

Федеральное агентство Российской Федерации по образованию
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Физико-механический факультет
Кафедра гидроаэродинамики

**Конспект лекций
дисциплины
«Течения вязкой жидкости
и модели турбулентности:
методы расчета турбулентных течений»**

Направление подготовки магистров:
010600, "Прикладные математика и физика"

Зав. кафедрой гидроаэродинамики
д.ф.-м.н., профессор _____ Е.М. Смирнов

Научный руководитель программы
д.ф.-м.н., профессор _____ Е.М. Смирнов

Преподаватель
к.ф.-м.н., доцент _____ А.В. Гарбарук

Санкт-Петербург
2010

Оглавление

ОГЛАВЛЕНИЕ	2
ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ	3
Понятие турбулентности.	3
Краткий обзор методов расчета турбулентных течений.	11
Простые "канонические" течения	17
Свободные течения	18
Турбулентный пограничный слой	28
УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА И МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ 34	
Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса.	34
Замыкание уравнений: модели турбулентности.	36
Алгебраические модели турбулентности	38
Гипотеза пути смешения.	38
Пристенные версии алгебраических моделей турбулентности.....	40
Развитие алгебраических моделей турбулентности.	45
Дифференциальные модели турбулентности с одним уравнением	48
Модель Спаларта-Аллмареса.....	50
Модификации модели Спаларта-Аллмареса.....	57
Модель Секундова $\nu_T - 92$	61
Уравнение для кинетической энергии турбулентности.....	68
Модели с двумя дифференциальными уравнениями	71
Модели типа k- ϵ	71
Пристенные функции.....	75
Модели типа k- ω	80
Модели Рейнольдсовых напряжений	83
Дифференциальные модели Рейнольдсовых напряжений.....	85
Алгебраические модели Рейнольдсовых напряжений.	90
ВИХРЕРАЗРЕШАЮЩИЕ МЕТОДЫ.	96
Метод моделирования крупных вихрей	102
Метод моделирования отсоединенных вихрей.....	117
Гибридные методы.....	122
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	127

Турбулентные течения

Понятие турбулентности.

Практическая необходимость расчета турбулентных течений.

Наш мир устроен таким образом, что большинство течений, интересных с практической точки зрения, являются турбулентными.

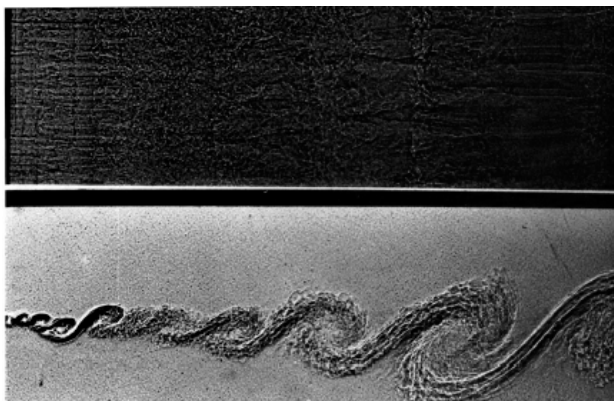
Рассмотрим, например, воздух. Вязкость $\nu=1.5 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Переход от ламинарного режима течения к турбулентному осуществляется, в зависимости от типа течения, при числе Рейнольдса $Re=LU/\nu \sim 10^2 \div 10^5$. Это означает, что переход происходит при произведении линейного масштаба на скоростной $LU \sim 10^{-3} \div 10^0$ м²/с, что весьма немного. Легко убедиться, что в таких задачах как обтекание самолета или автомобиля, течение атмосферы, обтекание лопаток турбин и даже охлаждение процессора компьютера течение является турбулентным.

Такое существенное соприкосновение нашей жизни с турбулентными течениями само по себе является достаточным поводом для тщательного изучения турбулентности. Попробуем на качественном уровне («на пальцах») разобраться в том, что такое турбулентность.

Существует множество определений более или менее удачно и полно отражающих природу турбулентности, однако очевидно, что ни одно из них не сможет в полной мере передать сущность такого сложного и многоликого явления. Остановимся пока на простейшем из определений: «турбулентность – хаотические пульсации физических величин в пространстве и во времени».

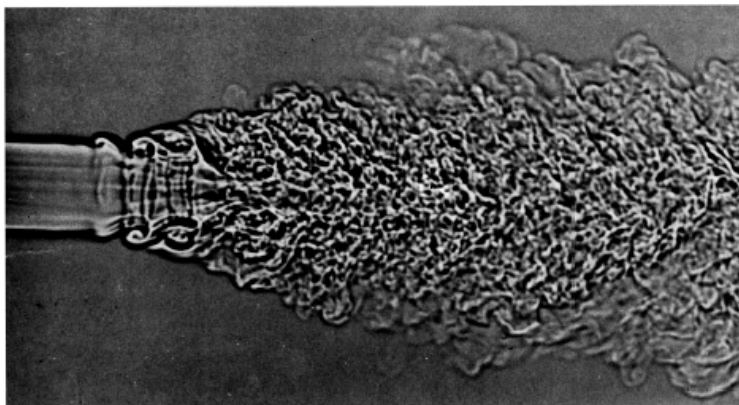
Про природу возникновения турбулентности.

С физической точки зрения, причиной возникновения турбулентности является неустойчивость того или иного рода, возникающая в рассматриваемом течении (например, след за цилиндром или тепловая неустойчивость). Следует отметить, что во многих случаях появлению турбулентности предшествует появление упорядоченных нестационарных структур (например: слой смешения, струя (рис. 1, 2)).



176. Крупномасштабная структура в турбулентном слое смешения. Азот, находящийся сверху и текущий со скоростью 1000 см/с, перемешивается под давлением 4 атм со смесью аргон-гелий, находящейся снизу, имеющей ту же плотность и текущей со скоростью 380 см/с. Сделанная искровым методом теневая фотография показывает одновременно течение в плане и сбоку, демонстрируя пространственную структуру больших вихрей. Полоски, вытянутые вдоль потока, на фотографии течения в плане (здесь показана лишь половина снимка в ширину) соответствуют системе вторичных вихревых пар, ориентированных в направлении по потоку. Расстояние между ними в части слоя, расположенной вниз по потоку, больше, чем ближе начала. Фото J. H. Kolarik, Ph. D. Thesis, Калифорнийский технологический институт, 1976

Рис. 1. Крупномасштабные структуры в слое смешения



117. Неустойчивость круглой струи. Эта теневая фотография демонстрирует струю углекислого газа диаметром 1/4 дюйма, вытекающую в воздух при скорости 127 фут/с. Когда струя вытекает из сопла при числе Рейнольдса, равном примерно 30 000, она ламинарна. На расстоянии одного диаметра вниз по потоку струя обнаруживает неустойчивость, после чего происходит образование вихревых колец и переход к турбулентности. Фото Fred Landis, Ascher H. Shapiro

118. Неустойчивость круглой струи. Дым дает несколько иную картину того же течения, что и на предыдущем снимке, при числе Рейнольдса, равном примерно 13 000. Волновая неустойчивость вихревых колец и их последующее разрушение аналогичны показанному на фото 114. Фото R. Wille, A. Michalke, любезно предоставлено H. Fiedler

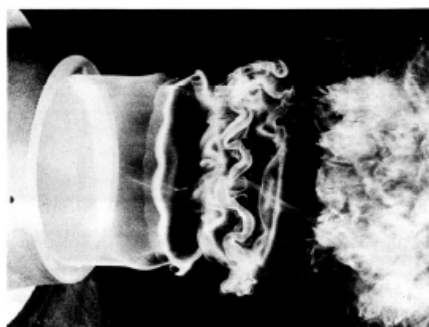


Рис. 2. Крупномасштабные структуры в круглой струе.

С математической точки зрения появление турбулентности (как решения уравнений Навье-Стокса), как правило, обусловлено доминированием дестабилизирующих конвективных членов над стабилизирующими вязкими членами в уравнении баланса импульса. В результате этого, уравнения Навье-Стокса, описывающие течения жидкости и

газа, теряют устойчивость. При этом происходит лавинообразное накопление возмущений определенного вида.

С третьей стороны, процесс потери устойчивости можно рассматривать как проявление второго начала термодинамики: природа не терпит слишком «упорядоченных» течений.

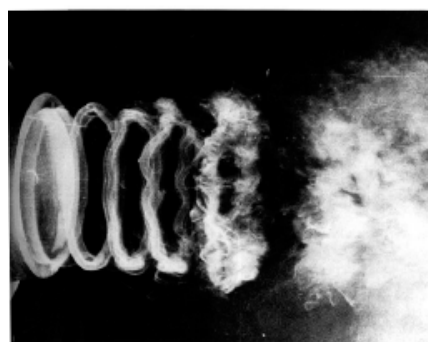
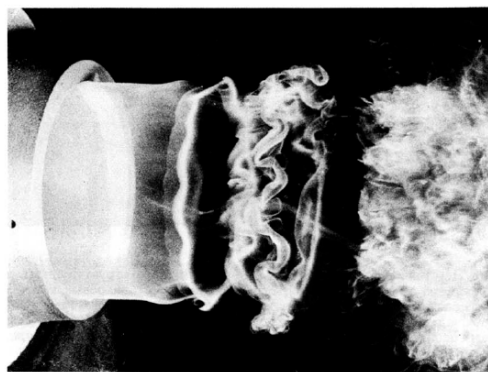
Потеря устойчивости ламинарным потоком – явление довольно тонкое, зависящее от большого количества внешних факторов, таких как уровень турбулентности внешнего потока, градиентов температур или давления, вдува-отсоса и т. п. (примеры: пограничный слой при наличии градиента давления, струя с внешним возмущением (рис. 3, 4)). Следует отметить, что при потере устойчивости колебания только начинают развиваться, полностью турбулентным течение становится гораздо позже (ниже по потоку), когда амплитуды пульсаций достигнут определенного уровня. Нелинейность газодинамических систем (с физической точки зрения) и описывающих их уравнений Навье-Стокса (с математической точки зрения) приводит к тому, что амплитуда возмущений оказывается ограниченной. Когда амплитуда возмущений достигает насыщения, часто говорят, что течение стало «развитым турбулентным».



164. Эффекты сильных градиентов давления. При сильном благоприятном градиенте давления (верхний снимок) турбулентный пограничный слой растягивается и в конечном итоге реламинаризуется; при сильном обратном градиенте (нижний снимок) слой утолщается и отрывается. Фото Р. Е. Falco. [Head, 1982]

Рис. 3. Влияние градиента давления на турбулентность в пограничном слое.

118. Неустойчивость круглой струи. Дым дает несколько иную картину того же течения, что и на предыдущем снимке, при числе Рейнольдса, равном примерно 13 000. Волновая неустойчивость вихревых колец и их последующее разрушение аналогичны показанному на фото 114. Фото R. Wille, A. Michalke, любезно предоставлено H. Fiedler



120. Вынужденная неустойчивость круглой струи. Здесь слабые периодические звуковые волны создаются громкоговорителем, расположенным вблизи струи и работающим на ее собственной частоте. В результате длина ламинарного пограничного слоя на периферии струи уменьшается и начинается образование вихревых колец, более регулярное, чем при невынужденном возникновении неустойчивостей, как на фото 117 и 118. Фото R. Wille, A. Michalke, любезно предоставлено H. Fiedler

Рис. 4. Влияние внешнего воздействия на неустойчивость круглой струи.

С практической точки зрения в большинстве случаев основной интерес представляют не актуальные величины, а осредненные характеристики, например, подъемная сила крыла, коэффициент потерь в турбине, сопротивление автомобиля. Однако бывают задачи, в которых существенный интерес представляют именно пульсации, например, задачи аэроакустика и аэроупругости.

Именно поэтому большое развитие получила статистическая теория турбулентности, которая основана на аппарате математической статистики (теории вероятностей). Другой общепринятый подход в значительной мере базируется на использовании экспериментальных данных и называется полуэмпирической теорией турбулентности. Кроме того, существует значительное количество менее значимых с практической точки зрения подходов (например, основанных на теории хаоса).

Характеристики турбулентности

Несмотря на простое определение, сводящееся к понятию «случайных пульсаций», турбулентность имеет чрезвычайно сложную природу. Причина турбулентных пульсаций связана с неустойчивостью потока в целом, и их масштаб определяется балансом воздействий различной природы. На первый взгляд абсолютно «случайный процесс», тем не менее, подчиняется неким закономерностям, которые можно извлечь при помощи разных подходов (в первую очередь математических).

