работа допущена к защите
Зав. кафедрой, проф., д.ф.-м.н.
_____________ Смирнов Е.М.
"____"____________ 2014 г.

Разработка поправки на кривизну линий тока и вращение на основе алгебраической модели рейнольдсовых напряжений

Выпускная бакалаврская работа по направлению подготовки
010600 – Прикладные математика и физика

Выполнил студент гр. 43603/1 Стабников А.С.

Руководитель, к.ф.-м.н., доцент Гарбарук А.В.

Санкт-Петербург
2014

Оглавление

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на появление в последние годы гибридных методов расчета турбулентных течений, на практике по-прежнему наиболее широко применяется решение уравнений Рейнольдса. Этот подход, используя доступные вычислительные ресурсы, зачастую позволяет достаточно точно предсказать требуемые характеристики рассматриваемого течения. Чаще всего для замыкания уравнений Рейнольдса используются полуэмпирические модели турбулентной вязкости (EVM), основанные на гипотезе Буссинеска, постулирующей линейную связь между производными средних значений скорости и тензором рейнольдсовых напряжений. Такая популярность EVM обусловлена их простотой, устойчивостью, а так же экономичностью в плане вычислительных ресурсов по сравнению с моделями рейнольдсовых напряжений. К сожалению, все полуэмпирические модели турбулентности не универсальны [1], однако некоторые их дефекты носят систематический характер и могут быть исправлены при помощи введения в модели соответствующих поправок. В частности, именно так обстоит дело с течениями, в которых вращение потока или кривизна линий тока оказывают существенное влияние на характеристики турбулентности.

Важным обстоятельством является то, что эффекты вращения потока и кривизны линий тока имеют единую природу. В работе [2] предложено выражение, позволяющее свести влияние кривизны линий тока к эквивалентному эффекту вращения потока, т.е. связывающее локальные характеристики потока в неподвижной системе координат со скоростью вращения. Использование предложенного в [2] выражения позволяет успешно использовать модели, учитывающие вращение потока, для расчета течений с существенной кривизной линий тока.

Влияние вращения потока на характеристики турбулентности может быть точно учтено в рамках дифференциальных моделей переноса рейнольдсовых напряжений (DRSM). Полученные из таких DRSM явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM), использующие, в отличие от гипотезы Буссинеска, нелинейную связь между тензором напряжений Рейнольдса и производными средних значений скорости, также способны описать влияние вращения на турбулентность. Поскольку линейное слагаемое является доминирующим в EARSM, можно предположить, что учет эффектов вращения происходит за счет изменения коэффициента при этом слагаемом (аналог турбулентной вязкости в гипотезе Буссинеска). С учётом этого предположения, представляется возможным извлечь из EARSM влияние вращения потока на этот коэффициент и, воспользовавшись уже упоминавшийся связью кривизны линий тока с вращением [2], построить поправку на кривизну и вращение для моделей турбулентной вязкости.

Таким образом, целью данной работы является вывод поправки на кривизну линий тока и вращение на основе EARSM и связи между вращением и кривизной [2], а также всестороннее тестирование полученной поправки.

2. ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ ЛИНИЙ ТОКА И ВРАЩЕНИЯ ПОТОКА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Известно [3], что вращение потока и кривизна линий тока оказывают гораздо более существенное влияние на характеристики турбулентных течений, чем на характеристики ламинарных. Например, профиль скорости течения в плоском канале, вращающемся вокруг перпендикулярной к плоскости течения оси, в ламинарном случае является симметричным, а в турбулентном - асимметричным [4]. Другим наглядным примером является течение в искривлённом канале [5], в котором 1% относительная кривизна приводит к 10% разнице в коэффициенте трения на вогнутой и выпуклой стенках [6]. Столь сильное различие в поведении ламинарных и турбулентных течений может быть объяснено только сильным непосредственным воздействием кривизны и вращения на характеристики турбулентности. Таким образом, не учитывая этого воздействия невозможно правильно предсказать параметры многих турбулентных течений.

История создания поправок на кривизну и вращение для EVM началась ещё в конце 60-х годов. В 1969 году Bradshaw [7], используя аналогию между влиянием кривизны линий тока и силой плавучести, разработал способ учёта эффектов малой кривизны для тонких сдвиговых течений. Количественной мерой кривизны линий тока в его подходе является турбулентное число Ричардсона $Ri = 2S(1+S)$, где $S = \left(\frac{U}{r}\right) \Big/ \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)$, *U*- окружная скорость, *r* – локальный радиус кривизны, *n* – нормаль к линиям тока. Позднее, Launder и др. [8] была разработана поправка для *k*-*ε* модели, в которой в качестве критерия была выбрана несколько модифицированная форма турбулентного числа Ричардсона $Ri_t = \frac{k^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{U}{r^2}\frac{\partial(Ur)}{\partial n}\right)$, где *k* – кинетическая энергия турбулентности, а *ε* – диссипация. Поправка разрабатывалась для расчётов пограничного слоя на искривленных и вращающихся поверхностях и была протестирована в работе [9].

Оба эти подхода непригодны в общем случае трёхмерного течения, поскольку использованные критерии не являются инвариантами преобразования координат и могут быть применены только для решения узкого круга двумерных задач.

Более общие, инвариантные, подходы базируются на критериях, построенных на соотношениях инвариантов тензоров скоростей деформации $S=\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ и завихренности $\Omega=\sqrt{2\Omega^{m}{}_{ij}\Omega^{m}{}_{ij}}$, где $S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ и

$\Omega_{ij}^{m}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+e_{mji}\Omega_m\right]=\left[\Omega_{ij}+e_{mji}\Omega_m\right]$ - компоненты тензоров скоростей деформаций и завихренности, u_i - компоненты вектора скорости, Ω_m – вектор угловой скорости вращения системы координат, τ - турбулентный временной масштаб, а e_{mji} – символ Леви -Чевиты. Например, поправка Burr и др. [10] разработанная для k-ε модели, в качестве критерия использует параметр $Cu=\frac{k^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{S^2-\Omega^2}{2}\right)$, а поправка Zhang, Qiang и др. [11] - параметр $\tilde{r}=\frac{\Omega}{S}\left(\frac{\Omega}{S}-1\right)$. Такие поправки являются существенно более универсальными, однако для целого ряда течений они не обеспечивают необходимой точности.

Гораздо более успешной оказалась поправка Spalart, Shur [12], разработанная для модели с одним уравнением Спаларта-Аллмареса SA [13]. В отличие от рассмотренных поправок в ней используются два критерия. Первый из них $r^*=\frac{S}{\Omega}$, как и критерии в двух предыдущих поправках, построен на соотношении S и Ω. В качестве второго критерия выбрана скорость вращения главных осей тензора скоростей деформаций. Предложенное авторами приближенное выражение, основанное на полной производной DS/Dt от тензора скоростей деформаций, $\tilde{r} = \frac{2\Omega_{ik} S_{jk} (DS/Dt)_{ij}}{D^4}$, $D^2 = \frac{(S^2 + \Omega^2)}{2}$ обеспечивает инвариантность критерия.

При использовании этой поправки генерационный член в уравнении для турбулентной вязкости модели Спаларта-Аллмареса умножался на функцию $f_{r1} = f_{r1}(r^*, \tilde{r})$, которая была построена таким образом, чтобы удовлетворять следующим условиям.

В центре вихря необходимо обеспечить подавление турбулентной вязкости, поэтому в случае квазитвердого вращения (S=0, $\Omega \neq 0$), функция должна принимать постоянное значение $f_{r1}(0, \tilde{r}) = const < 0$. Это необходимо в силу особенностей модели Спаларта-Аллмареса, в которой генерация турбулентности пропорциональна Ω, а дисспация определяется расстоянием до стенки. Отрицательное значение f_{r1} позволяет использовать генерационное слагаемое для диссипации турбулентной вязкости в центре вихря.

В стационарных сдвиговых течениях $\left(S = \Omega, \left(\frac{DS}{Dt} \right)_{ij} = 0 \right)$ поправка не должна активизироваться, поэтому функция f_{r1} должна принимать значение 1 ($f_{r1}(1,0) = 1$). При слабом вращении $(S \approx \Omega, \tilde{r} << 1)$ предполагается линейная зависимость функции f_{r1} от $\tilde{r}$ ($f_{r1}(1, \tilde{r}) \approx 1 - C\tilde{r}$). Кроме того, функция должна быть ограниченной при больших значениях $\tilde{r}$ и r^*.

Авторами поправки была предложена следующая функция, удовлетворяющая вышеперечисленными критериям:

$$f_{r1}^{SA} = (1 + c_{r1}) \frac{2r*}{1 + r*} \left(1 - c_{r3} \tan^{-1}(c_r 2\tilde{r})\right) - c_{r1}. \qquad (1)$$

Константа $c_{r1} = 1$ была подобрана на задаче о расчете концевого вихря от кромки крыла, а константы $c_{r2} = 12$, $c_{r3} = 1$ – при рассмотрении искривленных и вращающихся пограничных слоев. Поправка была протестирована [14] и хорошо показала себя при расчете широкого круга течений.

Menter Smirnov [15] адаптировали поправку Spalart, Shur [11] для k-ω модели Ментера SST [16], которую можно считать лучшей EVM на сегодняшний день. В этой модели поправка на кривизну и вращение умножается на генерационный член в уравнении для k, поэтому она должна удовлетворять другим предельным критериям, чем поправка (1) для модели Спаларта-Аллмареса. В частности, функция f_{r1} не должна принимать отрицательные значения, поэтому функция (1) непригодна для использования совместно с k-ω моделью. Авторы поправки решили эту проблему путем ограничения функции f_{r1}^{SA}

$$f_{r1}^{SST} = \max\left\{\min\left\{1.25, f_{r1}^{SA}\right\}, 0.0\right\} \qquad (2)$$

и использованием измененной формулы для $\tilde{r}$:

$\tilde{r} = \dfrac{2\Omega_{ik} S_{jk} \left(DS/Dt\right)_{ij}}{\Omega D^3}$, $D^2 = \max\left\{S^2, 0.09\omega^2\right\}$, где ω – это удельная диссипация.

Константе C_2 было присвоено значение 2.0.

Однако такой подход не лишен недостатков. Достигая ограничителя, функция перестает различать изменение критериев $\tilde{r}$ и r^*, что ведет к отсутствию реакции на усиление или ослабление эффектов кривизны линий тока и вращения. Поэтому, несмотря на успешное применение данной поправки для целого ряда задач, следует признать, что она не является оптимальной и может быть улучшена.

Идея использования производной от тензора скоростей деформации была позднее использована Wallin, Johansson [2] для вывода связи между кривизной и вращением при разработке явной алгебраической модели рейнольдсовых напряжений EARSM Wallin, Johansson [17].

Вывод алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений (ARSM) из дифференциальных моделей (DRSM) основан на гипотезе слабого равновесия, предложенной Rodi [18] и позволяющей заменить дифференциальные уравнения для напряжений Рейнольдса алгебраическими связями. В рамках этой гипотезы рассматривается преобразованное уравнение компонент тензора рейнольдсовых напряжений

$$\left(P_{ij}+\Phi_{ij}-\varepsilon_{ij}\right)=\overline{u_i'u_j'}\big/k\left[P_k-\varepsilon\right]+k\frac{Db_{ij}}{Dt}+\left[\overline{u_i'u_j'}\big/k\frac{\partial D_k}{\partial x_k}-\frac{\partial D_{ijk}}{\partial x_k}\right],$$

и предполагается, что можно пренебречь вторым слагаемым в правой части - полной производной $\frac{Db_{ij}}{Dt}$ от компонент тензора анизотропии рейнольдсовых напряжений $b_{ij}=\overline{u_i'u_j'}\big/k-\frac{1}{3}\delta_{ij}$.

Здесь $P_{ij}=-\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}-\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ - генерация турбулентности, $\Phi_{ij}=\overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)}$ - корреляция давление – скорость деформации, $\varepsilon_{ij}=2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$ - диссипация, $D_{ijk}=\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'}-\overline{u_i'u_j'u_k'}-\frac{1}{\rho}\left(\delta_{ik}\overline{u_j'p'}+\delta_{jk}\overline{u_i'p'}\right)$ - диффузия, P_k и D_k - генерационный и диффузионный члены уравнения для кинетической энергии, а δ_{ij} - символ Кронекера.

Поскольку полная производная от компонент тензора $\frac{Db_{ij}}{Dt}=\frac{\partial b_{ij}}{\partial t}+u_k\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}$ не является тензором, справедливость гипотезы Роди зависит от используемой системы координат. Можно предположить, что в той «оптимальной» системе координат, где норма полной производной $\frac{Db_{ij}}{Dt}$ минимальна, гипотеза Роди наиболее справедлива и, как следствие, полученная с ее помощью модель (ARSM) является наиболее точной.