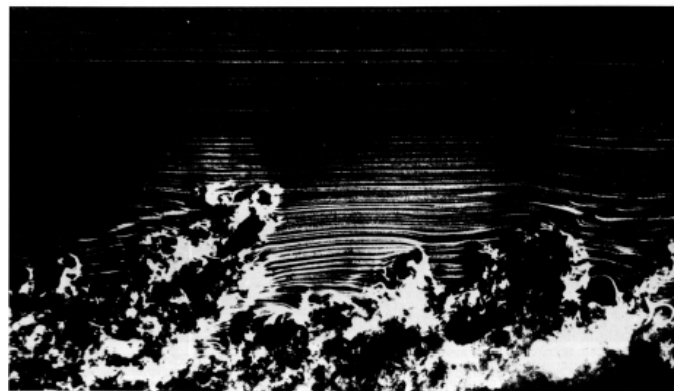
Введем основные понятия, которые используются для описания свойств турбулентности.

Часто используется понятие «турбулентного вихря», а турбулентность определяют как совокупность разномасштабных вихрей. Можно показать, что в несжимаемой жидкости вихрь с любым распределением угловой скорости удовлетворяет уравнению неразрывности. Это означает, что турбулентное движение несжимаемой жидкости может быть представлено в виде суперпозиции различных вихрей. Популярность использования этого термина (кроме причин исторического характера, связанных с гипотезой пути смещения Прандля) обусловлена тем, что при визуализации турбулентных течений эти «вихри» видны и хорошо различимы.

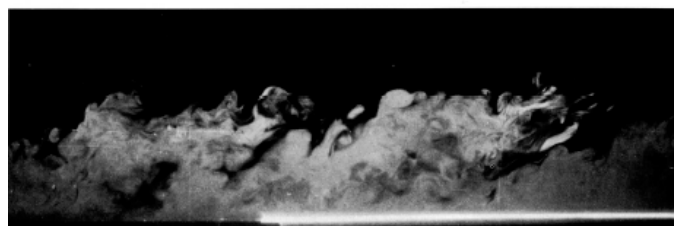
Максимальный размер вихрей близок к характерному линейному масштабу задачи L . Примеры: пограничный слой, профиль под углом атаки (рис. 5, 6). Часто движение наиболее крупных вихрей оказывается в значительной степени упорядоченным (например, течение за цилиндром). Такие структуры часто называют когерентными.

Вихри минимального размера диссипируют непосредственно в тепло. Их размер характеризуется так называемым колмогоровским масштабом $\eta_k = (v^3/\varepsilon)^{1/4}$, где ε – местная скорость диссипации на единицу массы, а ν – кинематическая вязкость. Наибольшее количество энергии при этом переносят вихри некоторого «среднего» размера.

Часто пользуются понятиями «характерный размер» и «характерное время жизни» турбулентного вихря. Если при этом не конкретизируется, какие именно вихри имеются в виду, чаще всего эти понятия относятся именно к «средним» наиболее «энергонесущим» вихрям.

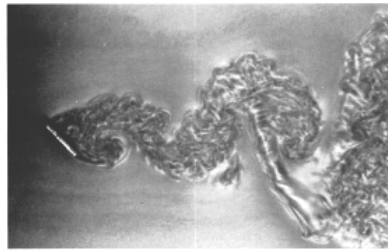


157. Турбулентный пограничный слой, вид сбоку. Здесь турбулентный пограничный слой развивается естественным образом на плоской пластинке длиной 3,3 м, подвешенной в аэродинамической трубе. Линии меченых частиц, вдушие от дымовой проволочки, поставленной вблизи острой передней кромки, освещаются вертикальным световым ножом. Число Рейнольдса, рассчитанное по толщине потери импульса, равно 3500. Хорошо видна перемежающаяся структура слоя в его внешней части. Фото Thomas Corke, Y. Guezennec, Hassan Nagib

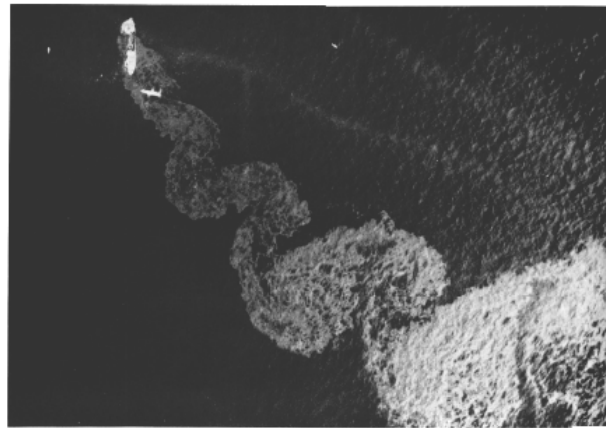


158. Турбулентный пограничный слой на стенке. Туман из мелких капелек масла введен внутрь ламинарного пограничного слоя через пол рабочей части аэродинамической трубы, после чего слой искусственно турбулизуется. Вертикальный световой нож демонстрирует структуру течения на расстоянии 5,8 м вниз по потоку, где число Рейнольдса, рассчитанное по толщине потери импульса, равно примерно 4000. [Falco, 1977]

Рис. 5. Характерный масштаб турбулентных структур в пограничном слое



172. След за наклонной плоской пластиной. След за пластиной, обтекаемой под углом атаки 45°, турбулентен при числе Рейнольдса 2400. Алюминиевые хлопья, взвешенные в воде, выявляют характерную извилистую форму этого следа. [Saltwell, 1981] Воспроизведено с разрешения из Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 13, © 1981 by Annual Reviews Inc.



173. След за танкером, свинцом на мель. Танкер «Argo Merchant» в 1976 г. сел на мель вблизи Пангакета. Вытекающая из него сырая нефть позволяет видеть, что судно оказалось наклоненным к морскому течению под углом 45°. Хотя число Рейнольдса равно примерно 10^7 , однако структура следа удивительно похожа на то, что показано на предыдущем снимке. Фото NASA, любезно предоставлено О. М. Griffin, Naval Research Laboratory

Рис. 6. Характерный масштаб турбулентных структур в следе за плохо обтекаемым телом.

Не менее важными являются спектральные характеристики турбулентности, т. е. изучается частотный спектр случайных турбулентных пульсаций. Общепринятыми являются энергетические спектры, т. е. разложение кинетической энергии турбулентности в спектр. В случае вырождения однородной изотропной турбулентности этот спектр оказывается приблизительно следующим (рис. 7).

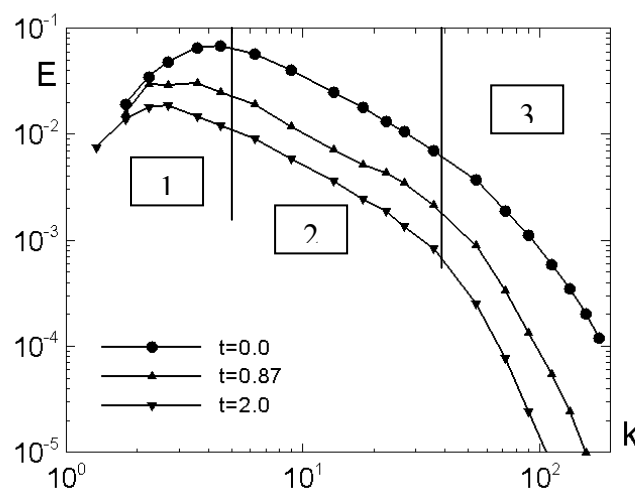


Рис. 7. Спектр в различные моменты времени при вырождении однородной изотропной турбулентности

Существует связь между размером вихрей и частотой колебаний во времени. Наиболее крупные вихри, проходя через точку пространства, соответствуют колебаниям с длинным периодом, т. е. с низкой частотой (волновым числом). Мелкие вихри, напротив, соответствуют высокочастотным колебаниям.

В других течениях этот спектр может быть другим, однако в развитой турбулентности на спектре можно выделить три участка с различным поведением. Если число Рейнольдса достаточно высоко, то между крупными вихрями, взаимодействующими с осредненным потоком (1), и мелкими вихрями, диссипирующими в тепло, (3) существует область размеров вихрей, которые взаимодействуют только друг с другом (2). Область частот, соответствующая этим вихрям называется инерционным интервалом, для нее характерны определенные закономерности (закон $-5/3$).

Кроме того, существует так называемый каскадный перенос энергии, т.е. передача энергии от более крупных вихрей более мелким. Наиболее крупные вихри получают энергию от осредненного течения, передают энергию все более мелким, а наиболее мелкие диссипируют в тепло. Скорость этого процесса в силу хаотичности природы турбулентности также колеблется вокруг некой величины, при этом ее мгновенное значение может становиться отрицательным. Иными словами, в некоторые моменты времени энергия может передаваться от более мелких вихрей более крупным, но эта флуктуация компенсируется более интенсивной передачей энергии по каскаду в другие моменты времени.

В равновесии, когда приток энергии от осредненного движения к турбулентности равен передаче энергии от турбулентности в тепло, амплитуда турбулентных пульсаций устанавливается на некотором уровне. Случайное увеличение амплитуды пульсаций приводит, с одной стороны, к уменьшению притока энергии от осредненного течения, с другой стороны к увеличению диссипации энергии в тепло. Все это вместе уменьшает пульсации. Обратное рассуждение также верно. Таким образом, турбулентность в состоянии равновесия статистически устойчива.

Также очевидно, что турбулентность (хаотические колебания газодинамических параметров) не может мгновенно появиться или исчезнуть, для этого требуется некое время. Иногда это свойство турбулентности называют эффектами памяти.

С точки зрения статистической теории турбулентности (турбулентность – случайное колебание физической величины) наибольший интерес представляют так называемые статистические моменты (первого, второго и более высоких порядков, одно- и многоточечные). Так, например, средняя скорость – это момент первого порядка, так называемые турбулентные напряжения типа $\overline{u'v'}$ - моменты второго порядка.

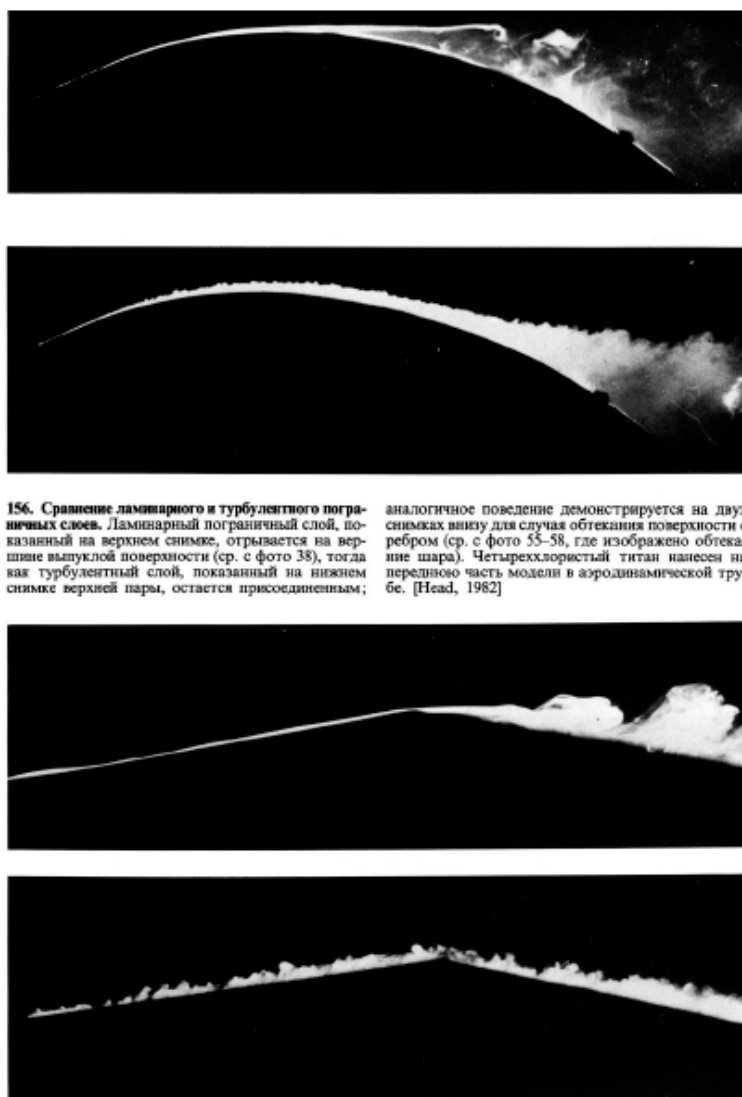
Следует отметить, что применение статистической теории турбулентности к когерентным структурам не до конца оправдано, поскольку статистические (вероятностные) методы не очень подходят для описания упорядоченных структур.

Влияние турбулентности на осредненное течение

Свойства турбулентных течений существенно отличаются от свойств ламинарных течений. Например, подъемная сила одного и того же крыла при ламинарном и турбулентном обтекании может отличаться в разы. Пример: отрыв пограничного слоя (рис. 8). Поэтому мы вынуждены тем или иным способом учитывать влияние

турбулентности, т.е. моделировать ее. Более того, часто результаты расчетов течений существенно зависят от качества моделирования турбулентности,

Механизм этого влияния связан с наличием турбулентного переноса всех газодинамических характеристик (импульса, энергии, температуры, концентрации и т. п.). Если в ламинарном течении диффузионный перенос осуществляется при помощи броуновского движения, то в турбулентном «вихри» «перемешивают» среду, что существенно (в разы, а часто и на порядки) увеличивает скорость диффузионного переноса. Следует отметить, что с точки зрения актуального движения этот перенос имеет конвективную природу, однако с точки зрения осредненного движения он рассматривается как диффузионный.



156. Сравнение ламинарного и турбулентного пограничных слоев. Ламинарный пограничный слой, показанный на верхнем снимке, отрывается на вершине выпуклой поверхности (ср. с фото 38), тогда как турбулентный слой, показанный на нижнем снимке верхней пары, остается присоединенным; аналогичное поведение демонстрируется на двух снимках внизу для случая обтекания поверхности с ребром (ср. с фото 55–58, где изображено обтекание шара). Четыреххлористый титан нанесен на переднюю часть модели в аэродинамической трубе. [Head, 1982]

Рис. 8. Влияние турбулентности на отрыв пограничного слоя.

Заметим, что с практической точки зрения в каждой задаче существует наиболее важные характеристики. Точность моделирования турбулентности может существенно влиять на точность расчета этих характеристик, а может не влиять. В этой связи надо выбирать наиболее простую стратегию расчета (выбор постановки задачи, модели и т. п.), обеспечивающую необходимую точность расчета важных для практики характеристик.

Если говорить о внешней аэродинамике, то можно выделить ряд задач, при решении которых качество моделирования турбулентности играет решающую роль. К таким задачам, в частности, относятся.

- отрыв, спровоцированный скачком при трансзвуковом обтекании крыльев и хвостового оперения, а также при сверхзвуковом обтекании вогнутых поверхностей и стабилизаторов
- обтекание крыловых профилей при углах близких к углу, соответствующему максимуму подъемной силы, особенно для многоэлементных профилей
- соединение крыла с фюзеляжем, при котором наблюдаются подковообразные вихри, а также может происходить сильный отрыв в углу
- вихревой отрыв от хорошо обтекаемого тела при заметном угле атаки (фюзеляж при быстром снижении)
- вертикальный взлет с направленными струями
- управление потоком при помощи вихрегенераторов (струйных или крыловых)
- подъемная сила колеблющегося крыла
- перерасширенные сверхзвуковые струи

Таким образом, практическая необходимость диктует потребность в разработке эффективных, быстрых и недорогих (с вычислительной точки зрения) методов расчета турбулентных течений. Это приводит к тому, что в настоящее время моделирование турбулентности является одной из наиболее интенсивно развивающихся областей механики жидкости и газа (наряду с многофазными течениями).

Краткий обзор методов расчета турбулентных течений.

Несмотря на интенсивное развитие вычислительной техники и впечатляющие успехи, достигнутые в последние годы как в области построения эффективных численных алгоритмов, предназначенных для решения задач гидромеханики и тепломассопереноса, так и в разработке сопутствующего математического обеспечения (генераторы сеток, интерактивные системы ввода данных и системы визуализации результатов расчетов), проблема численного моделирования турбулентности, как и на протяжении многих предшествующих десятилетий, по-прежнему остается одной из наиболее сложных и актуальных проблем механики жидкостей. В отличие от ламинарных течений однофазной среды (жидкости или газа), расчет которых, благодаря отмеченным выше достижениям, стал во многом рутинной процедурой, надежное предсказание характеристик сложных турбулентных течений, представляющих наибольший практический интерес по целому ряду причин (принципиально трехмерный нестационарный характер, стохастическая природа и исключительно широкий пространственно-временной спектр турбулентности) все еще остается скорее искусством, чем строгой наукой. Вместе с тем, общий прогресс вычислительной гидродинамики и тепломассопереноса не мог не сказаться и на состоянии проблемы численного моделирования турбулентности. Рассмотрим различные подходы, применяемые для расчета турбулентных течений.

Прямое численное моделирование (DNS).

Суть этого подхода состоит в непосредственном решении трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса с использованием пространственных сеток и шагов интегрирования по времени, достаточных для разрешения всех существенных для рассматриваемого течения, в том числе, и коротковолновых пространственно-временных неоднородностей. Очевидно, что этот подход является максимально строгим, так как он базируется лишь на одном, достаточно обоснованном предположении о применимости уравнений Навье-Стокса для описания турбулентных течений. Однако, не менее очевидно и то, что для его численной реализации необходимо использовать очень мелкие сетки, количество узлов которых должно резко увеличиваться с ростом числа Рейнольдса.

Действительно, в рамках этого подхода необходимо разрешить наиболее мелкие вихри, имеющие характерный размер $\eta_k = \left(\nu^3/\varepsilon\right)^{1/4}$. Зависимость количества узлов сетки в одном направлении от числа Рейнольдса можно оценить следующим образом.

$$N \sim L/\eta_k \sim \nu^{-3/4} \sim \text{Re}^{3/4}$$

Поскольку DNS требует трехмерного нестационарного расчета, стоимость расчета пропорциональная общему количеству узлов сетки и количеству шагов по времени пропорциональна Re^3 . Это означает, что при увеличении числа Рейнольдса в 2 раза затраты увеличиваются примерно на порядок.

Эти жесткие требования отчасти смягчаются при использовании высокоточных спектральных методов численного интегрирования уравнений Навье-Стокса, которые часто используются для DNS. Однако эти методы неприменимы к расчету течений со сложной геометрией. Указанные обстоятельства приводят к тому, что на практике DNS применяется только для расчета простых турбулентных течений при низких (порядка единиц на 10^3 и ниже) числах Рейнольдса. При этом основной задачей расчета является не собственно получение данных о характеристиках осредненного течения (они, как правило, известны), а получение детальной информации о структуре турбулентности, а также вычисление отдельных членов, входящих в те или иные модели турбулентности.

Очевидно, что в ближайшей перспективе применение прямого численного моделирования для решения прикладных задач не возможно.

Метод моделирования крупных вихрей (LES)

Подход LES сформировался в начале 80-х годов. Идея LES состоит в том, что в отличие от «глобального» осреднения уравнений Навье-Стокса производится их «фильтрация» только от коротковолновых (с длинами волн порядка и меньше размеров используемой расчетной сетки) турбулентных неоднородностей.

При этом процедура фильтрации произвольной функции f состоит в ее умножении на функцию «фильтра», имеющую некоторый характерный линейный масштаб Δ , и в последующем интегрировании полученного произведения по всему рассматриваемому объему V . Таким образом, отфильтрованные и актуальные значения функции f определяются выражениями:

$$\bar{f}(r, t) = \int_V G(r, r') f(r', t) dr'^3, \quad f = \bar{f} + f',$$

где $G(r, r')$ - функция фильтра, r – координата рассматриваемой точки потока, f - актуальное значение функции, а \bar{f} , f' - ее отфильтрованное и пульсационное значения соответственно.

После замены основных переменных в уравнения Навье-Стокса на сумму соответствующих отфильтрованных и пульсационных величин и применения операции фильтрации к полученным уравнениям получается система уравнений сходная по виду с уравнениями Рейнольдса. Однако физическое содержание этих двух систем совершенно разное. Опуская детали, отметим лишь, что процедура фильтрации по существу равносильна осреднению функции f по объемам с характерным размером Δ^3 , в результате чего вся информация о турбулентных структурах с размерами меньшими Δ (то есть о пульсационных или подсеточных составляющих f') теряется, а длинноволновые структуры (отфильтрованные составляющие \bar{f}) практически не искажаются.

При этом влияние отфильтрованных («подсеточных») структур на длинноволновые структуры турбулентного потока, разрешаемые в рамках LES «точно», описывается с помощью полуэмпирических моделей, которые аналогичны по своей сути традиционным моделям (эти модели называются подсеточными).

Принципиальное преимущество LES состоит в том, что, благодаря относительной однородности и изотропности мелкомасштабной турбулентности описание ее характеристик при помощи подсеточной модели оказывается гораздо более точным, чем моделирование всего спектра турбулентных пульсаций. Основной причиной этого является то, что крупные структуры часто оказываются недостаточно случайными, в этом случае не до конца оправданным является использование статистических моментов для описания их свойств, а именно эти величины моделируются в рамках таких подходов.

Естественной платой за указанные важные преимущества LES является значительное увеличение вычислительных затрат, связанное с необходимостью, как и в случае DNS, проведения трехмерных нестационарных расчетов на достаточно мелких сетках даже в тех случаях, когда представляющее непосредственный интерес для практики осредненное течение является двумерным и стационарным. С другой стороны, по понятным причинам (мелкомасштабная часть спектра *моделируется*, а не рассчитывается «точно») вычислительные ресурсы необходимые для реализации LES оказываются намного меньшими, чем для DNS.

В последнее время получил распространение подход MILES. В этом подходе подсеточная модель не используется, а ее «диссипативные» функции выполняет сеточная диссипация. Соответственно, этот подход требует тщательного подбора расчетных сеток и используемых схем.

Применение уравнений Рейнольдса, замкнутых при помощи моделей турбулентности (RANS).

Система уравнений Рейнольдса может быть получена путем осреднения по времени нестационарных трехмерных уравнений Навье-Стокса. При этом подразумевается, что временной интервал, по которому производится осреднение, намного больше характерных

временных масштабов турбулентности, с одной стороны, и намного меньше характерного макро масштаба времени рассматриваемого течения, с другой.

Эта система является незамкнутой, поскольку в нее входит неизвестный тензор так называемых рейнольдсовых напряжений $\tau_{ij}^T = \rho \overline{u_i' u_j'}$. В силу симметричности этого тензора, неизвестными являются только шесть его компонент. Для замыкания системы уравнений Рейнольдса необходимо определить связь между тензором рейнольдсовых напряжений и параметрами осредненного течения. Эта связь называется модель турбулентности.

Огромный опыт, накопленный при эксплуатации полуэмпирических моделей турбулентности, привел к ясному осознанию того, что надежды на создание универсальной модели турбулентности пригодной для расчета всех или, по крайней мере, большинства турбулентных течений, казавшиеся вполне реальными еще в 70-80-х годах прошлого века, едва ли осуществимы. Это, в свою очередь, привело к значительному смещению акцентов в исследованиях, посвященных моделированию турбулентности. Так, все больше внимания стало уделяться альтернативным (не использующим RANS) подходам, однако, в силу исключительной вычислительной трудоемкости этих подходов, основным инструментом для расчета сложных турбулентных течений, представляющих практический интерес, по-прежнему остается Полуэмпирическая Теория Турбулентности (ПТТ).

В этой области, наряду с традиционными исследованиями, направленными на усовершенствование существующих и разработку новых моделей турбулентности, в последнее время большое внимание уделяется проблеме тестирования и определения границ применимости таких моделей. Эта работа проводится как отдельными исследователями, так и в рамках специальных международных программ, координируемых, в частности, Стэнфордским университетом в США, Комиссией ЕС по развитию научных исследований и Европейским Сообществом по Течениям, Турбулентности и Горению (ERCRAFT). Целью этих программ является выработка конкретных рекомендаций, позволяющих обоснованно выбрать ту или иную модель турбулентности при решении различных прикладных задач. Значительный вклад в решение данной проблемы внесли три Стэнфордские международные конференции (1968, 1980 и 1990 гг.), получившие неофициальное название “олимпиад моделей турбулентности”. Среди более поздних попыток организации тщательного и всестороннего тестирования моделей турбулентности следует отметить Европейский проект по вычислительной гидродинамике *ECARP*, в рамках которого проведено сопоставление результатов расчетов достаточно широкого круга турбулентных течений, полученных с использованием самых разнообразных моделей турбулентности несколькими исследовательскими группами с помощью их собственных вычислительных программ. Аналогичные усилия предпринимаются ERCRAFT, под эгидой которого регулярно проводятся специализированные международные рабочие семинары, посвященные детальному анализу результаты расчетов, полученных участниками в рамках одних и тех же моделей турбулентности для так называемых “тестовых течений”, то есть специально отобранных экспериментов, содержащих, по мнению организаторов наиболее надежные и полные данные по тем или иным турбулентным течениям.

В результате в настоящее время накоплена весьма обширная и объективная (свободная от вычислительных ошибок и не связанная со спецификой конкретных численных реализаций) информация о возможностях различных полуэмпирических моделей турбулентности.