Поскольку характеристики турбулентности не должны зависеть от используемой системы координат, влияние кривизны линий тока в неподвижной (исходной) системе координат и влияние вращения потока в подвижной («оптимальной») системе координат на эти характеристики должно быть одинаковым. Иными словами, в рамках алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений влияние кривизны линий тока может быть учтено путем учета влияния вращения, скорость которого совпадает со скоростью вращения «оптимальной» системы координат.

Для определения угловой скорости вращения «оптимальной» системы координат $\overrightarrow{\omega^r}$ Wallin, Johansson [2] предположили, что полная производная каждой из компонент тензора анизотропии $\frac{Db_{ij}}{Dt}$ будет наименьшей в той системе координат, в которой наименьшей является полная производная от соответствующей компоненты тензора скоростей деформаций $\frac{DS_{ij}}{Dt}$. Это предположение основано на том, что линейное слагаемое ($\sim S_{ij}$) вносит основной вклад в выражении для b_{ij}.

Система уравнений $\frac{DS_{ij}}{Dt} = 0$ может быть использована для определения скорости вращения «оптимальной» системы координат $\overrightarrow{\omega^r}$, однако она является переопределенной, поскольку содержит 6 уравнений для трёх компонент угловой скорости. Для определения $\overrightarrow{\omega^r}$ Wallin, Johansson [2] воспользовались методом наименьших квадратов и, минимизируя функционал $\sum\left(\frac{DS}{Dt}\right)_{ij}^2$, получили следующее выражение для скорости вращения «оптимальной» системы координат:

$$\omega_m^r = A_{mj}^{-1} S_{pl} \left(\frac{DS}{Dt}\right)_{lq} \varepsilon_{pqj}, \tag{3}$$

где $A_{ij}^{-1} = \frac{II_S^2 \delta_{ij} + 12 III_S S_{ij} + 6 II_S S_{ik} S_{kj}}{2 II_S^3 - 12 III_S^2}$, а $II_S = S_{ij} S_{ji}$, $III_S = S_{ij} S_{jk} S_{ki}$.

Видно, что формула (3), как и критерий $\tilde{r}$ в поправке Spalart, Shur [12], основана на полной производной тензора скоростей деформации. Важным обстоятельством является то, что для вращающихся течений с параллельными линиями тока величина ω_m^r совпадает со скоростью вращения потока. Хотя формула (3) выведена на основе ARSM [17], она может рассматриваться как локальная скорость вращения системы координат, в которой влияние кривизны линий тока сводится к влиянию вращения. Таким образом, при использовании формулы (3) любая модель, учитывающая влияние вращения потока, способна предсказать эффекты кривизны линий тока.

Влияние вращения непосредственно на характеристики турбулентности осуществляется за счёт действия силы Кориолиса, в то время как центробежная сила оказывает влияние только на характеристики осредненного течения [3]. Влияние силы Кориолиса, в свою очередь, может быть явно учтено в рамках дифференциальных моделей рейнольдсовых напряжений DRSM, уравнения которых выведены с учетом вращения системы координат. Анализ литературы показал, что одной из лучших DRSM, учитывающих влияние вращения потока, является модель SSG [19]. Явная алгебраическая модель рейнольдсовых напряжений GS [20], полученная непосредственно из модели SSG, сохраняет свойство предсказывать эффекты вращения на характеристики турбулентности. Хотя в модели GS используется нелинейная алгебраическая связь между тензором рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций, наиболее существенный вклад в напряжения Рейнольдса вносит линейное слагаемое. Таким образом, способность этой модели учитывать эффекты вращения потока обусловлена, в первую очередь, влиянием вращения на коэффициент при линейном слагаемом. Зависимость данного коэффициента от скорости вращения может рассматриваться как поправка на вращение и использоваться совместно с другими моделями турбулентности.

Эта идея была использована в поправке [21], разработанной для модели с 4-мя уравнениями Durbin [22], в рамках которой турбулентная вязкость умножается на функцию

$$f_{r1}^{Du} = \frac{1+\alpha_2|\vartheta|+\alpha_3\vartheta}{1+\alpha_4|\vartheta|}\left(\sqrt{\frac{1+\alpha_5\eta}{1+\alpha_5\zeta}}+\alpha_1\sqrt{\zeta}\sqrt{|\vartheta|-\vartheta}\right)^{-1}, \tag{4}$$

где $\zeta=\sqrt{W_{ij}^{*}W_{ij}^{*}}$, $\eta=\sqrt{S_{ij}^{*}S_{ij}^{*}}$ - инварианты модифицированных тензоров скоростей деформаций $S_{ij}^{*}=g\tau\left(1-\frac{1}{2}C_3\right)S_{ij}$ и завихренности $\Omega_{ij}^{*}=g\tau\left[\left(1-\frac{1}{2}C_4\right)\Omega_{ij}+e_{mji}\Omega_m\right]$, $\vartheta=\eta-\zeta$, $\tau=k/\varepsilon$ – турбулентный масштаб времени, величина $g=\left(0.7+1.9\,P_k/\varepsilon\right)^{-1}$ определяется соотношением генерации и диссипации кинетической энергии турбулентности, Ω_m –вектор угловой скорости вращения системы координат, а константы равны, соответственно, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=(0.055,\ 0.5, 0.25, 0.2, 0.025)$, $C_3=1.25, C_4=0.4$. Эта поправка впоследствии была успешно протестирована на различных течениях [23], [24].

Следует отметить, что модель Durbin [22], совместно с которой использовалась поправка [21], уступает модели SST даже при расчете течений, в которых кривизна линий тока не оказывает существенного влияния [25], а использование поправки [21] никак не может исправить этого недостатка. Кроме того, предложенная поправка использовалась только для учета эффектов вращения, поскольку была предложена раньше, чем связь между кривизной лилий тока и вращением [2].

Таким образом, существующая поправка на кривизну линий тока и вращение потока [15] для лучшей на сегодняшний день модели турбулентности SST [16] не является оптимальной. Более оптимальная поправка может быть разработана с учетом идей, предложенных в работах [2,21].

3. ФОРМУЛИРОВКА ПОПРАВКИ

Как и в работе [21], отправной точкой для вывода предлагаемой поправки является EARSM GS [20], успешно предсказывающая влияние вращения на характеристики турбулентности. Однако предлагаемый в настоящей работе способ оценки этого влияния отличается от использовавшегося в [21] и приводит к поправочной функции, отличной от (4).

В рамках модели GS тензор анизотропии рейнольдсовых напряжений $b_{ij} = \overline{u'_i u'_j}/k - \frac{1}{3}\delta_{ij}$ выражается нелинейной комбинацией модифицированных тензоров завихренности Ω^* и скоростей деформаций S^*:

$$b_{ij} = -\frac{C_2 - \frac{4}{3}}{C_3 - 2}\left(2\zeta^2 + \frac{1+\eta^2/3}{1+\eta^2}\right)^{-1}\left[S^*_{ij} + (S^*_{ik}\Omega^*_{kj} - \Omega^*_{ik}S^*_{kj}) - 2\left(S^*_{ik}S^*_{kj} - \frac{1}{3}S^*_{kl}S^*_{kl}\delta_{ij}\right)\right]. \qquad (5)$$

Здесь

$$\zeta = \sqrt{W^*_{ij}W^*_{ij}} \text{ и } \eta = \sqrt{S^*_{ij}S^*_{ij}} \qquad (6)$$

- инварианты модифицированных тензоров скоростей деформаций и завихренности,

$$S^*_{ij} = g\tau\left(1 - \tfrac{1}{2}C_3\right)S_{ij},\ \Omega^*_{ij} = g\tau\left[\left(1 - \tfrac{1}{2}C_4\right)\Omega_{ij} + e_{mji}\Omega_m\right]. \qquad (7)$$

Величина g определяется соотношением генерации и диссипации кинетической энергии турбулентности

$$g = \left(0.7 + 1.9\,P_k/\varepsilon\right)^{-1} \qquad (8)$$

и в оригинальной модели GS [20] принимается постоянной величиной (g≈0.233).

Наконец, константы, модели равны $C'_1 = 1.8, C_2 = 0.8 - 1.3\sqrt{b_{ij}b_{ij}}, C_3 = 1.25, C_4 = 0.4$.

Следует отметить, что учет силы Кориолиса при выводе этой модели приводит к появлению последнего слагаемого Ω_m в выражении для модифицированной завихренности Ω^* (7). Именно наличие этого слагаемого определяет успех данной модели при расчете течений во вращающейся системе координат, а при его отсутствии, т.е. при использовании выражения

$$\Omega_{ij}^* = g\tau\left(1-\frac{C_4}{2}\right)\Omega_{ij} \tag{9}$$

учет влияния вращения на характеристики турбулентности отсутствует.

Отношение коэффициента при линейном слагаемом в (5) в случае учета влияния вращения (7) и без этого учета (9) можно рассматривать как меру влияния вращения на турбулентную вязкость

$$f_{r1}^{GS}(\overrightarrow{\omega^r}) = \frac{2\zeta_0^2 + \dfrac{1+\eta^2/3}{1+\eta^2}}{2\zeta_1^2 + \dfrac{1+\eta^2/3}{1+\eta^2}}, \tag{10}$$

где $\zeta_0^2 = \left(g\tau\left(1-\frac{C_4}{2}\right)\right)^2 \Omega_{ij}\Omega_{ij}$ и $\zeta_1^2 = \left(g\tau\left(1-\frac{C_4}{2}\right)\right)^2 \left(\Omega_{ij} + \left(1-\frac{C_4}{2}\right)^{-1} e_{mji}\omega_m^r\right)\left(\Omega_{ij} + \left(1-\frac{C_4}{2}\right)^{-1} e_{mji}\omega_m^r\right)$.

Здесь ω_k^r - компоненты вектора угловой скорости вращения системы координат. Для учета влияния кривизны линий тока эта величина вычисляется локально с использованием предложенной в [2] связи между кривизной и вращением

$$\omega_m^r = A_{mj}^{-1} S_{pl}\left(\frac{DS}{Dt}\right)_{lq}\varepsilon_{pqj},$$

где $A_{ij}^{-1} = \dfrac{II_S^2\delta_{ij} + 12III_S S_{ij} + 6II_S S_{ik}S_{kj}}{2II_S^3 - 12III_S^2}$, а $II_S = S_{ij}S_{ji}$, $III_S = S_{ij}S_{jk}S_{ki}$.

Наконец при вычислении величины g вместо постоянного значения в настоящей работе используется выражение, предложенное в [17],

$$\frac{P}{\varepsilon} = \frac{4}{9}\left(N - C_1'\right), \tag{11}$$

где величина N является вещественным корнем кубического уравнения

$$N^3 - C_1' N^2 - \left(\frac{27}{10}\tau^2 S_{ij} S_{ji} + 2\tau^2 \Omega_{ij}\Omega_{ji}\right) N + 2C_1'\tau^2 \Omega_{ij}\Omega_{ji} = 0 .$$

Этот корень может быть найден при помощи комбинации тригонометрической формулы и формулы Кардано:

$$\begin{cases} N = \dfrac{C_1'}{3} + \left(P_1 + \sqrt{P_2}\right)^{1/3} + \mathrm{sign}\left(P_1 - \sqrt{P_2}\right)\left|P_1 - \sqrt{P_2}\right|^{1/3}, \quad P_2 \ge 0 \\ N = \dfrac{C_1'}{3} + 2\left(P_1^2 - P_2\right)^{1/6} \cos\left(\dfrac{1}{3}\arccos\left(\dfrac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right)\right), \quad P_2 < 0 \end{cases}, \qquad (12)$$

$$P_1 = \left(\frac{C_1'^2}{27} + \frac{9}{20}\tau^2 S_{ij} S_{ji} - \frac{2}{3}\tau^2 \Omega_{ij}\Omega_{ji}\right) C_1',$$
$$P_2 = P_1^2 - \left(\frac{C_1'^2}{9} + \frac{9}{10}\tau^2 S_{ij} S_{ji} + \frac{2}{3}\tau^2 \Omega_{ij}\Omega_{ji}\right)^3. \qquad (13)$$

Следует отметить, что эффективность поправки зависит не только от самой функции, являющейся мерой влияния кривизны линий тока и вращения, но и от способа ее использования совместно с моделью турбулентности, что можно сделать различным образом. Так, в работе Ментера и Смирнова [15] поправочная функция использовалась в качестве множителя генерационного слагаемого в уравнениях переноса турбулентных характеристик. Именно этот способ использования поправочной функции был применен в настоящей работе.