Следует отметить, что в рамках этого подхода уравнения Рейнольдса могут решаться в двумерной или трехмерной постановках, стационарными или нестационарными. Кроме того, в некоторых задачах могут быть использованы упрощенные уравнения: приближение пограничного слоя, приближение узкого канала, параболизированные уравнения. Выбор системы уравнений зависит от рассматриваемой задачи и должен соответствовать рассматриваемому типу течения (примеры: пограничный слой, канал, струя, цилиндр).

В частности, иногда изначально двумерные задачи решаются в трехмерной нестационарной постановке (такой подход в западной литературе называется URANS). При этом наиболее крупные когерентные структуры оказываются разрешенными и характер решения напоминает LES. Однако в силу отсутствия достаточного обоснования этот подход в настоящее время оценивается неоднозначно.

Гибридные подходы. Метод моделирования отсоединенных вихрей.

Наряду с кратко рассмотренными выше тремя основными современными подходами к моделированию турбулентных течений, в настоящее время разрабатывается ряд промежуточных подходов, сочетающих в себе те или иные элементы RANS, LES и DNS.

Наиболее широкое распространение получили подходы, объединяющие RANS и LES. При использовании LES подавляющее большинство узлов сетки (до 90%) приходится на пристенные участки течения (т.е. на пограничные слои), поскольку при приближении к стенке характерный масштаб вихрей существенно уменьшается. В то же время основные преимущества LES перед RANS проявляются на некотором отдалении от стенки, в областях где существуют когерентные структуры. В то же время большинство современных полуэмпирических моделей турбулентности очень хорошо описывают пограничный слой, поскольку они, как правило, на него настроены. Это привело к созданию различных гибридных подходов, использующих RANS около стенок и LES вдали от них.

Среди них следует отметить предложенный в 1997 г. метод Моделирования Отсоединенных Вихрей (Detached Eddy Simulation – DES), поскольку в нем удачно сочетаются сильные стороны RANS (экономичность и надежность расчета безотрывных течений) с возможностью расчета течений с обширными зонами отрыва, обеспечиваемой LES. В результате с его помощью уже сегодня удается с высокой степенью точности рассчитать весьма сложные отрывные течения, численное моделирование которых в рамках LES пока невозможно из-за ограниченных возможностей вычислительной техники.

Идея метода DES очень проста и состоит в использовании уравнений Рейнольдса только в тех областях потока, где локальный размер используемой вычислительной сетки Δ недостаточен для разрешения турбулентных структур с линейными масштабами порядка l_{turb} (характерный локальный масштаб турбулентности) и в использовании метода LES в остальной области потока, где $\Delta < l_{turb}$.

Конкретная реализация этой идеи базируется на использовании модели турбулентной вязкости Спаларта-Аллмараса. В частности, фигурирующее в диссипативном члене этой модели в качестве линейного масштаба турбулентности расстояние до стенки d предлагается заменить величиной, определяемой соотношением:

$$\tilde{d} = \min\{d, C_{DES}\Delta\}$$

где C_{DES} – константа модели DES, а размер сетки Δ определяется как максимальный из трех ее шагов Δ_x , Δ_y и Δ_z в рассматриваемой точке потока.

Применительно к пристенным отрывным течениям такое определение \tilde{d} приводит к тому, что в населенной мелкими турбулентными вихрями области присоединенного пограничного слоя с характерной для нее сильно анизотропной сеткой ($\Delta_x \approx \Delta_z \gg \Delta_y$) выполняется неравенство $d < C_{DES}\Delta$, и в качестве масштаба используется истинное расстояние до стенки d , то есть реализуется стандартный подход, основанный на уравнениях Рейнольдса, замкнутых с помощью модели турбулентности Спаларта-Аллмараса. В отрывной области, населенной сравнительно крупномасштабными (“отсоединенными”) вихрями, имеет место обратная ситуация ($d > C_{DES}\Delta$), в результате чего в качестве масштаба турбулентности в диссипативном члене SA модели используется величина $C_{DES}\Delta$. В этом случае данная модель переходит в дифференциальную подсеточную модель турбулентности.

Таким образом, гибридный характер метода DES вытекает непосредственно из его формулировки: в области присоединенного пограничного слоя метод функционирует в режиме уравнений Рейнольдса, а в области отрыва (“отсоединенных» вихрей”) – автоматически переходит в LES. При этом достигается органичное сочетание лучших качеств обоих подходов, а именно, высокая точность и экономичность уравнений Рейнольдса в области присоединенного пограничного слоя и универсальность LES в отрывной области потока. Кроме того, хотя DES, как и LES, в отличие от уравнений Рейнольдса, является принципиально трехмерным нестационарным подходом, необходимые для его реализации сетки в пристенной области совпадают с сетками, необходимыми для решения уравнений Рейнольдса, то есть являются на много порядков меньшими, чем соответствующие сетки, требуемые для разрешения мелких пристенных вихрей в рамках LES. При этом по мере измельчения сетки метод DES асимптотически приближается к методу LES и далее – к DNS.

Интегральные методы.

В заключение, для полноты обзора, необходимо упомянуть о так называемых интегральных методах расчета турбулентных течений. Фактически эти методы являются обобщением огромного количества экспериментальных данных для определенных классов течений. Обогащенные простейшей теорией (типа уравнений пограничного слоя) они являются мощным инструментом для проведения промышленных расчетов. Основным недостатком этих методов является их неуниверсальность (примеры для пограничного слоя).

Сравнение различных подходов

Завершая краткий обзор современных подходов к численному моделированию турбулентности, приведем составленную Ф. Спалартом, в которой представлены данные, характеризующие вычислительные ресурсы, необходимые для реализации рассмотренных подходов к численному моделированию турбулентности и перспективы их практического использования с учетом прогнозов на развитие вычислительной техники. Приведенные в этой таблице данные относятся к типичным прикладным задачам аэродинамики, например, к расчету обтекания самолета или автомобиля.

Вычислительные ресурсы и перспективы практического применения различных подходов к моделированию турбулентных течений

Метод	Необходимое число узлов сетки	Необходимое число шагов по времени	Готовность
2D нестационарные уравнения Рейнольдса	10^5	$10^{3.5}$	1980
3D стационарные уравнения Рейнольдса	10^7	10^3	1985
3D нестационарные уравнения Рейнольдса	10^7	$10^{3.5}$	1995
DES	10^8	10^4	2000
LES	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
DNS	10^{16}	$10^{7.7}$	2080

Из таблицы видно, что в ближайшие годы основными подходами к решению сложных прикладных задач будет классический подход, основанный на двумерных и трехмерных уравнениях Рейнольдса (RANS/URANS), или гибридные подходы, включающие его как составную часть. Таким образом, по крайней мере в течение ближайших 40-50 лет, человечество обречено использовать те или иные модели турбулентности.

Простые "канонические" течения.

Прежде чем обращаться к моделированию турбулентности рассмотрим специфические свойства и структуру простых "канонических" течений. Этому есть несколько причин.

1. Эти течения хорошо изучены как теоретически, так и экспериментально, по ним накоплена огромная информация.
2. Эти течения являются составной частью более сложных, интересных с практической точки зрения течений.
3. Часто эти течения и их специфические свойства используются при создании и калибровке как моделей турбулентности (как полуэмпирических, так и подсеточных), так и более сложных гибридных методов расчета.

Следует отметить, что при экспериментальном исследовании таких течений приходится решать большое количество проблем, связанных с минимизацией влияния побочных факторов на течение, т. е. с обеспечением «простоты» течений (примеры: однородная изотропная турбулентность, струя, пограничный слой).

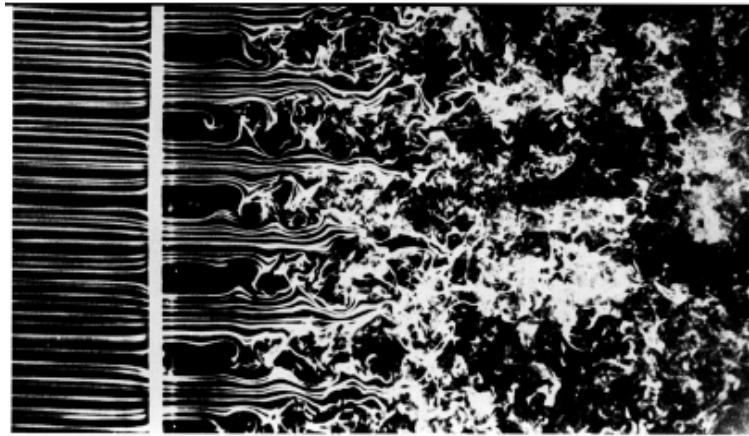
Простые "канонические" течения могут быть разделены на две категории: свободные течения и пристенные течения. Такое разделение связано с чрезвычайно сильным изменением свойств турбулентности вблизи твердых стенок. Рассмотрим последовательно наиболее важные из них.

Свободные течения

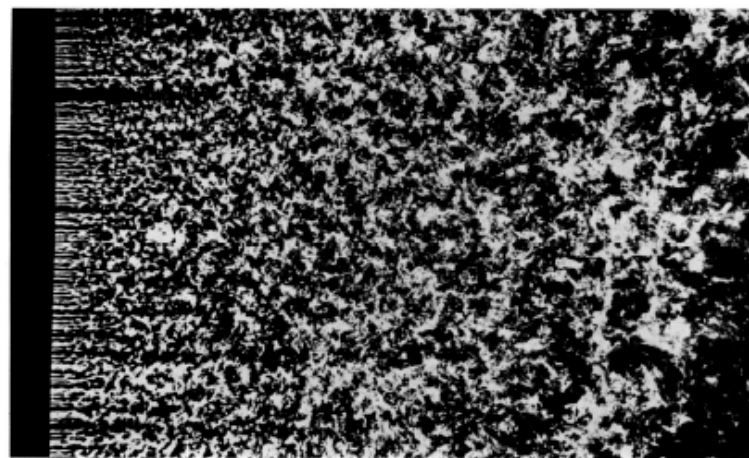
Вырождение однородной изотропной турбулентности

Эта задача важна по следующим причинам:

1. В этом течении существенную роль играет только каскадный перенос энергии и диссипация наиболее мелких вихрей в тепло. В силу однородности и изотропности диффузия турбулентности равна 0, а поскольку нет осредненного течения, генерация турбулентности (передача энергии от осредненного движения турбулентным пульсациям) также равна 0.
2. Это течение хорошо изучено теоретически при помощи статистической теории турбулентности (см. соответствующий курс)
3. Это течение тщательно изучено экспериментально. Как правило, однородная изотропная турбулентность получается в аэродинамических трубах в ядре потока при использовании турбулизаторов (сеток). При этом вихри наибольшего размера соизмеримы с размером ячейки сетки (рис. 9). Экспериментальные измерения проводятся в ядре потока на различном расстоянии от турбулизатора, что позволяет проследить развитие течения (вырождение турбулентности) во времени.



152. Порождение турбулентности решеткой. Дымовые проволочки демонстрируют прохождение однородного ламинарного потока через пластинку толщиной 1/16 дюйма с квадратными перфорациями размером 3/4 дюйма. Число Рейнольдса, рассчитанное по однодюймовому размеру ячейки решетки, равно 1500. Неустойчивость сдвиговых слоев приводит к развитию турбулентности вниз по потоку. Фото Thomas Corke, Hassan Nagib



153. Однородная турбулентность за решеткой. За решеткой более частой, чем на предыдущем снимке, сливающиеся неустойчивые следы быстро образуют однородное поле. По мере затухания вниз по потоку это поле становится полезным приближением идеализированной модели изотропной турбулентности. Фото Thomas Corke, Hassan Nagib

Рис. 9. Турбулентные структуры, наблюдаемые при вырождении однородной изотропной турбулентности

Наиболее интересной характеристикой однородной изотропной турбулентности является ее энергетический спектр (рис. 7).

Наибольший интерес это течение представляет для метода моделирования крупных вихрей и связанных с ним гибридных методов, поскольку моделируемая в рамках этих подходов подсеточная турбулентность близка к однородной и изотропной.

В то же время следует отметить, что в случае сильного сдвига (пограничный слой, начальный участок слоя смешения) даже мелкомасштабная турбулентность оказывается анизотропной, поэтому не менее важной задачей для вихреразрешающих методов является искажение турбулентности в поле однородного сдвига.

На практике вырождение однородной изотропной турбулентности используется для калибровки констант в подсеточных моделях турбулентности (при правильном выборе констант не должно происходить искажение спектра). При этом важно проводить калибровку при использовании той же схемы, что и в последующих расчетах, поскольку так называемая сеточная диссипация (различная для разных схем) может оказывать заметное влияние на результаты расчетов.

Свободные сдвиговые течения.

Термин "свободные сдвиговые течения" объединяет целый класс течений, к которым относятся дальний след за телом, слой смешения и струя в затопленном пространстве. Эти течения в первую очередь отличает отсутствие твердых стенок, которые заметно влияют на турбулентность. Кроме того, эти течения также детально изучены в эксперименте.