Уравнения модели SST с учётом функции поправки (10) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{D(\rho k)}{Dt} = \nabla \cdot [(\mu + \sigma_k \mu_T)\nabla k] + f_{r1}^{GS} P_k - \beta^* \rho \omega k \\ \dfrac{D(\rho \omega)}{Dt} = \nabla \cdot [(\mu + \sigma_\omega \mu_T)\nabla \omega] + \gamma \dfrac{\rho}{\mu_T} f_{r1}^{GS} P_k - \beta \rho \omega^2 + (1 - F_1) D_{k\omega} \end{cases}, \qquad (14)$$

здесь ρ – плотность, μ – динамическая вязкость, $P_k = \min\left(\mu_t S^2, 20\beta^* \rho k\omega\right)$ - генерационный член, $D_{k\omega} = \frac{2\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega}(\nabla k)\cdot(\nabla\omega)$ - перекрестный член. Турбулентная вязкость рассчитывается по формуле $\mu_T = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1\omega, \Omega F_2)}$, где $F_2 = \tanh\left(\arg_2^2\right)$, $\arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega d_w}, \frac{500\nu}{d_w^2\omega}\right)$, а d_w означает расстояние от рассматриваемой точки до ближайшей точки твердой поверхности.

Наконец, эмпирические константы модели определяются через соответствующие константы *k-ε* и *k-ω* моделей с помощью эмпирической “весовой” функции F_1:

$$\sigma_k = F_1\sigma_{k1} + (1-F_1)\sigma_{k2},\ \sigma_\omega = F_1\sigma_{\omega 1} + (1-F_1)\sigma_{\omega 2},\ \beta = F_1\beta_1 + (1-F_1)\beta_2,$$

где

$$F_1 = \tanh\left(\arg_1^4\right),\ \arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d_w}, \frac{500\nu}{d_w^2\omega}\right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}d_w^2}\right], \text{ а } CD_{k\omega} = \max\{D_{k\omega}, 10^{-20}\}.$$

Индексы “1” и “2” в относятся соответственно к константам *k-ω* и *k-ε* моделей:

$$\sigma_{k1} = 0.85, \sigma_{\omega 1} = 0.5, \beta_1 = 0.075,$$
$$\sigma_{k2} = 1.0, \sigma_{\omega 2} = 0.856, \beta_2 = 0.0828$$

а остальные константы равны $\beta^* = 0.09$, $\kappa = 0.41$, $a_1 = 0.31$, $\gamma = \beta/\beta^* - \sigma_\omega\kappa^2/\sqrt{\beta^*}$.

4. ТЕСТИРОВАНИЕ ПОПРАВКИ

Полученная поправка была протестирована на четырёх течениях: развитие однородной турбулентности в поле однородного сдвига, течение в плоском вращающемся канале, течение в плоском канале с поворотом на 180°, течение в трубе с прямоугольным сечением с поворотом на 90°.

Расчёты проводились в рамках NTS – кода [26]. Данный код использует метод конечных объемов и предполагает использование структурных многоблочных перекрывающихся сеток (так называемая технология “Chimera”), что, с одной стороны, позволяет применять разработанные для структурных сеток конечно-разностные схемы повышенного порядка аппроксимации, а с другой, - обеспечивает возможность проведения расчетов в областях сложной, практически произвольной, геометрической формы.

Расчет стационарных течений с использованием уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью модели SST, проводился методом установления во времени. При этом производные по времени аппроксимировались с первым порядком точности, и для ускорения сходимости к стационарному решению применялся локальный (в каждой точке расчетной сетки) выбор величины шага интегрирования по времени (итерационного параметра) в соответствии с заданным, единым для всего поля течения, числом Куранта. Производные от вязких потоков аппроксимировались с помощью симметричных разностей второго порядка точности, а производные от конвективных потоков – с помощью противопоточных разностей с третьего порядка точности для уравнений переноса импульса газа и первого порядка точности для уравнений переноса турбулентных характеристик.

Решение системы разностных аналогов исходных уравнений относительно приращений искомых функций на каждой глобальной итерации осуществлялось с помощью релаксации Гаусса-Зейделя по плоскостям для газодинамических уравнений и с помощью модифицированного (с диагональным преобладанием) метода приближенной факторизации по пространственным направлениям для уравнений переноса турбулентных характеристик (кинетической энергии турбулентности и удельной скорости ее диссипации).

4.1 Течение в поле однородного сдвига

Рассматривается однородное по пространству турбулентное течение несжимаемой жидкости при однородном сдвиге скорости $\frac{du}{dy} = const = S$, вращающееся с угловой скоростью вращения Ω вокруг оси z (рис. 1). Течение характеризуется одним безразмерным параметром – числом Россби $\mathrm{Ro} = \frac{\Omega}{S}$. Поскольку сдвиговые напряжения в течении приводят к генерации кинетической энергии турбулентности, а вращение может как подавлять, так и усиливать эту генерацию, соответственно, в зависимости от числа Россби энергия либо увеличивается, либо уменьшается со временем.

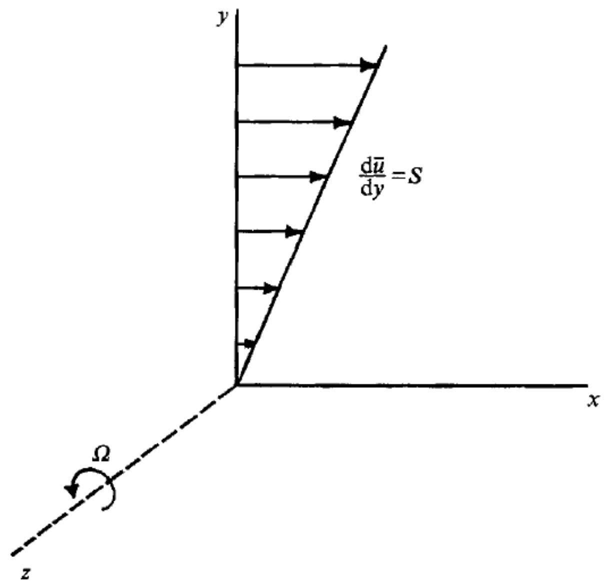

Рис. 1. Постановка задачи об однородном сдвиге.

Задача была изучена методом LES в 1983 году [27], однако расчёты проводились лишь для ограниченного количества чисел Ro. Кроме того, детали расчётов недоступны. В связи с этими обстоятельствами было решено провести расчеты LES в рамках настоящей работы.

4.1.1 LES развития турбулентности в поле однородного сдвига

Расчеты течения несжимаемой жидкости во вращающейся системе координат были выполнены с помощью LES с подсеточной моделью Смагоринского. Число Рейнольдса Re, построенное по масштабу скорости U_0 и линейному размеру L_0, равно 1620.

Расчётная область имеет размеры $2\pi L_0 \times 2\pi L_0 \times 2\pi L_0$. Поле скорости в начальный момент времени получено суперпозицией однородного сдвига и пульсационной компоненты скорости, построенной на основе экспериментального спектра однородной изотропной турбулентности [28] с кинетической энергией равной $3.913U_0^2$ и масштабом наиболее энергонесущих вихрей равному $0.376L_0$ (рис. 2). Это поле создаётся с помощью обратного преобразования Фурье, обеспечивающего выполнение уравнения неразрывности и заданное распределение энергетического спектра. Граничные условия по всем направлениям для всех переменных являются периодическими, за исключением условия по “y” для компоненты скорости U, которое является периодическим с учетом сдвига и имеет следующий вид $U(-\pi) = U(\pi) + 2\pi S L_0$. Пример начального поля скорости при величине сдвига $S = 3.183\frac{U_0}{L_0}$ приведен на рисунке 3.

При выполнении LES расчётов аппроксимация невязких потоков в уравнениях переноса импульса осуществляется по симметричной схеме 4-го порядка точности, а вязких – по симметричной схеме 2-го порядка. Аппроксимация по времени осуществляется с помощью трехслойной схемы Эйлера, имеющей 2-ой порядок точности.

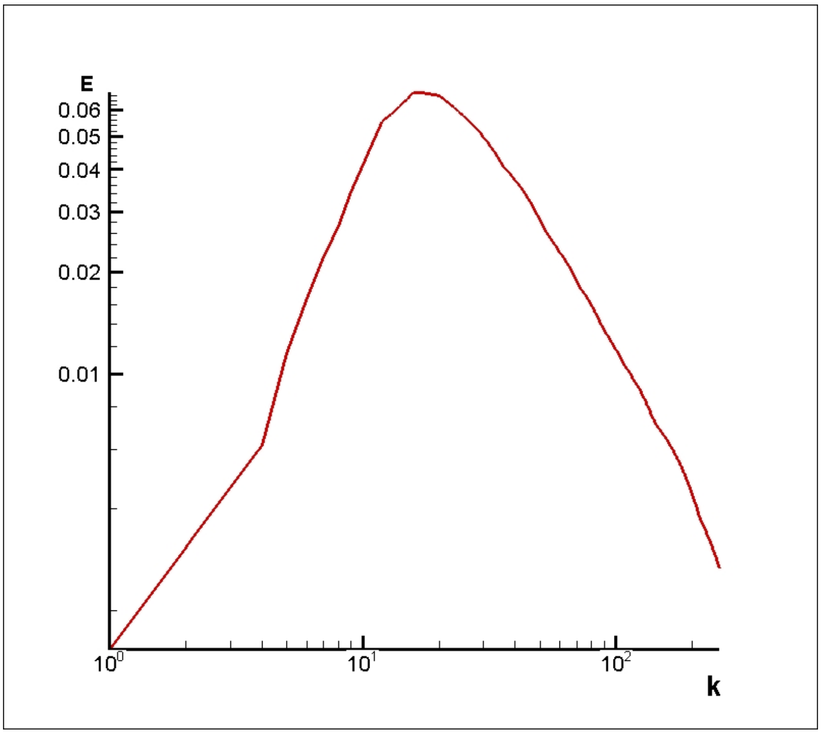

Рис. 2. Энергетический спектр однородной изотропной турбулентности, использовавшийся для построения полей пульсаций скорости в начальный момент времени.

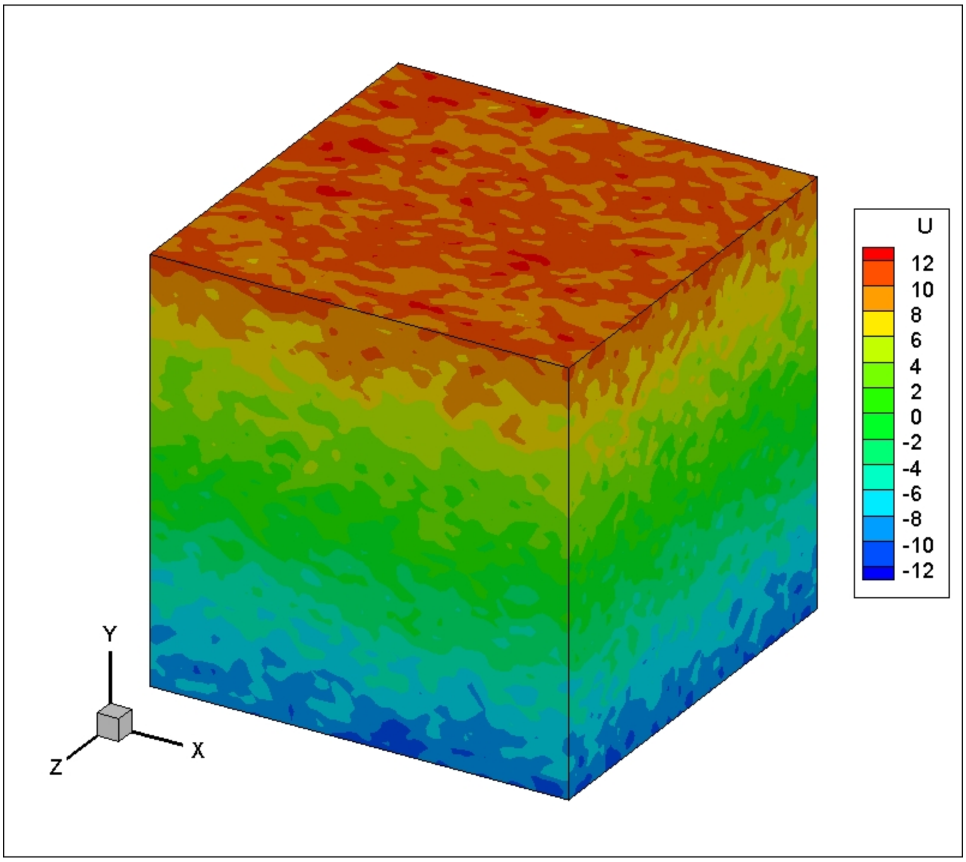

Рис. 3. Поле x-компоненты скорости в начальный момент времени.

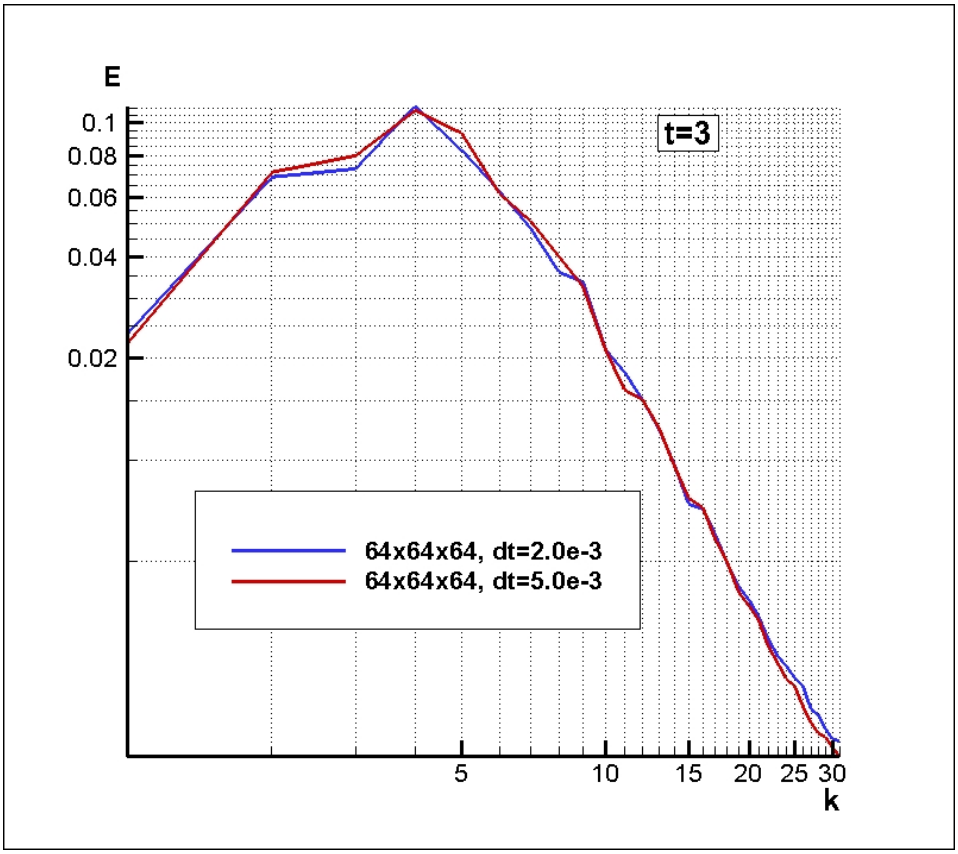

Рис. 4. Энергетические спектры турбулентности в момент времени t=3 для различных значений шага по времени dt.

Исследование зависимости решения от шага по времени dt (рис. 4) было проведено с использованием сетки 64^3. Было установлено, что в рассмотренных пределах величина шага по времени dt практически не оказывает влияния на получаемое решение, а влияет только на глубину сходимости. Приемлемой является величина $dt = 5{\cdot}10^{-3}$. Основная серия расчетов проводилась на более мелкой сетке 128^3 с шагом по времени $dt = 2.5{\cdot}10^{-3}$, что обеспечивает такое же число Куранта как $dt = 5{\cdot}10^{-3}$ для сетки 64^3.

Как уже отмечалось, наличие сдвига в течении приводит к развитию турбулентности при некоторых скоростях вращения, в том числе и при его отсутствии. При этом характерный размер наиболее энергонесущих структур увеличивается со временем, таким образом, начиная с определенного момента, размер расчётной области начинает влиять на полученное решение.

На рисунке 5 изображена эволюция спектров турбулентности во времени, для расчёта Ω=0. Видно, что начиная с момента времени t=2 наклон высокочастотной части спектра одинаков и существенно отличается от наклона спектра однородной изотропной турбулентности при t=0. Начиная с момента t=4, максимум спектральной плотности начинает соответствовать волновому числу k=2, при этом значение максимума растёт. Соответственно, наиболее крупные вихревые структуры достигают размеров близких к размеру расчётной области, что приводит к их искажению. В промежутке времён 2<t<4 на решение уже не оказывает влияние несоответствие начального спектра турбулентности рассматриваемой задаче, а наиболее энергонесущие структуры еще не достигли размера расчетной области, поэтому решение можно считать автомодельным.

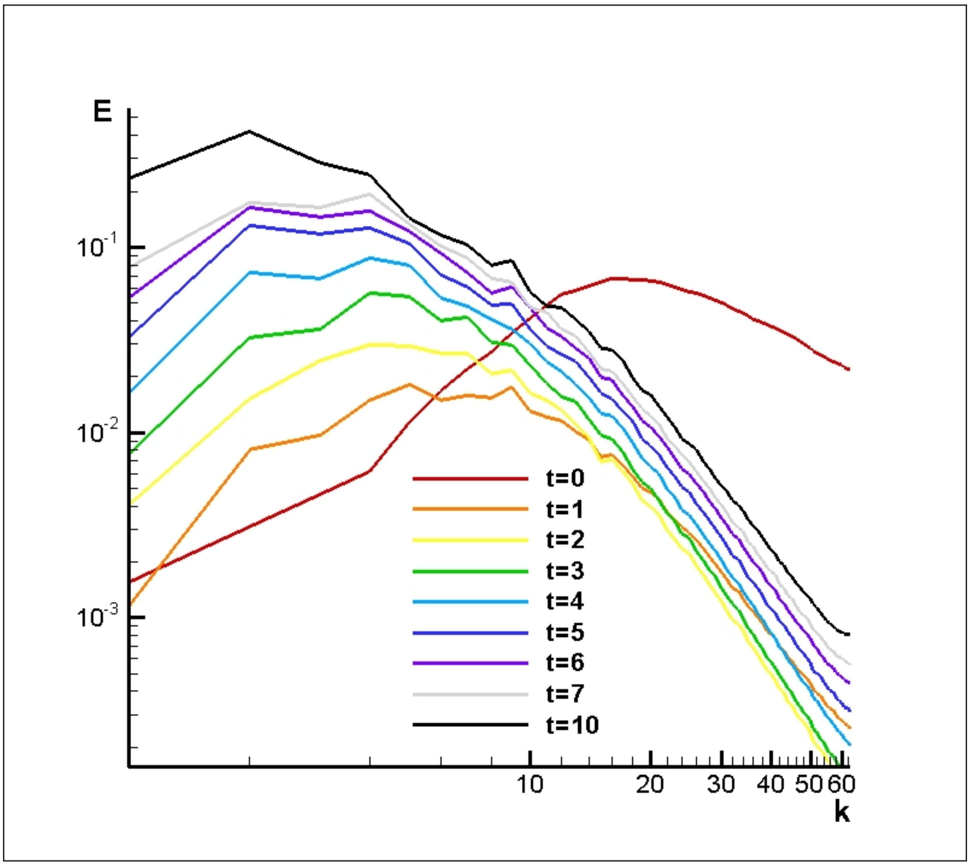

Рис. 5. Характерные спектры турбулентности течения со сдвигом в разные моменты времени.

Подобный анализ спектров, позволяющий определить диапазон времени $[t_0,t_1]$, в котором решение можно считать автомодельным, проводился для всех рассмотренных чисел Россби.

К настоящему моменту, расчёты были проведены для следующих чисел Россби: -0.628, -0.471 -0.314, -0.157, 0.0, графики эволюции безразмерной кинетической энергии $k^* = \dfrac{k}{k_0}$, $k_0 = k_{t=t_0}$ от безразмерного времени $t^* = (t - t_0) \cdot S$ для которых приведены на рисунке 6.

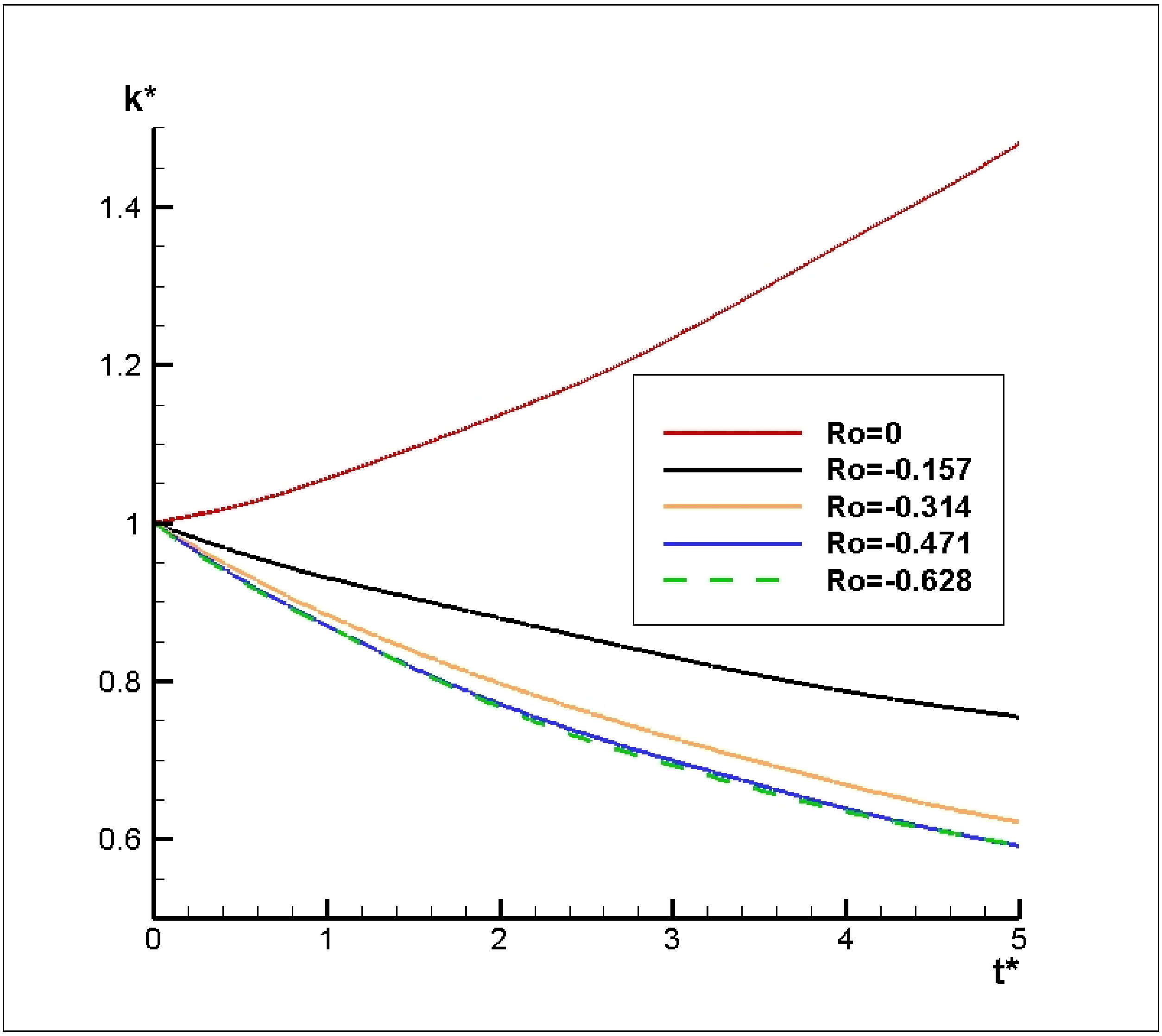

Рис. 6. Эволюция кинетической энергии турбулентности во времени.

4.1.2. Развитие турбулентности в поле однородного сдвига в рамках уравнений Рейнолльдса.

Поскольку рассматриваемое течение однородно по пространству, все характеристики турбулентности, включая k и ω, зависят только от времени. Система уравнений модели SST (14) упрощается и может быть записана в следующей безразмерной форме

$$\begin{cases} \dfrac{\partial k^*}{\partial t^*} = f_{r1} P_k - \beta^* \rho \omega^* k^*, \\ \dfrac{\partial \omega^*}{\partial t^*} = f_{r1} \alpha S^2 - \beta \omega^{*2}, \end{cases} \tag{15}$$

где $t^* = (t - t_0) \cdot S, \omega^* = \dfrac{\omega}{S}, k^* = \dfrac{k}{k_0}$ (16)

- безразмерные величины.