Следует отметить, что при сравнительно высоких числах Рейнольдса турбулентная диффузия существенно превышает молекулярную, что упрощает теоретическое рассмотрение данных течений.

В случае ламинарного течения все они имеют автомодельное решение (см. *Лойцянский, 1987*), однако в турбулентном случае все несколько сложнее. В рамках простейших гипотез (формула Прандля) эти задачи имеют автомодельное решение, в рамках некоторых дифференциальных моделей тоже. Более того, полученные автомодельные решения в областях потока с высокими числами Рейнольдса достаточно хорошо, хотя и не идеально, совпадают с экспериментальными данными.

Важно, что для всех этих течений, как правило, характерна так называемая двойная структура течения, а именно наиболее крупные структуры оказываются упорядоченными (когерентными) и на их фоне развивается мелкомасштабная турбулентность. Наличие организованных структур, сравнимых по размеру с масштабом течения, приводит к вовлечению невозмущенных (ламинарных) из внешнего потока пятен внутри турбулентной области и, соответственно, к наличию перемежаемости.

Не менее важным фактором является то, что эти наиболее крупные низкочастотные структуры оказываются наиболее «энергонесущими».

Рассмотрим эти течения в простейшем, несжимаемом случае.

Слой смешения

Слой смешения получается при взаимодействии двух потоков, движущихся в одном направлении с разными скоростями.

С точки зрения осредненного течения основной характеристикой слоя смешения является его ширина. Поскольку скорость на краях слоя смешения асимптотически стремится к скорости во внешнем потоке, в этом случае используется так называемая процентная ширина слоя смешения, т.е. расстояние между точками, в которых скорость отличается от скорости в соответствующем внешнем потоке на определенное количество процентов (1-10) от разности скоростей внешних потоков. Выбор конкретной ширины ограничивается двумя обстоятельствами: снизу – точностью измерений или расчетов, а сверху – нежеланием сильно изменить это значение относительно «истинного».

Ширина турбулентного слоя смешения с достаточно высокой степенью точности оказывается пропорциональной расстоянию от начала слоя смешения, поэтому принято говорить об «угле расширения» слоя смешения или о коэффициенте расширения, равному тангенсу этого угла. Для 10% ширины экспериментальное значение коэффициента расширения $C_s = 0.115$.

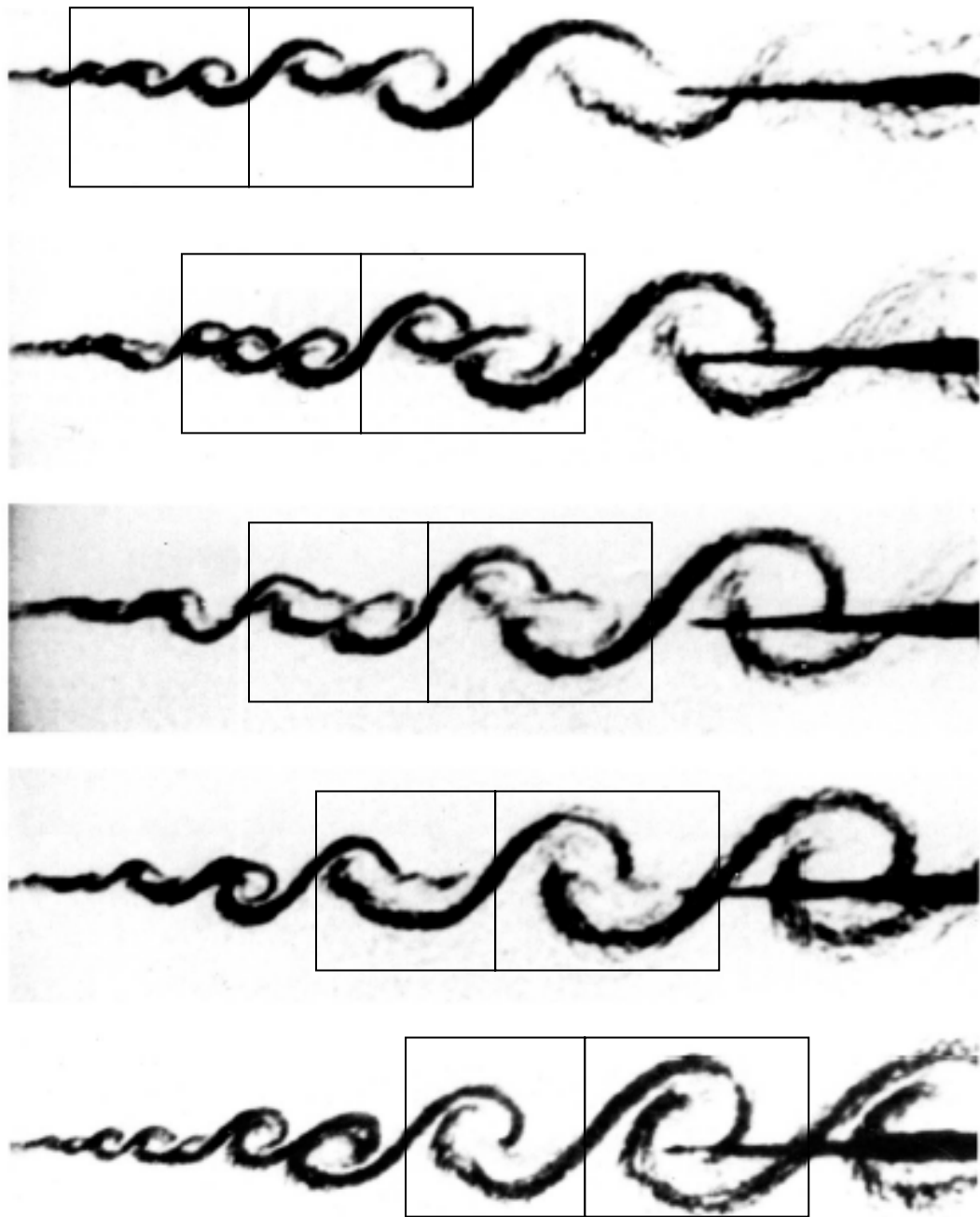
Примечательным фактом является то, что «нулевая» линия тока отклоняется в сторону меньшей скорости.

Важным понятием является понятие сворачивания (shedding) слоя смешения. Если рассмотреть слой смешения, имеющий в начале очень маленькую ширину, то на некотором расстоянии изначально параллельные линии тока начинают периодически изгибаться и в конечном итоге сворачиваются в вихри, подобные наблюдаемым в дорожке Кармана. Эти вихри закручены в одну сторону. Причиной этой неустойчивости является наличие перегиба в профиле скорости (невязкий поток, у которого профиль с перегибом скорости, абсолютно неустойчив). Вязкие силы несколько стабилизируют слой смешения, однако число Рейнольдса потери устойчивости чрезвычайно мало, около 10.

На следующем участке происходит объединение («спаривание») соседних вихрей. Это происходит следующим образом: идущий впереди вихрь за счет своего вращения «выталкивает» следующий за ним в область более высоких скоростей, а сам опускается в сторону более низких. Задний вихрь «наезжает» на передний и они объединяются. В зависимости от числа Рейнольдса таких «спариваний» может произойти несколько (рис. 10).

Далее выросшие вихри начинают терять устойчивость в третьем направлении. За счет попадания в области потока разной скорости они растягиваются и превращаются из вихрей типа roller в вихри типа braid (шнурок). Течение становится существенно трехмерным. В местах сильной деформации поперечных вихрей появляются продольные вихри типа rib (ребро).

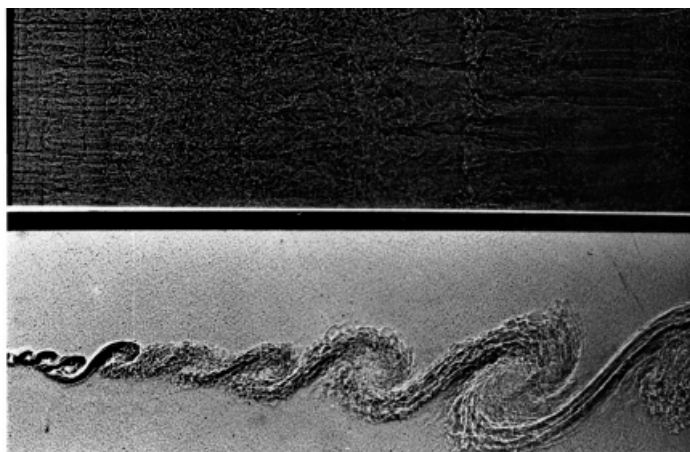
Параллельно с этими процессами за счет каскадного переноса энергии набирает силу более мелкомасштабная турбулентность. За счет своих высоких диффузионных свойств она постепенно «смазывает» изначально очень хорошо организованные когерентные структуры, но, тем не менее, их остатки видны еще очень долго. В этом и состоит упомянутая выше двойная структура течения (рис. 11).



178. Спаривание вихрей в слое смешения. Последовательность теневых фотографий демонстрирует смешение двух потоков одинаковой плотности под давлением 8 атм и при числе Рейнольдса 850 000. Азот течет со скоростью 10 м/с над смесью гелий – аргон, движущейся со скоростью 3,5 м/с. Справа

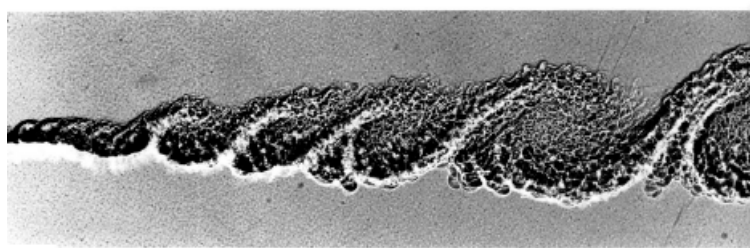
на кадрах виден датчик. Два разных вихря, видимые на верхнем снимке, спариваются в центре третьего вихря и превращаются в один большой вихрь на нижнем снимке. Фото L. Bernal, G. L. Brown, A. Roshko. [Roshko, 1976]

Рис. 10. Спаривание вихрей в слое смешения



176. Крупномасштабная структура в турбулентном слое смешения. Азот, находящийся сверху и текущий со скоростью 1000 см/с, перемешивается под давлением 4 атм со смесью аргон-гелий, находящейся снизу, имеющей ту же плотность и текущей со скоростью 380 см/с. Сделанная искровым методом теневая фотография показывает одновременно течение в плане и сбоку, демонстрируя пространственную структуру больших вихрей. Поло-

ски, вытянутые вдоль потока, на фотографии течения в плане (здесь показана лишь половина снимка в ширину) соответствуют системе вторичных вихревых пар, ориентированных в направлении по потоку. Расстояние между ними в части слоя, расположенной вниз по потоку, больше, чем ближе к началу. Фото J. H. Komga, Ph. D. Thesis, Калифорнийский технологический институт, 1976



177. Когерентная структура при большем числе Рейнольдса. Течение аналогично показанному на предыдущем снимке, но соответствует вдвое большему давлению. Увеличение числа Рейнольдса вдвое приводит к росту числа мелкомасштабных

структур без существенного изменения крупномасштабной структуры. M. R. Rebollo, P. D. Thesis, Калифорнийский технологический институт, 1976. [Brown, Roshko, 1974]

Рис. 11. Двойная структура турбулентности в слое смешения.

Затопленная струя

С точки зрения осредненного течения наиболее простой является задача о бесконечно тонкой струе (плоской или осесимметричной). В этом случае ширина струи растет пропорционально расстоянию от начала, а скорость убывает обратно пропорционально этому расстоянию (круглая струя) или его корню (плоская струя).

Принято говорить об «угле расширения» струи (угле между осью x и точкой, в которой скорость равна половине скорости на оси струи) или о коэффициенте расширения, равному тангенсу этого угла. Для плоской струи экспериментальное значение коэффициента расширения $C_\delta \approx 0.1 \div 0.11$, а для круглой - $C_\delta \approx 0.086 \div 0.09$.

Следует отметить, что для струй характерно эжекционное потенциальное течение, т.е. струя «втягивает» в себя ламинарные жидкость или газ из окружающего пространства (рис. 12).

Как и для слоя смешения, для струй характерна двойная структура течения (хотя и менее ярко выраженная), т.е. сравнительно мелкомасштабное хаотическое турбулентное движение на фоне более упорядоченных когерентных структур (рис. 13). Как и в слое смешения, втягивание низкотурбулентных объемов жидкости из внешнего потока приводит к появлению перемежаемости.