При постоянном значении функции f_{r1} эта система уравнений имеет аналитическое решение:

$$\omega^*(t^*) = c_1 \frac{\exp(c_5 \cdot t^* - c_6) + 1}{\exp(c_5 \cdot t^* - c_6) - 1}, \tag{17}$$

$$k^*(t^*) = c_4 \frac{\exp(a_1 \cdot f_{r1} \cdot t^*)}{sh\left(\dfrac{c_5 \cdot t^*}{2} - \dfrac{c_6}{2}\right)^{2\beta * \frac{c_1}{c_5}}}, \tag{18}$$

где $c_1 = \sqrt{\dfrac{\alpha \cdot f_{r1}}{\beta}}, c_3 = \dfrac{1}{2 \cdot c_1}, c_2 = -c_3 \cdot \ln\left|\dfrac{c_1 + \omega_0^*}{c_1 - \omega_0^*}\right|, c_6 = \dfrac{c_2}{c_3}, c_5 = \dfrac{\beta}{c_3}, c_4 = sh\left(-\dfrac{c_6}{2}\right)^{2\beta * \frac{c_1}{c_5}},$ (19)

$$\omega_0^* = \frac{c_a \cdot f_{r1} - \left.\dfrac{\partial k^*}{\partial t^*}\right|_0}{\beta * \cdot k_0}, \tag{20}$$

а $\alpha, \beta, \beta*, a_1$ - константы модели SST.

Это решение является семейством параметрических кривых, зависящих от f_{r1} (рис. 7). Сравнение зависимостей $k^*(t^*)$, полученных с использованием LES (рис. 6) с выражением (18) позволяет "подобрать" значение f_{r1}, обеспечивающее совпадение решения SST с результатами LES. При этом величина ω_0^* (20) определяется на основе данных LES при $t^* = 0$. Из примера такого сравнения для Ro = - 0.157, приведенного на рисунке 8, видно, что наилучшее совпадение с кривой LES достигается при $f_{r1} = 0.205$.

Предложенная методика позволяет для каждого Ro определить значение функции f_{r1}, при котором результаты *k*-ω модели будут совпадать с LES. Это позволяет провести непосредственное сравнение различных поправок на вращение со значениями, обеспечивающими совпадение с LES. На рисунке 9 приведены значения функции f_{r1}, полученные вышеописанным образом для всех рассмотренных чисел Ro.

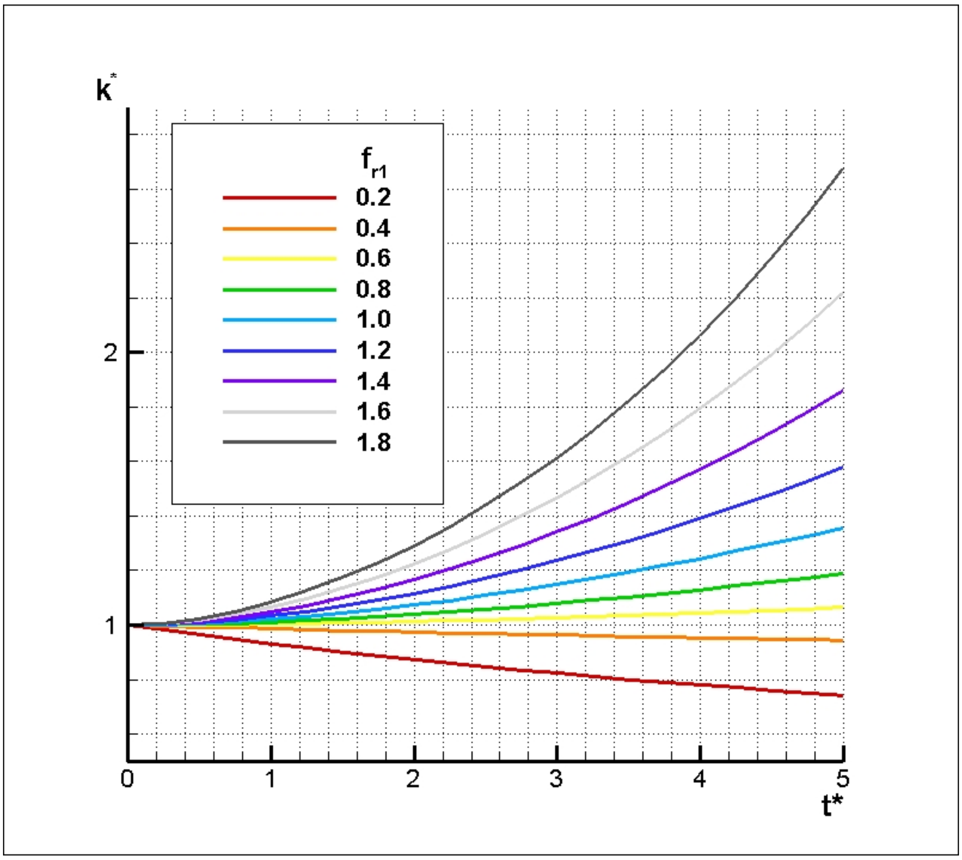

Рис. 7. Семейство кривых, описываемое уравнением (18)

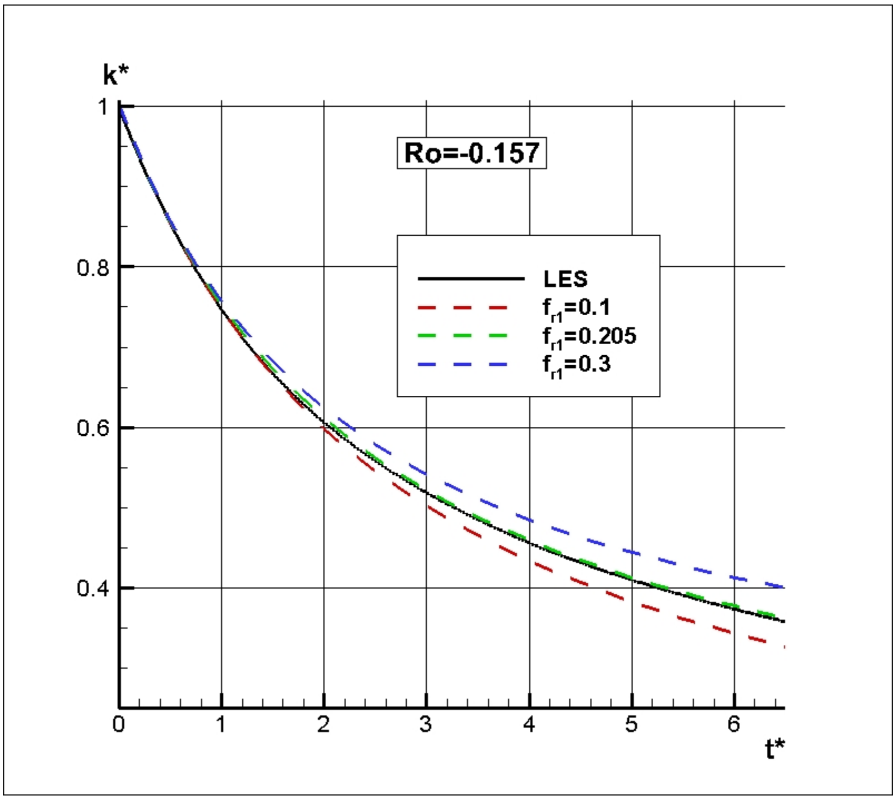

Рис. 8. Сравнение зависимостей безразмерной кинетической энергии от безразмерного времени, полученных с использованием LES и по формуле (18) для разных значений f_{r1}.

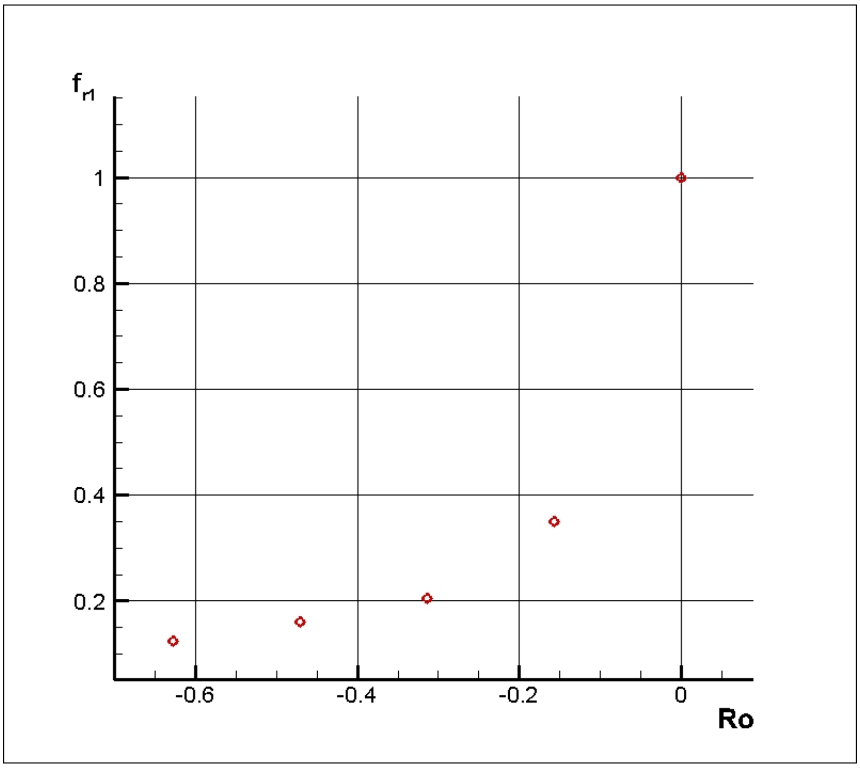

Рис. 9. Зависимость f_{r1}(Ro), полученная на основе LES.

4.1.2 Сравнение различных поправок

В рассматриваемом течении, поправки Ментера - Смирнова (2) и предложенная поправка (10) являются функциями числа Россби. Так, например, поправка Ментера – Смирнова (2) принимает вид

$$f_{r1}^{SST} = \max\{\min\{f_{rotation}, 1.25\}, 0\}$$

$$f_{rotation} = \frac{4}{2|0.5 - Ro| + 1}\left[1 - \arctan\left(\frac{-8Ro|0.5 - Ro|}{0.5 - Ro}\right)\right] - 1$$

Сравнение поправок со значениями, полученными в предыдущем разделе на основе LES, приведено на рисунке 10. Видно, что предложенная поправка является чувствительной к изменению скорости вращения на всём интервале чисел Россби. Кроме того, предложенная функция f_{r1}^{GS} гораздо лучше совпадает со значениями, обеспечивающими совпадение с LES, чем f_{r1}^{SST}, которая выступает в качестве “переключателя” между предельными значениями.

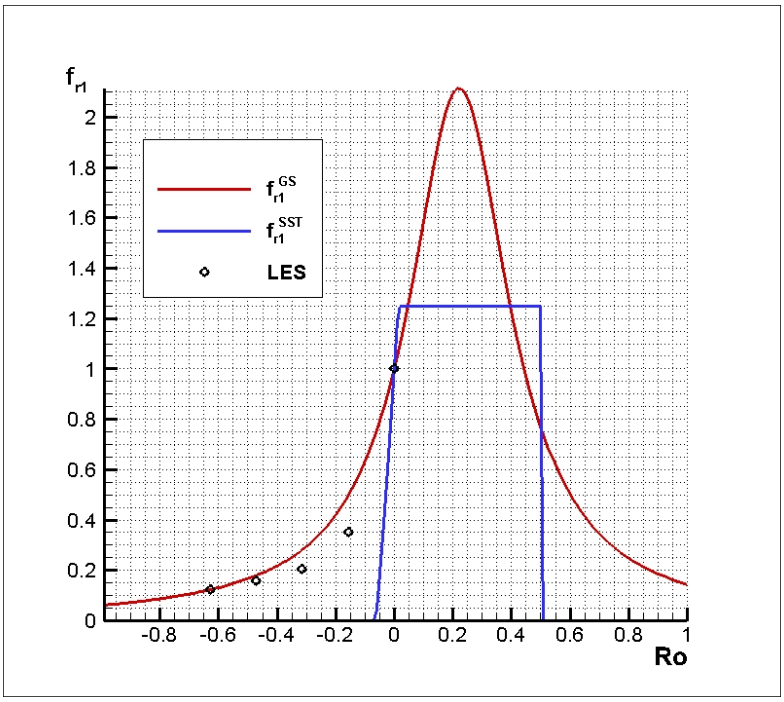

Рис. 10. Сравнение функций различных поправок со значениями, полученными на основе LES.

4.2 Течение в плоском вращающемся канале

Рассматривается установившееся течение несжимаемой жидкости в плоском канале, вращающемся относительно поперечной оси z (рис. 11). Были проведены расчёты для числа Рейнольдса $Re = U_{bulk} \cdot h/\nu = 5.8 \cdot 10^3$ и различных чисел Россби $Ro = \Omega \cdot h/U_{bulk} = 0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$, соответствующим режимам, которые исследовались методом прямого численного моделирования Kristoffersen&Andersson [29].

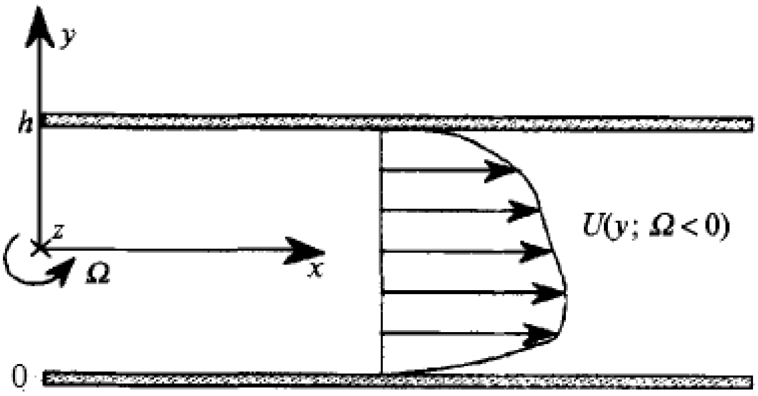

Рис. 11. Постановка задачи об установившемся течении в плоском канале, вращающемся относительно оси z.

На рисунке 12 приведено сравнение результатов расчётов течения с использованием полученной поправки с результатами DNS [29] и результатами, полученными с использованием поправка Ментера - Смирнова. Поправка GS успешно предсказывает влияние вращения на профили скорости и турбулентные напряжения, не уступая при этом поправке Ментера – Смирнова.

На рисунке 13 приведены зависимости турбулентной вязкости и функции поправки от поперечной координаты для максимального исследуемого числа Ro=0.5. Несмотря на качественное сходство профилей турбулентной вязкости видно, что функции поправок существенно отличаются. Функция поправки GS является гладкой везде, за исключением окрестности точки y/h=0.7, в которой величина S=0. Этот дефект характерен для течений, в которых ненулевой является только одна компонента тензора скоростей деформаций, и обычно не проявляется в более сложных течениях. Также следует отметить, что он никак не сказывается на результатах расчета, поскольку генерационный член $P_k = \mu_t S^2$ близок к нулю в этой области. Функция, поправки MS в этой задаче является немонотонной и совершает несколько переключений между предельными значениями в области 0.25<y/h<0.55.

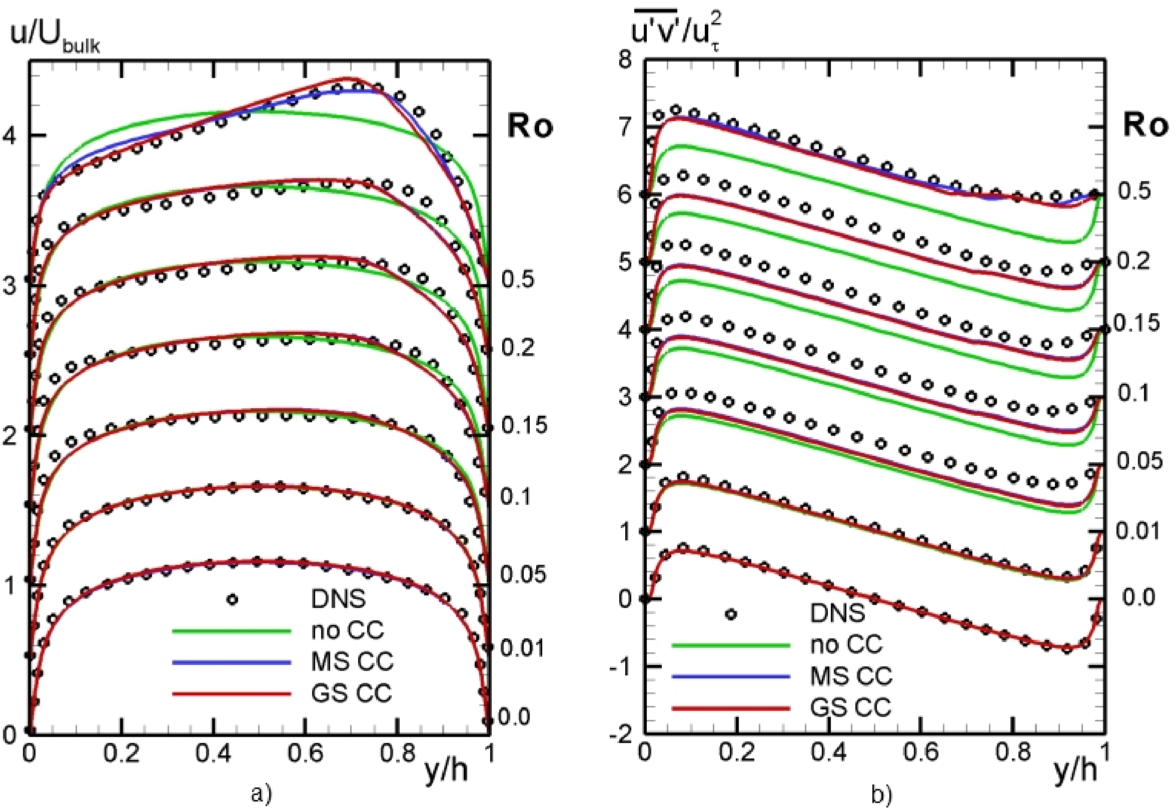

Рис. 12. Установившееся течение во вращающемся канале: сравнение расчетных профилей скорости (a) и турбулентных напряжений (b), полученных по модели SST с использованием предложенной поправки (SG CC), поправки Ментера-Смирнова (MS CC) и без поправки (no CC), с результатами DNS [29].

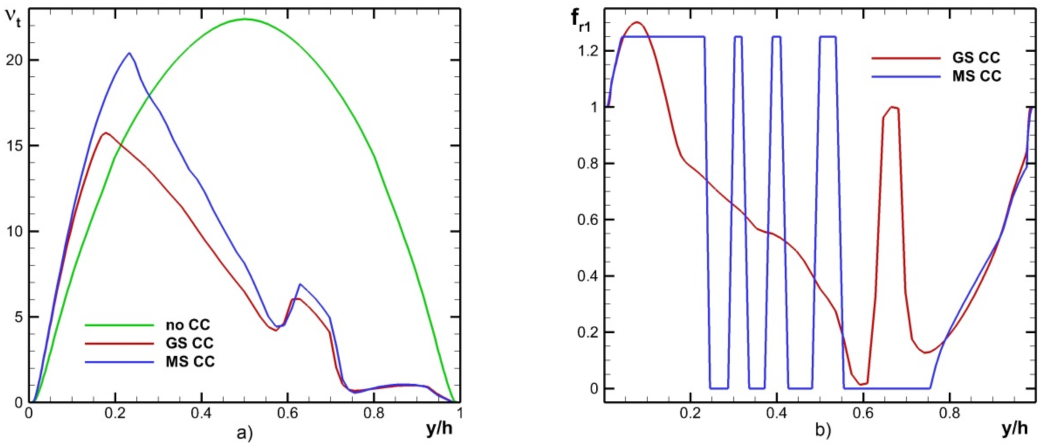

Рис. 13. Установившееся течение во вращающемся канале: сравнение профилей турбулентной вязкости(a) и значений функции поправки (b), полученных по модели SST с использованием предложенной поправки (SG CC), поправки Ментера-Смирнова (MS CC) и без поправки (no CC) при числе Россби Ro = 0.5.

4.3 Течение в плоском канале с поворотом на 180°

Установившееся течение несжимаемой жидкости в плоском канале с поворотом на 180° было рассмотрено при числе Рейнольдса $Re=V_m \cdot H/\nu=10^6$., соответствующим условиями эксперимента [30].

Расчётная область (рис. 14) включала в себя участок канала до поворота, сам поворот и участок канала после поворота. Размер одноблочной расчетной сетки составлял 203x111. Ставились следующие граничные условия: на входе в канал задавался развитый турбулентный профиль скорости, расчитаный при помощи модели SST, на выходе задавался постоянный уровень давления, на стенках – условия прилипания.

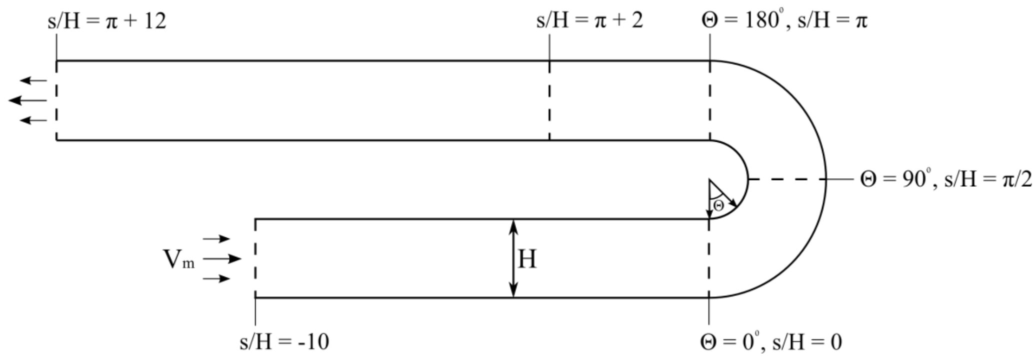

Рис. 14. Постановка задачи о течении в плоском канале с поворотом на 180°.

Сравнение с экспериментом [30] проводилось в четырёх сечениях канала, для которых имеются экспериментальные данные: в начале поворота, при повороте на 90°, в конце поворота, и на расстоянии двух калибров от поворота (рис. 14). Экспериментальные и расчетные профили скорости в данных сечениях приведены на рисунке 15 и 16.

Видно, что все расчеты предсказывают наблюдаемую в эксперименте отрывную зону на внутренней стенке за поворотом, однако интенсивность обратного тока в ней существенно недооценена (рис. 15). Результаты расчетов с использованием обеих поправок очень близки и хорошо согласуются с экспериментом в искривленном участке канала. Видно, что обе поправки приводят к заметному подавлению турбулентной вязкости на внутренней стенке (рис. 16). Существенное отличие расчетных профилей с обеими поправками от экспериментального профиля скорости в последнем сечении обусловлено, вероятнее всего, наличием в эксперименте продольных трёхмерных структур (вихрей Дина), которые приводят к существенно более быстрому восстановлению профиля скорости. Изображенные на рисунке 17 распределения поправок ещё раз иллюстрируют существенно более плавное изменение значения предлагаемой поправки по сравнению с поправкой Ментера – Смирнова.

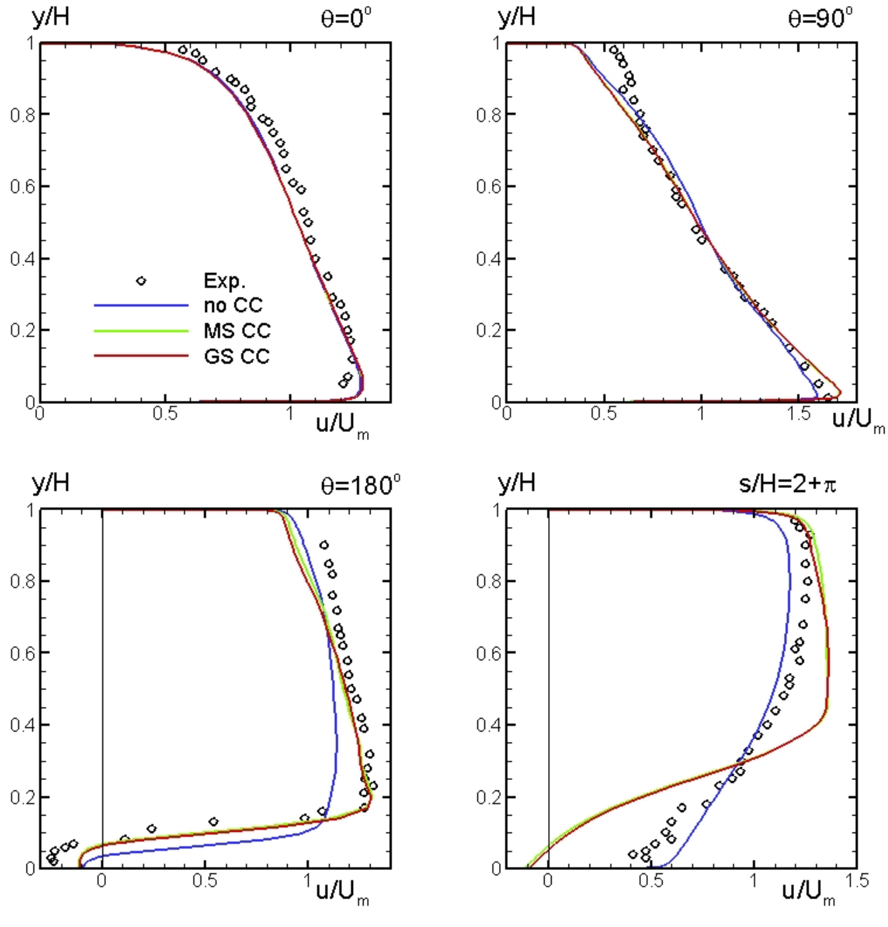

Рис. 15. Эпюры продольной скорости в четырёх сечениях канала. Обозначения: Exp. – результаты эксперимента, no CC – расчёт течения без поправок, MS CC – поправка Ментера Смирнова, GS CC – полученная поправка.