169. Захват жидкости плоской турбулентной струей. Длительная выдержка при съемке позволяет видеть осредненное течение для случая плоской струи подкрашенной воды, вытекающей в неподвижную воду со скоростью 100 см/с. Мелкие пузырьки воздуха маркируют линии тока медленного движения, индуцируемого струей в окружающей воде. Фото ONERA. [Werlé, 1974]



170. Захват жидкости осесимметричной турбулентной струей. Турбулентная струя подкрашенной воды вытекает из трубы диаметром 9 мм при скорости 200 см/с. В согласии с теорией пограничного слоя линии тока, маркируемые воздушными пузырьками в воде вне струи, представляют собой параболы вращения или параболы в плоском случае, показанном на предыдущем снимке. Фото ONERA. [Werlé, 1974]

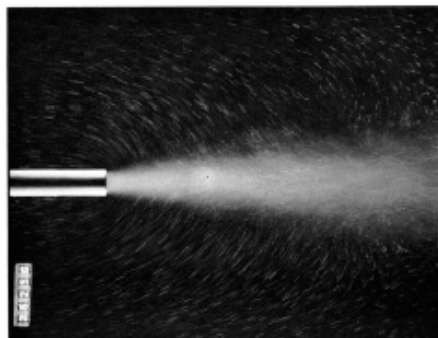


Рис. 12. Эжекционное потенциальное течение в окрестности струи.



166. Турбулентная струя воды. Индуцированная лазером флуоресценция показывает картину внедрения жидкой струи в окружающую жидкость в плоскости симметрии осесимметричной водной струи, направляемой сверху вниз в воду. Число Рейнольдса равно приблизительно 2300. Пространственная разрешающая способность достаточна, чтобы выявить колмогоровский масштаб в нижней половине снимка. [Dimotakis, Lye, Rapanotou, 1981]

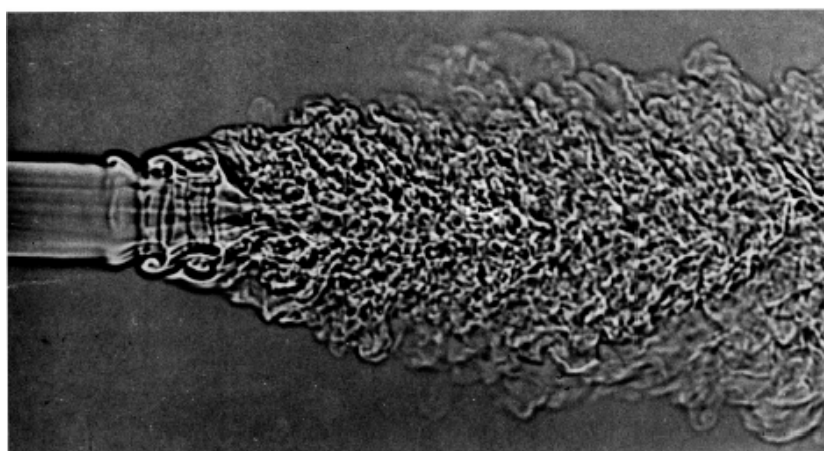
Рис. 13. Двойная структура турбулентности в затопленной струе.

Реальные струи истекают из сопел конечного размера, поэтому для струй принято выделять три участка (рис. 14).

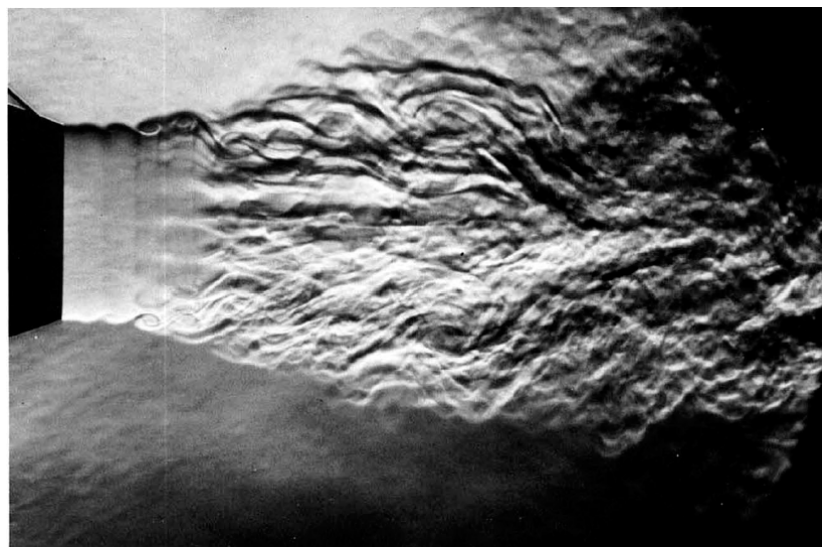
На начальном участке слои смешения развиваются независимо. В зависимости от чисел Рейнольдса и диаметра сопла к концу начального участка слои смешения могут быть в разной степени турбулизованы. В центре струи сохраняется ламинарное ядро потока.

На переходном участке происходит взаимодействие (смыкание) слоев смешения. За счет столкновения разнонаправленных структур происходит их быстрое разрушение, что приводит к существенной турбулизации потока.

После этого расположен основной участок струи, среднее течение на котором с некоторого момента довольно хорошо описывается закономерностями, приведенными выше для струи из точечного источника.



117. Неустойчивость круглой струи. Эта теневая фотография демонстрирует струю углекислого газа диаметром 1/4 дюйма, вытекающую в воздух при скорости 127 фут./с. Когда струя вытекает из сопла при числе Рейнольдса, равном примерно 30 000, она ламинарна. На расстоянии одного диаметра вниз по потоку струя обнаруживает неустойчивость, после чего происходит образование вихревых колец и переход к турбулентности. Фото Fred Landis, Ascher H. Shapiro



167. Дозвуковая струя, становящаяся турбулентной. Струя воздуха из сопла диаметром 5 см вытекает в окружающий воздух со скоростью 12 м/с. Ламинарная поверхность раздела становится неустойчивой, как и на фото 102, и в конечном итоге вся струя становится турбулентной. [Bradshaw, Ferriss, Johnson, 1964]

Рис. 14. Начальный участок струи, истекающий из сопла конечного размера.

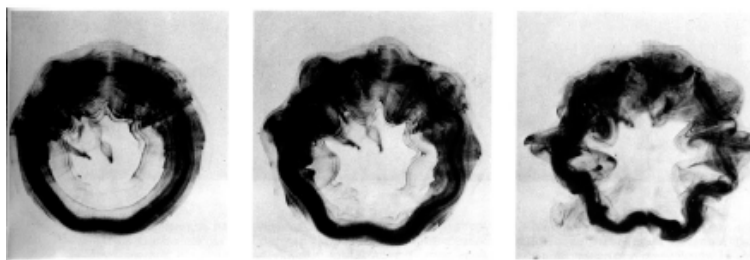
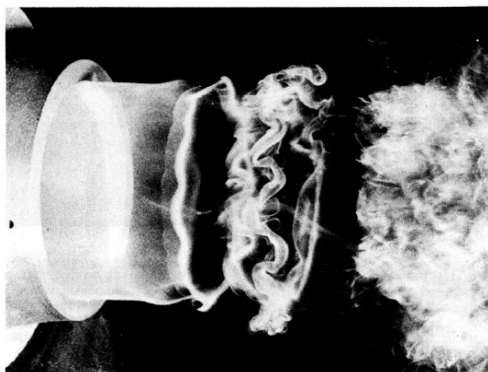
На начальном участке струи различают три типа неустойчивости.

Первый тип ведет к сворачиванию слоя смешения в продольные вихри типа roller.

Второй тип неустойчивости приводит к «спариванию» когерентных структур в слое смешения и увеличению вихрей типа roller. (см. рис. 10 и 11)

Благодаря третьему типу плоские или кольцевые вихри, получившиеся благодаря первому или второму типу, теряют осевую (или пространственную) устойчивость (рис. 15). Надо отметить, что в осесимметричном случае неустойчивость выше, чем в плоском.

118. Неустойчивость круглой струи. Дым дает несколько иную картину того же течения, что и на предыдущем снимке, при числе Рейнольдса, равном примерно 13 000. Волновая неустойчивость вихревых колец и их последующее разрушение аналогичны показанному на фото 114. Фото R. Wille, A. Michalke, любезно предоставлено H. Fiedler



114. Рост волн на вихревом кольце. Эта последовательность снимков демонстрирует восемь волн, развивающихся вокруг ламинарного вихревого кольца в воде, при несколько большем числе Рейнольдса, примерно равном 2000. [Didden, 1977]

Рис. 15. Пространственная неустойчивость вихрей типа roller.

Характер турбулентности на основном участке струи (в частности, энергетический спектр) существенно зависит от того, какой из трех механизмов преобладает. Это приводит к тому, что в круглой и в плоской струях когерентные структуры, переносящие основной объем турбулентной энергии имеют различную структуру. Поэтому для большинства моделей турбулентности требуется перенастройка констант при переходе от плоских к осесимметричным струям (проблема осесимметричности). Для решения этой проблемы приходится вводить специальные поправки.

Кроме того, воздействуя различным образом (например, звуком) на когерентные структуры можно некоторым образом управлять турбулентными свойствами струи (см. рис. 4).

Дальний след

Дальний след за телом (рис. 16) является наиболее зависимым от начальных условий течением из свободных сдвиговых течений, поскольку начальная структура когерентных

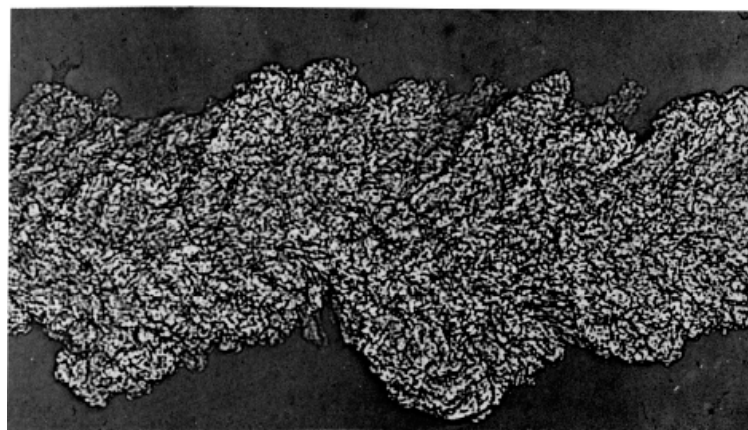
вихрей существенно зависит от формы обтекаемого тела. Эксперименты показали, что об автомодельном характере течения можно говорить только на очень больших расстояниях от тела (150-500 диаметров). Это приводит к естественным проблемам, связанным с тем, что на таких расстояниях след в значительной степени «теряется». По этой же причине практически никогда не рассматривается осесимметричный дальний след, поскольку в нем дефект скорости падает существенно быстрее, чем в плоском случае.

В автомодельном решении (для действительно дальних следов) ширина следа пропорциональна корню от расстояния до тела.

С практической точки зрения (кроме экзотических задач) гораздо в большей степени интерес представляет ближний след и когерентные структуры в нем. Эксперименты показали, что при большой длине тела в третьем направлении когерентные вихри образуют шахматную структуру. Для этой структуры характерны системы вихрей типа roller, braid, rib.



174. Турбулентный след за цилиндром. Лазерный световой нож прорезает след за круговым цилиндром при числе Рейнольдса 1770. Масляный туман демонстрирует мгновенную структуру течения, охватывая поле в 40 диаметров цилиндра по обе стороны от сечения, отстоящего на 50 диаметров вниз по потоку. Фото R. E. Falco



151. Дальний турбулентный след за пулей. Пуля, выстреленная в атмосферу со сверхзвуковой скоростью, находится слева от места выстрела на удалении нескольких сот диаметров следа. Эта быстро экспонированная теневая фотография демонстрирует замечательную резкость нерегулярной границы между сильно турбулентным следом за пулей и почти неподвижным воздухом во внешней безвихревой области. Фото сделано в Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground. [Corrsin, Kistler, 1954]

Рис. 16. Турбулентность в дальнем следе.

Различие в структуре наиболее крупных вихрей в свободных сдвиговых течениях приводит к тому, что эти, простейшие на первый взгляд течения зачастую оказываются довольно сложными для многих методов расчета. В частности, большинство моделей турбулентности не в состоянии хорошо предсказать свойства всех рассмотренных течений.

Турбулентный пограничный слой

Еще в начале 20 века было замечено, что вблизи стенок возникает тонкая область (пограничный слой), в которой газодинамические параметры резко меняются от значений на стенке до значений во внешнем потоке. Позже выяснилось, что в подавляющем большинстве случаев этот пограничный слой является турбулентным, что существенно влияет на его характеристики (см. рис. 8).