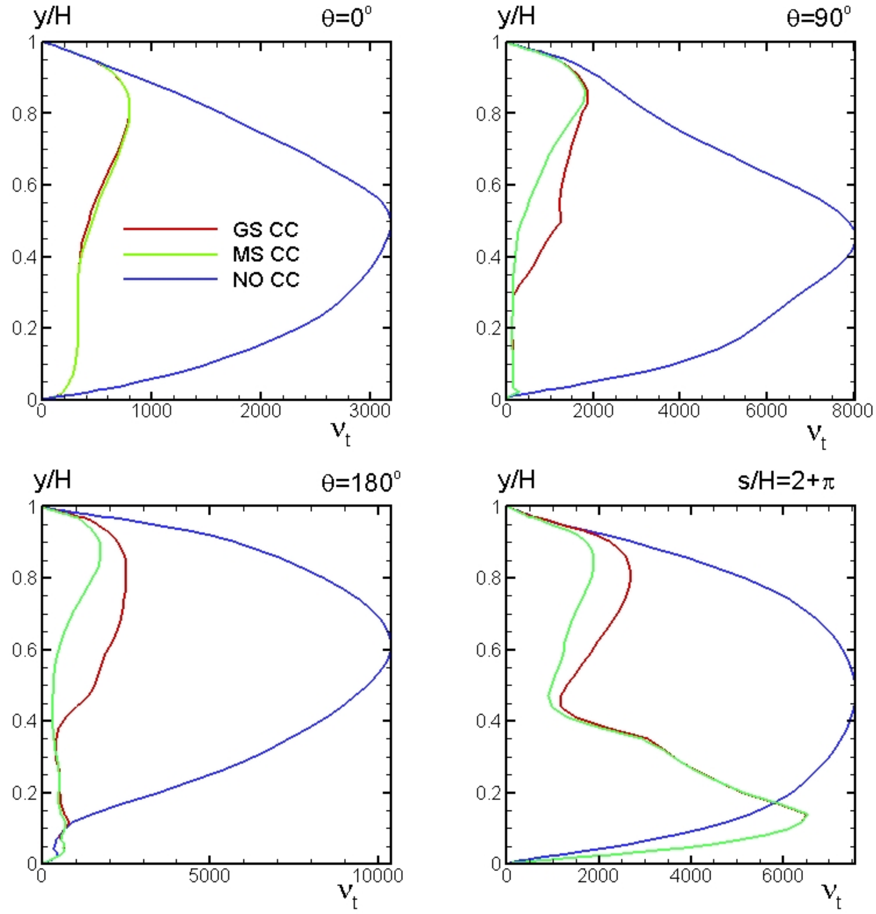

Рис. 16. Эпюры турбулентной вязкости в четырёх сечениях канала. Обозначения аналогичны обозначениям рисунка 15.

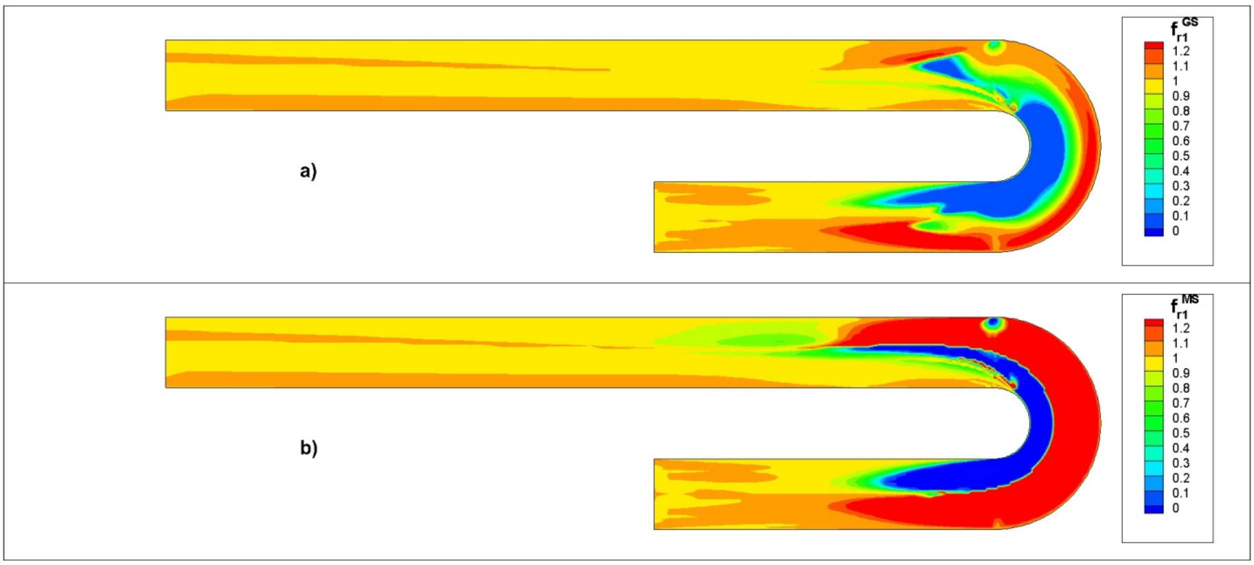

Рис. 17. Распределение функций поправок: предлагаемая поправка (10) (a), поправка Ментера-Смирнова (2) (b).

4.4. Прямоугольный канал с поворотом.

Рассматриваемое установившееся течение несжимаемой жидкости в прямоугольном канале с поворотом на 90˚. соответствует условиям эксперимента [31]. Отношение высоты канала к ширине D/H = 6.0, а внутренний и внешний радиусы поворота равны соответственно 3H и 4H. Число Рейнольдса, построенное по скорости свободного потока и ширине канала равно $Re=2.24\cdot10^5$. На рисунке 18 изображена расчётная область.

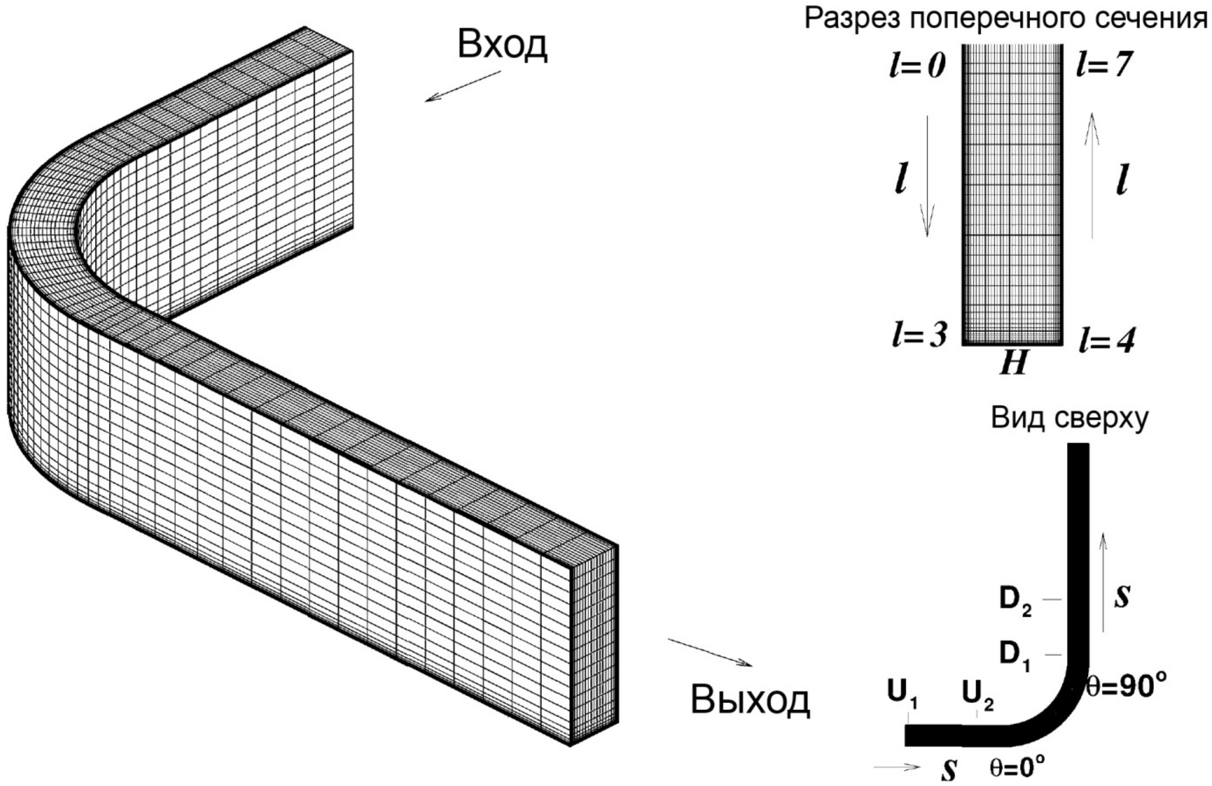

Рис. 18. Течение в прямоугольной трубе с поворотом на 90°. Расчётная область и сетка. Показана каждая вторая сеточная линия.

Расчет проводился в половине канала с использованием условия симметрии, размер расчетной сетки составлял 181x81x62. К сожалению, экспериментальный профиль скорости на входе в канал (сечение U_1) недостаточно подробен для разрешения пограничных слоев на стенках. Поэтому он был дополнен пограничными слоями соответствующей толщины

($\mathrm{Re}_\theta = 1650$), полученными в результате численного расчета. На выходной границе задавался постоянный уровень давления, а на стенках – условие прилипания.

Сравнение распределений коэффициентов давления и трения вдоль центров внутренней и внешней стенок (рис. 19 и 20) свидетельствует о слабом влиянии обеих поправок на результаты расчета. Это связано, по-видимому, с достаточно большим радиусом поворота канала.

Экспериментальные измерения скорости и коэффициента трения [30] были проведены в семи сечениях канала: два сечения, находящиеся на расстоянии 4.5H (сечение U_1) и 0.5H (сечение U_2) вверх по потоку от начала поворота, 3 сечения внутри поворота при углах 15°, 45° и 75°, а так же 2 сечения, находящие на расстоянии 0.5H (сечение D_1) и 4.5H (сечение D_2) вниз по потоку от окончания поворота. Анализировались зависимости коэффициента трения от координаты, идущей вдоль стенки от центра внутренней поверхности канала (l=0) до центра внешней поверхности канал (l=7). Значения l=3 и l=4 соответствуют углам канала (рис. 18).

Результаты, полученные с помощью обеих рассмотренных поправок, практически не различаются (рис 21). В сечениях поворота 45° и 75° сильное завышение коэффициента трения связано, по-видимому, с образованием вторичных вихревых структур в углах, которые невозможно предсказать в рамках моделей турбулентной вязкости.

Таким образом, данное течение следует признать не самым удачным для тестирования поправок на кривизну линий тока.

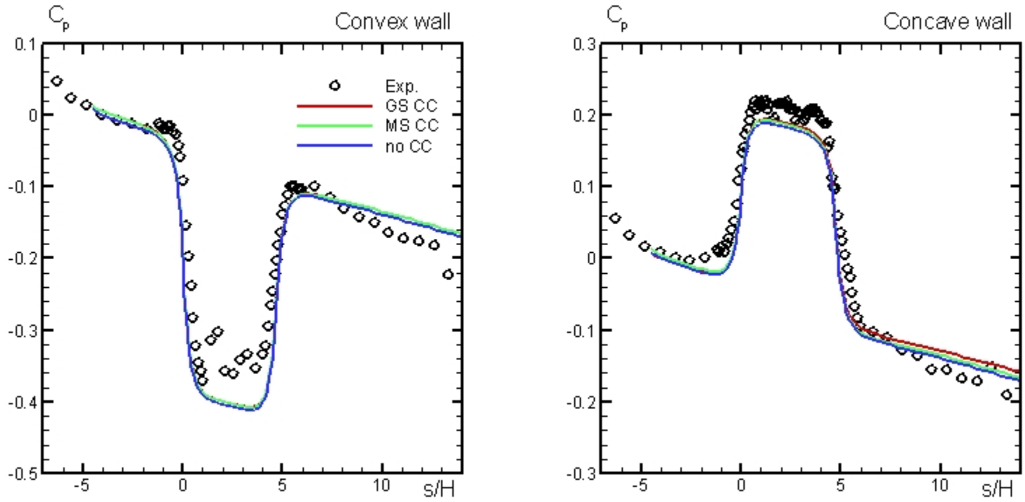

Рис. 19. Распределение коэффициента давление вдоль центров внешней и внутренней стенок. Обозначения аналогичны обозначениям рисунка 15.