Распространенность пограничных слоев очень высока. Практически любая задача, в которой есть твердые стенки в качестве составной части содержит пограничные слои (примеры: крыло, турбинные лопатки, стенки сопел, фюзеляж самолета и т.п.).

Говоря о турбулентных пограничных слоях, следует различать вынужденноконвективные и свободноконвективные пограничные слои. С практической точки зрения наиболее интересны первые из них.

Характеристики пограничных слоев

Прежде всего, определимся, какие величины характеризуют пограничные слои. Заметим, что все характеристики являются локальными, т.е. характерными для данного сечения пограничного слоя.

1. Толщина пограничного слоя. Из-за асимптотического характера стремления всех характеристик в значениям во внешнем потоке можно говорить только процентной толщине пограничного слоя, т.е. о расстоянии от стенки до точки, в которой скорость отличается от скорости на внешней границе пограничного слоя на заданное количество процентов (на практике используются значения от 0.1 до 5%, чаще всего 0.5 или 1%). Эта величина, однако, трудно определима как в расчете так и в эксперименте. Поэтому на практике чаще всего используются так называемые

интегральные толщины пограничного слоя толщина вытеснения $\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$ и

толщина потери импульса $\theta = \delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$. Эти величины определяются

гораздо точнее и их определение не зависит от произвола (выбора конкретного количества %). Также часто используется отношение этих толщин – безразмерный

формпараметр $H = \frac{\delta^*}{\theta}$.

2. Число Рейнольдса. Пограничный слой, по определению, характеризуется двумя сильно отличающимися масштабами: расстоянием от начала x и толщиной пограничного слоя (какой-либо). Наиболее часто используются два числа Рейнольдса

$$\text{Re}_x = \frac{xU_e}{\nu} \text{ и } \text{Re}_\theta = \frac{\theta U_e}{\nu}$$

3. Коэффициент трения. $C_F = \frac{\tau_w}{0.5\rho U_e^2}$; $\tau_w = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w$ - напряжение трения на стенке. С

трением на стенке также тесно связана так называемая динамическая скорость

$v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ - характерный скоростной масштаб для пристенной области.

Соответствующий линейный масштаб $\frac{v}{v^*}$ соответствует минимальному размеру вихрей в пограничном слое (аналог Колмогоровского диссипативного масштаба).

4. Не менее важной характеристикой пограничных слоев является продольный градиент давления. Как правило, в пограничном слое давление поперек сохраняется. Это, в частности, следует из самих уравнений пограничного слоя. Поскольку внешний поток, как правило, является потенциальным, для него справедливо уравнение Бернулли.

Соответственно $\frac{dp}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx}$. На практике используются различные безразмерные

характеристики. Например, параметр равновесия Клаузера $\beta = \frac{\delta^*}{\tau_w} \left| \frac{dp}{dx} \right|$.

5. Часто пограничные слои осложнены влиянием дополнительных факторов. Такими факторами, в частности, являются.

Фактор	Критерий
Кривизна поверхности (продольная или поперечная)	δ^*/R
Вдув-отсос	V_w/v^* , V_w/U_e - скорость вдува
Шероховатость	$k_s^+ = \frac{k_s v^*}{\nu}$ - высота бугорков эквивалентной песочной шероховатости

Важным свойством пограничных слоев является выполнение интегрального уравнения импульсов. А именно, если течение удовлетворяет уравнениям плоского

пограничного слоя, то $\frac{d\theta}{dx} + \frac{dU_e}{dx} \cdot \frac{(2+H)}{U_e} \theta - \frac{C_f}{2} = 0$. Верно и обратное: если уравнение

импульсов не выполняется, то уравнения плоского пограничного слоя также не верны для этого течения. Это может быть обусловлено разными причинами: трехмерность течения, его нестационарность, влияние вверх по потоку, изменение давления поперек пограничного слоя, влияние нормальных Рейнольдсовых напряжений и т.д.

Переход к турбулентности в пограничном слое

Характерной особенностью турбулентного пограничного слоя является увеличение его толщины вниз по потоку. Это приводит к росту числа Рейнольдса, возникновению волн Толлмина-Шлихтинга и, в конечном итоге, к турбулизации слоя. В зависимости от уровня турбулентности внешнего потока переход к турбулентности для пограничного слоя на плоской пластине происходит при числах $Re_x = 5 \cdot 10^5 \div 3 \cdot 10^6$ и числах $Re_0 = 320 \div 1000$. При этом происходит перестройка профиля скорости, приводящая к изменению поведения характеристик пограничного слоя.

1. Профиль скорости меняется от ламинарного профиля Блазиуса к характерному турбулентному профилю скорости (см. ниже).
2. Коэффициент трения резко возрастает в несколько (около 5) раз.
3. Формпараметр H падает с 2.6 до примерно 1.4-1.5.

4. Меняется зависимость толщины пограничного слоя от x . В ламинарном случае толщина пропорциональна корню квадратному от продольной координаты, а в турбулентном линейно пропорциональна.

Следует помнить, что и процесс развития возмущений в пограничном слое и дальнейшая перестройка профиля происходят за вполне конечное время, за которое пограничный слой «проходит» некоторое расстояние. Эта область называется переходным участком.

Различают два типа перехода: естественный и байпасный. В первом случае, характерном для задач внешней аэродинамики, внешний поток является низкотурбулентным и после того, как ламинарный пограничный слой становится неустойчивым, возмущения нарастают естественным образом. В этом случае переход происходит «поздно», т.е. при больших числах Рейнольдса.

При байпасном переходе уровень турбулентности внешнего потока является высоким, что характерно для внутренних задач. В этом случае возмущения из внешнего потока «проникают» в ламинарный пограничный слой и приводят к его более быстрой турбулизации. При больших уровнях турбулентности внешнего потока переход происходит сразу после того, как пограничный слой становится неустойчивым.

Иногда говорят о вынужденном переходе или о турбулизаторах. При этом в пограничный слой тем или иным образом вносятся возмущения, что приводит к его турбулизации. Примеры: шероховатая стенка, проволока, плохо обтекаемые тела, вихрегенераторы крыловые и струйные. Область применения таких устройств чрезвычайно разнообразна: от костюмов горнолыжников до авиации. Кроме того, турбулизаторы часто применяются в экспериментах для обеспечения перехода в заданной точке.

Следует отметить, что невынужденный переход очень чувствителен к различным факторам, таким как продольный градиент давления, шероховатость поверхности, вдув, отсос и т.п. Эти факторы могут, как стабилизировать, так и дестабилизировать пограничный слой.

Структура пограничного слоя (вынужденная конвекция).

В физических координатах график профиля скорости в турбулентном пограничном слое представлен на рис. 18.

Важной особенностью профиля скорости в турбулентном пограничном слое является то, что разные (по расстоянию до стенки) области в нем являются автомодельными в разных координатах. Этот факт привел к тому, что еще с начала 20 века (Прандтль, Карман, Тейлор) стало принято говорить о двух- и более слойном профиле скорости в пограничном слое.

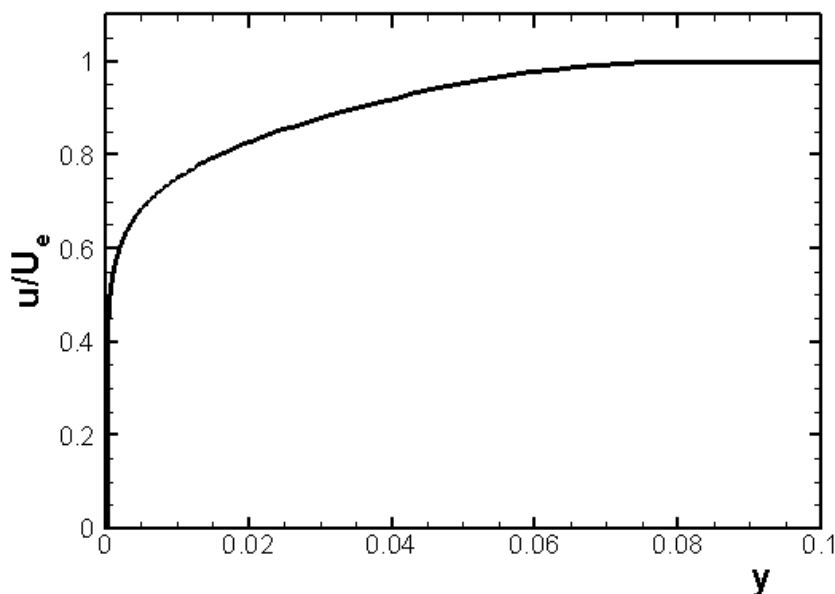


Рис. 17. Профиль скорости турбулентного пограничного слоя в физических координатах.

Представления о структуре профиля скорости постепенно менялись и окончательно сформировались к концу 50х годов. В настоящее время пограничный слой принято делить на две области: внутреннюю и внешнюю.

Внутренняя область составляет около 20% толщины пограничного слоя (в случае плоской пластины) и содержит около 80% энергии турбулентных пульсаций. В этой области существенную роль играют диссипативные (вязкие) силы, поэтому характерным масштабом скорости в этой области является так называемая динамическая скорость

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad \text{где} \quad \tau_w = \nu \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w.$$

Соответствующим линейным масштабом при этом оказывается $l^* = \frac{\nu}{v^*}$ (аналог колмогоровского масштаба). Обезразмеренные по этим

масштабам расстояние до стенки и продольная скорость носят название переменные

$$\text{закона стенки} \quad y^+ = \frac{y v^*}{\nu}, \quad u^+ = \frac{u}{v^*}.$$

Если нарисовать профиль скорости в пограничном слое в переменных закона стенки (см. рис. 19), то можно видеть, что для внутренней области характерны три подобласти:

вязкий подслой (1) ($u^+ = y^+$), логарифмическая область (3) ($u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$,

$\kappa=0.41$ ($0.4 \div 0.436$), $B=5.5$ ($5.0 \div 6.2$), $E=9.0$) и переходная область(2). Для вязкого подслоя характерно преобладание молекулярного переноса над турбулентным, а для логарифмической области – обратная ситуация. В переходной области оба механизма переноса одного порядка.

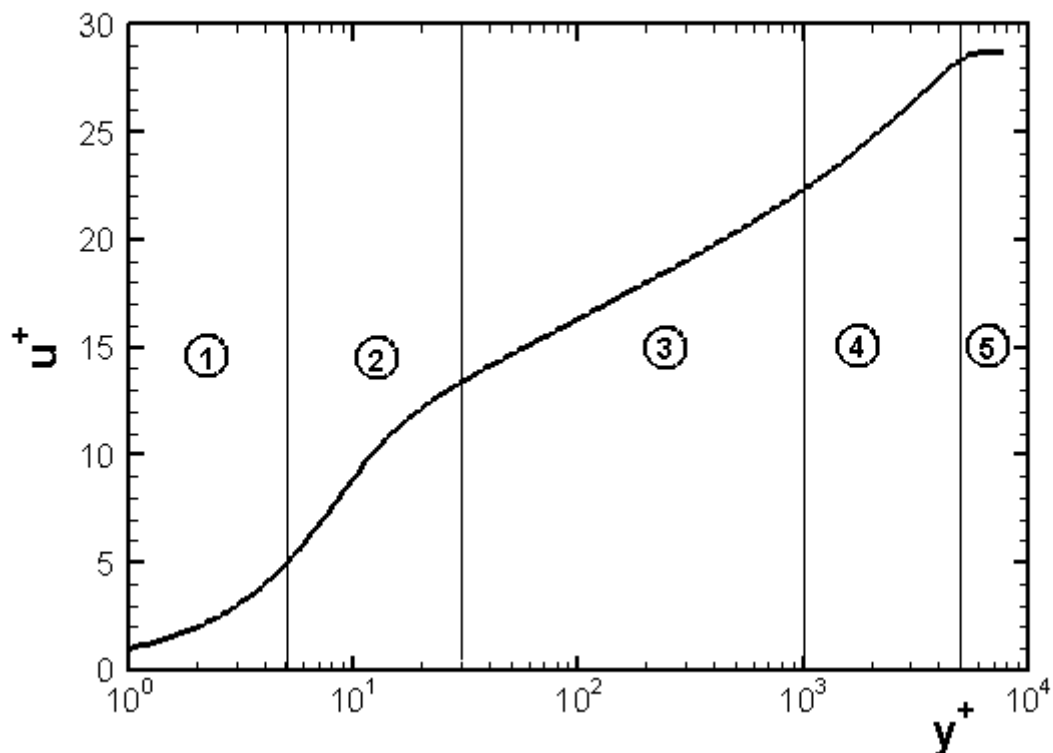


Рис. 18. Профиль скорости турбулентного пограничного слоя в логарифмических координатах.