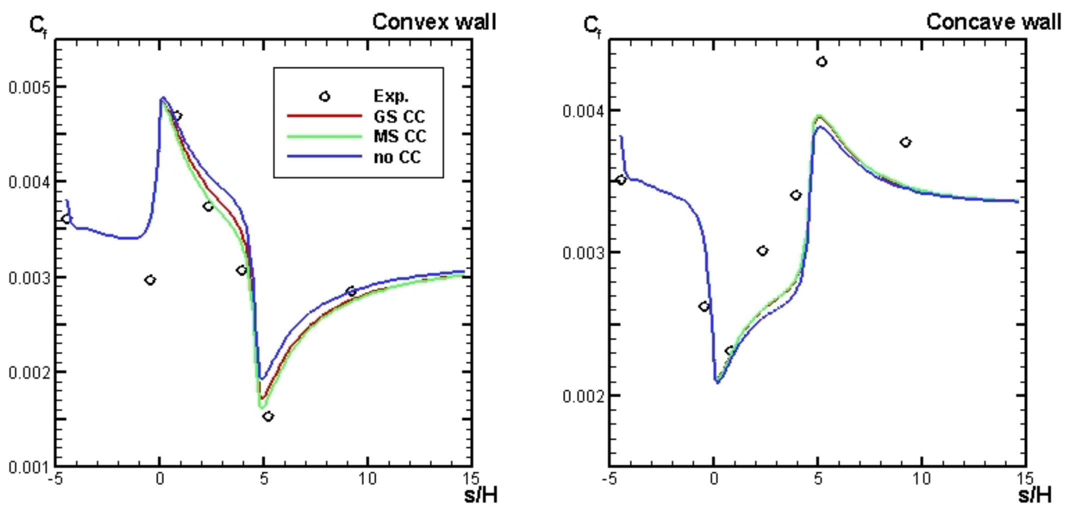

Рис. 20. Распределение коэффициента трения вдоль центров внешней и внутренней стенок. Обозначения аналогичны обозначениям рисунка 15.

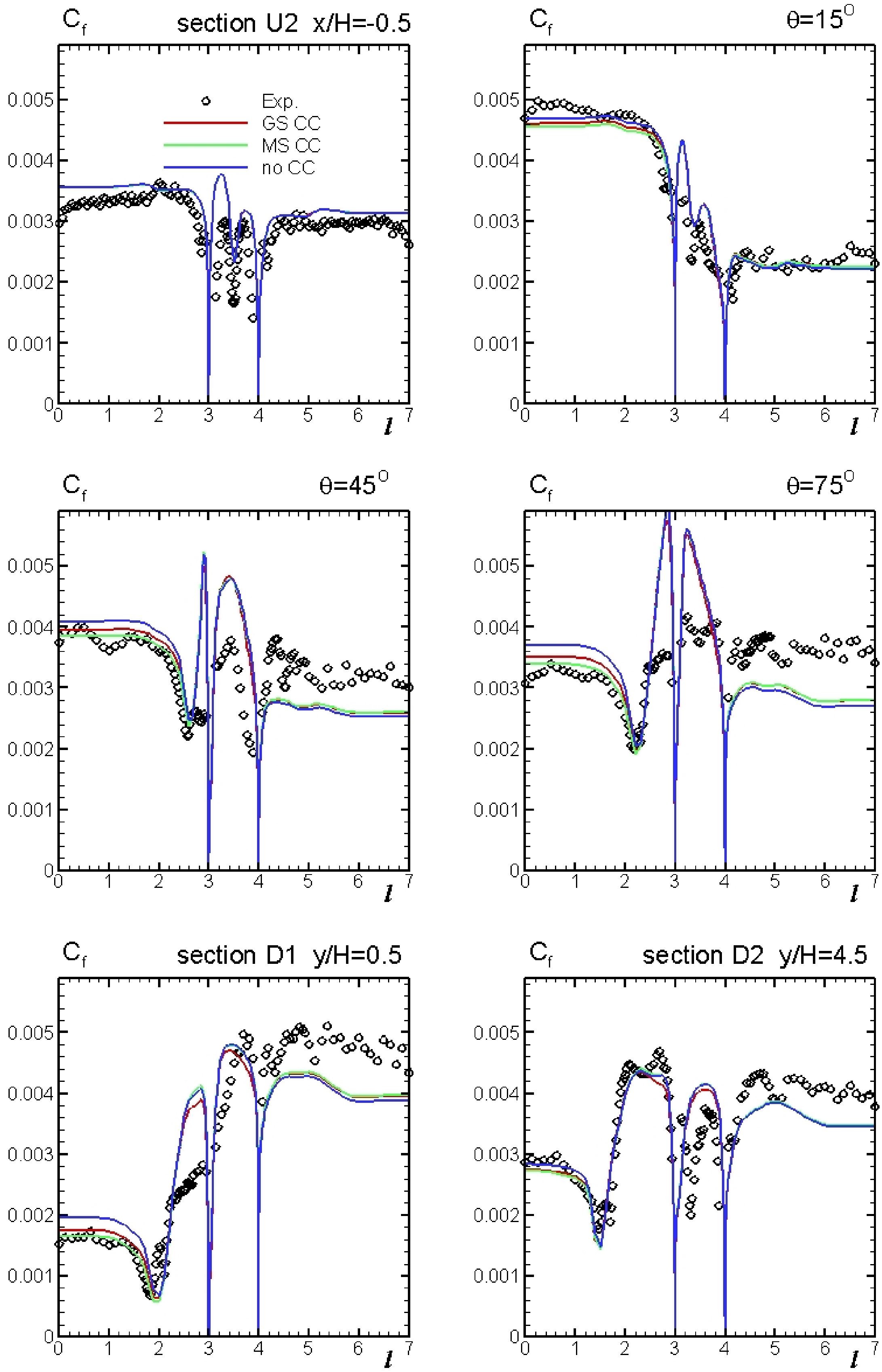

Рис. 21. Распределения коэффициента трения вдоль стен канала в различных сечениях.

Обозначения аналогичны обозначениям рисунка 15.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам работы можно сделать следующие выводы.

На базе явной алгебраической модели турбулентности Gatski-Spesizale и связи между кривизной и вращением Wallin-Johansson была разработана новая поправка на кривизну линий тока и вращение потока для модели Ментера SST. Полученная поправка была реализована в рамках программы «NTS code».

Для задачи о развитии однородной турбулентности предложена новая методика, позволяющая проводить непосредственную оценку поправок на вращение потока путем сравнения с результатами LES. С помощью этой методики показано, что предложенная поправка существенно превосходит используемую в настоящий момент поправку Ментера-Смирнова.

Тестирование предложенной поправки на примере внутренних задач (вращающийся плоский канал, плоский канал с поворотом на 180° и трехмерный канал с поворотом на 90°) показало, что предложенная поправка не уступает поправке Ментера-Смирнова, а в ряде случаев ее превосходит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wilcox, D., C., 2006, Turbulence modeling for CFD.
2.Wallin, S., & Johansson, A. V. (2002). Modelling streamline curvature effects in explicit algebraic Reynolds stress turbulence models. International Journal of Heat and Fluid Flow, 23(5), 721–730.
3. Speziale, C.G., (1988) Turbulence modeling in non-inertial frames of reference
4. Johnston J.P., Halleen R.M., Lezius D.K. 1972. Effects of spanwise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow. J. Fluid Mech. 56, 533-557.
5. Wattendorf, F. L., 1935, "Study of the Effect of Curvature on Fully Developed Turbulent Flow," Proceedings of Royal Society, Series A: Mathematical and Physical Sciences, Vol. 148, p. 565. 1299–1310.
6. Hunt I.A., Joubert P.N. 1978. Effects of small streamline curvature on turbulent duct flow. J. Fluid Mech vol. 91 pp 633-659.
7. Bradshaw, P., 1969 The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow, J. Fluid Ale&. (1969), VOZ. 36, part 1, pp. 177-191.
8. B.E. Launder, C.H. Priddin, and B.I. Sharma (1977) "The calculation of turbulent boundary layers on spinning and curved surfaces", ASME, Journal of Fluids Engineering, 99, 231-239.
9. Rodi, W., Scheuerer, G. (1983) Calculation of curved shear layers with two-equation turbulence models. Phys. Fluids vol. 26 No. 6, 1423-1436
10. Burr, C. R., Menter, F. R. Holger Grotjans and Frühauf, H.H., Development of a Curvature Correction Method for the k-ε Turbulence model.
11. Zhang Qiang, YangYong (2012), A new simpler rotation/curvature correction method for Spalart–Allmaras turbulence model, Chinese Journal of Aeronautics, 2013, 26(2): 326–333
12. Spalart, P. R., & Shur, M. L. (1997). On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature. Aerospace Science and Technology, 1(5), 297–302.
13. Spalart, P. R., & Allmaras, S. R. (1992). A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. AIAA Paper 92-0439.
14. Michael L. Shur, Michael K. Strelets, and Andrey K. Travin (2000), Turbulence Modeling in Rotating and Curved Channels: Assessing the Spalart–Shur Correction, AIAA JOURNAL Vol. 38, No. 5, May 2000
15. Smirnov, P. E., & Menter, F. R. (2009). Sensitization of the SST Turbulence Model to Rotation and Curvature by Applying the Spalart–Shur Correction Term. Journal of Turbomachinery, 131, 041010.
16. Menter, F. R. (1993). Zonal Two Equation k-w Turbulence Models for Aerodynamic Flows. AIAA Paper 93-2906.
17. Wallin S., Johansson A.V. (2000). An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. J. Fluid Mech., v. 403, No.1, pp.89-132.
18. Rodi W. 1976 A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. Z. angew. Math. Mech. 56, T219-T221.
19. Speziale, C. G., Sarkar, S., & Gatski, T. B. (1991). Modelling the pressure–strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. Journal of Fluid Mechanics, 227, 245–272.
20. Gatski, T. B., & Speziale, C. G. (1993). On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. Journal of Fluid Mechanics, 254, 59–78.
21. Pettersson Reif B.A., B.A, Durbin P.A., Ooi A. (1999). Modeling rotational effects in eddy-viscosity closures. International Journal of Heat and Fluid Flow 20 (1999) 563-573
22. Durbin, P.A., 1991. Near-wall turbulence closure modeling without damping function'. Theoret. Comput. Fluid Dyn. 3, 1-13.

23. Iaccarino G., Ooi A., Pettersson Reif B. A., Durbin P., (1999) RANS simulations of rotating flows, Center for Turbulence Research Annual Research Briefs 1999. 257-266

24. Duraisamyy K., Iaccarino G., (2005). Curvature correction and application of the $\overline{v}^2 - f$ turbulence model to tip vortex flows. Center for Turbulence Research Annual Research Briefs 2005. 157-168.

25. Смирнов П. Е. 2006. Тестирование $\overline{v}^2 - f$ модели турбулентности при расчёте течения и теплообмена в канале с внезапным расширением. Инженерно – Физический журнал. Том 79, №4. с. 38-44.

26. Strelets, M. K. (2001). Detached Eddy Simulation of Massively Separated Flows. AIAA Paper, 2001-0879.

27. Bardina, J., Ferziger, J.H. & Reynolds, W.C. 1983Im proved turbulence models based on large-eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows. Stanford University Tech. Rep. TF-19.

28. Comte-Bellot G, Corrsin S. (1971). Simple Eulerian time of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated, “isotropic” turbulence. Journal of Fluid Mechanics, v.48, pp.273-337.

29. Kristoffersen, R., and Andersson, H. I., 1993, “Direct Simulation of Low-Reynolds-Number Turbulent Flow in a Rotating Channel,” Journal of Fluid Mechanics, Vol. 256, pp. 163–197.

30. Monson, D. J., Seegmiller, H. L., Mc Connaughey, P. K.,and Chen,Y. S., 1990, “Comparison of Experiment with Calculations Using Curvature-Corrected Zero and Two Equation Turbulence Models for a Two-Dimensional UDuct,” AIAA Paper 90-1484.

31. Kim W. J., Patel V. C. An experimental study of boundary-layer flow in a curved rectangular duct. Presented at the Symposium on Data for Validation Of CFD Codes, Asme Fluids Engineering Division Meeting, 20-24 JUNE, 1993, Washington D.C. (FED-Vol. 146, pp.13-28)