Следует отметить, что для внутренней области пограничного слоя характерны мелкомасштабные структуры характерного размера порядка расстояния до стенки. Эти структуры имеют сравнительно короткие времена жизни и, соответственно, длины жизни. Это приводит к тому, что для внутренней области характерна так называемая «короткая память», т.е. информация о внесенных возмущениях «забывается» за несколько толщин пограничного слоя.

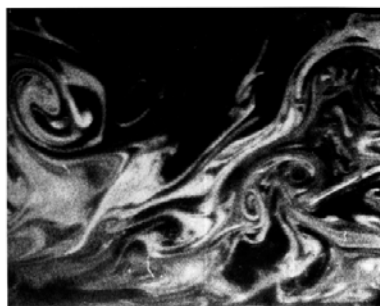
Структуру внешней области впервые описал Клаузер. Он выяснил, что в переменных закона следа $\frac{U_e - u}{v^*}$ и $\frac{y}{\delta}$ профили скорости во внешней области являются подобными.

Более того, они оказываются подобными профилям в ламинарном пограничном слое при наличии некоторой скорости на стенке. Эта закономерность получила название «закона падения дефекта скорости».

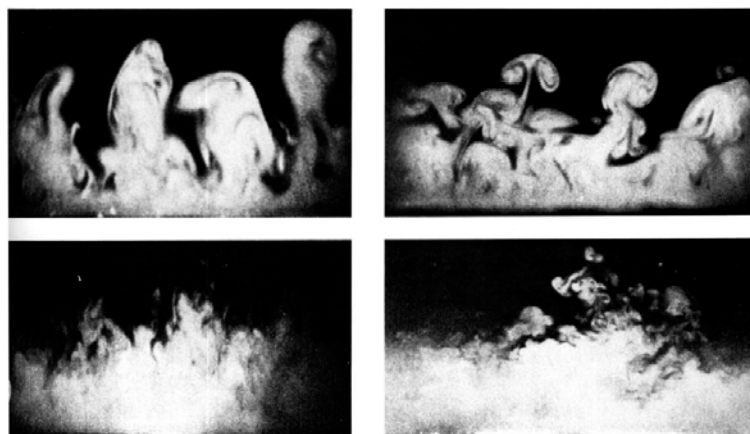
Внешнюю область принято делить на две подобласти: область дефекта скорости (4) и область перемежаемости (5), в которой на фоне практически однородного бесшумного течения двигаются крупные когерентные структуры. Эти структуры вносят в однородный низкотурбулентный поток возмущения из турбулентной области (см. рис. 5), при этом через точку пространства проходит то ламинарный, то турбулентный поток (явление перемежаемости).

Для внешней области пограничного слоя характерны эффекты «долгой» памяти, внесенное возмущение за счет крупномасштабности когерентных структур сохраняет на протяжении десятков калибров.

С точки зрения структуры вихрей, в пограничном слое она оказывается заметно сложнее, чем в свободных сдвиговых течениях. Поперечные вихри (типа *roller* в слое смещения) за счет больших градиентов скорости вытягиваются в петли. Взаимодействие различных вихрей приводит к заметной турбулизации потока с появлением структур различного размера. На фоне столь существенной генерации турбулентности происходит ее заметное подавление за счет влияния стенки. (см. рис. 19).



162. «Гипотичный вихрь» в турбулентном пограничном слое. Масляный туман освещается лазерным световым ножом, чтобы показать сбоку нижние две трети турбулентного пограничного слоя. Структура типа вихревого кольца справа чуть ниже и правее центра снимка, напоминающая разрезанный и наклонившийся влево гриб, дает пример того, что Фалько назвал «типичным вихрем». Его размеры соответствуют скорее пристеночному масштабу длины (фото 161), чем толщине пограничного слоя. Фото R. E. Falco



163. Косые поперечные сечения турбулентного пограничного слоя. Течение рассматривается спереди и визуализируется дымом, освещаемым световым ножом, который имеет наклон 45° вниз по потоку от стенки (левые снимки) и 45° вверх по потоку

(правые снимки). Число Рейнольдса, рассчитанное по толщине пограничного слоя, равно 600 для верхней пары снимков и 9400 – для нижней. [Head, Vandyoradhuay, 1981]

Рис. 19. Структура вихрей в турбулентном пограничном слое.

Для пограничного слоя без градиента давления существуют хорошие корреляции между числом Рейнольдса и коэффициентом трения. Однако различные факторы типа градиента давления, вдува-отсоса и шероховатости существенно влияют на структуру и уровень турбулентности и, как следствие, на форму профиля скорости. В предельных случаях они могут приводить к реламинаризации потока (отсос, отрицательный градиент давления) или к его отрыву (см. рис. 3).

Одним из частных случаев пристенных течений являются течения в трубах и каналах. В отличие от пограничного слоя во внешних задачах, в этих течениях толщина слоя ограничена поперечным размером трубы.

При переходе к турбулентному режиму в канале появляются так называемые «турбулентные пробки», доля которых растет по мере роста числа Рейнольдса. Подобную перемежаемость в трубах в 60е годы подробно исследовал Коважный. После перехода к турбулентности форма профиля скорости изменяется, он становится существенно более

заполненным. Тем не менее, не смотря на различия течения в трубе и в пограничном слое, для них обоих свойственны общие закономерности, в первую очередь «закон стенки».

Уравнения Рейнольдса и модели турбулентности

Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса.

Рассмотрим первый, самый простой, способ расчета турбулентных течений, основанный на замыкании уравнений Рейнольдса при помощи моделей турбулентности.

Осреднение по Рейнольдсу.

В общем случае, следуя Рейнольдсу, в процессе любого осреднения следует требовать выполнения условий Рейнольдса:

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$\overline{af} = a\overline{f}$$

$$\overline{a} = a \quad ,$$

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial s} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s}$$

$$\overline{fg} = \overline{f} \overline{g}$$

где $a = \text{const}$, а s – пространственная или временная координата.

Из вышеописанных условий следуют важные следствия

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}$$

$$\overline{f'} = 0$$

$$\overline{\overline{fg}} = \overline{fg}$$

$$\overline{fh'} = 0$$

Используя эти следствия можно получить

$$\overline{fg} = \overline{f} \overline{g} + \overline{f'g'}$$

Для несжимаемых течений используется Рейнольдсова процедура осреднения по времени.

$$\overline{a}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} a(\tau) \cdot d\tau$$

Для сжимаемых течений часто используется процедура осреднения по Фавру, иногда называемая методом средневзвешенных параметров.

$$\tilde{a}(t) = \frac{\overline{\rho a}}{\overline{\rho}}$$

Причины использования этого метода станут понятны, если сравнить осредненные двумя способами уравнения для сжимаемого газа и не осредненным уравнением. Видно, что при использовании осреднения по Рейнольдсу получается большое количество корреляций плотности и скорости, в случае осреднения по Фавру они отсутствуют.

Кроме осреднения по времени существуют еще осреднение по пространству и по ансамблю. В принципе, эти величины должны быть эквивалентны, однако доказать это в общем случае весьма затруднительно.

В практических приложениях два последних типа осреднения используются гораздо реже. В частности, осреднение по пространству используется при обработке результатов в случаях, когда геометрически одномерная или двумерная задачи решаются в трехмерной постановке. Это позволяет получить гораздо более качественное осреднение при сравнительно небольших временных отрезках, что существенно сокращает вычислительные затраты.

Осреднение по ансамблю используется, например, в методах Монте-Карло.

Осреднение нестационарных величин. Проблемы (время осреднения).

При решении нестационарных задач процедура осреднения может оказаться не совсем корректной. Время осреднения T должно быть ограничено временем свободного пробега снизу и характерным временем задачи сверху. В целом, время осреднения должно быть больше, чем период турбулентных пульсаций, которые мы хотим осреднить. Можно придумать задачи, для которых этому условию невозможно удовлетворить.

Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса.

Другим столпом полуэмпирической теории турбулентности являются уравнения Навье-Стокса (для простоты будем рассматривать их в несжимаемом случае).

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

Для выполнения уравнений Навье-Стокса необходимо выполнение двух условий:

1. Среда должна быть сплошной. Иными словами газ не должен быть слишком разрежен (число Кнудсена $Kn = l_f/L \ll 1$). Это не выполняется, например, при расчете обтекания спускаемых аппаратов в верхних слоях атмосферы или при расчете внутренних течений при малых давлениях (вакуумная техника).
2. Должен выполняться обобщенный реологический закон Ньютона ($P = 2\mu\dot{\epsilon} - pE$ для несжимаемой жидкости). Что не выполняется, например, для масляной краски, сгущенки и многих других сред.

Применив к уравнениям Навье-Стокса процедуру осреднения Рейнольдса получим так называемые уравнения Рейнольдса (RANS)

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \end{cases}$$

Проблема замыкания (необходимость определения напряжений)

Для замыкания этой системы уравнений необходимо определить шесть различных компонент симметричного тензора турбулентных напряжений. Однако определение этого тензора становится моделированием турбулентности только в том случае, когда этот тензор выражается через параметры осредненного течения.

Замыкание уравнений: модели турбулентности.

Замыкающие соотношения

Именно выражение тензора турбулентных напряжений через параметры осредненного потока и называется моделью турбулентности. При этом, вообще говоря, сделан ряд предположений, которые не всегда выполняются, а именно:

1. Осредненные пульсации определяются характером осредненного течения. Иными словами они являются некоторым функционалом полей газодинамических величин ($\overline{u'v'} = \Phi(U)$). Это предположение не выполняется во многих случаях (например, вырождение однородной изотропной турбулентности). Для его выполнения необходима, в частности, хаотичность пульсаций. Рассмотрим, например корреляцию $\overline{u'v'}$, где $u' = \sin(\omega t), v' = \sin(\omega t + \varphi_0)$. Тогда $\overline{u'v'} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u'v' \cdot dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.5 \cdot \cos(\varphi_0)$.

Видно, что независимо от поля осредненной скорости значение напряжения зависит только от сдвига фазы между компонентами скорости. Эта проблема возникает при расчете течений, для которых свойственны упорядоченные когерентные структуры. Так, например, при расчете двумерного обтекания цилиндра стационарное решение заметно отличается от осредненного по времени нестационарного решения.

2. Гипотеза локальности. Вместо функционала $\overline{u'v'} = \Phi(U)$ (зависимость тензора рейнольдсовых напряжений от осредненных параметров во всем пространстве и в широком временном интервале) записывается просто функция, зависящая от локальных характеристик в конкретной точке в текущий момент времени. Соответственно эффекты памяти могут быть описаны только через дифференциальные транспортные уравнения. Пример: пограничный слой с внезапным изменением скорости движения стенки.

Гипотеза Буссинеска.

Большинство моделей турбулентности используют гипотезу Буссинеска.

$$-\overline{u'u'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (\text{несжимаемая жидкость})$$

Фактически это означает пропорциональность девиаторной составляющей тензора Рейнольдсовых напряжений тензору скоростей деформаций. Иными словами вместо поля симметричного тензора (6 компонент) необходимо знать поле одной скалярной величины.

Легко видеть, что в случае использования гипотезы Буссинеска уравнения Рейнольдса могут быть представлены следующим образом.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu + \mu_T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

Часто сумму молекулярной и турбулентной вязкостей называют эффективной вязкостью.

Применение гипотезы Буссинеска имеет свои достоинства и недостатки.

К достоинствам относятся

1. Упрощение уравнений. Решение отдельных уравнений для каждой компоненты рейнольдсовых напряжений представляет значительную сложность (о чем ниже, в моделях рейнольдсовых напряжений).
2. Повышение вычислительной устойчивости алгоритмов (увеличение диффузионного коэффициента).
3. Наглядность (это скорее не достоинство, а удобство). Скалярная характеристика турбулентности позволяет гораздо проще проводить анализ результатов расчетов.

Основным недостатком этой гипотезы можно назвать неприменимость в некоторых течениях. К таким течениям, в частности, относятся следующие: вращающаяся труба (нелинейность профиля скорости в радиальном направлении); свободно-конвективный ПС, вращающийся канал (при нулевой деформации напряжения ненулевые).

С другой стороны, в огромном количестве течений существенную роль играет только одна компонента турбулентных напряжений. К таким течениям, в частности, относятся сдвиговые течения (ПС, свободные сдвиговые течения). В этих течениях достаточно точного предсказания этой одной компоненты для описания поля скорости.

Альтернативы гипотезе Буссинеска: нелинейные соотношения, модели рейнольдсовых напряжений (о них будет подробно позже).

Этапы развития моделирования турбулентности

1. До второй мировой войны – попытки понять физическую сущность турбулентности, введение основных понятий.

Буссинеск – 1877 (Гипотеза Буссинеска)

Рейнольдс – 1895 (осреднение по Рейнольдсу)

Прандтль – 1925 (теория пути смещения Прандтля)

Карман – 1930 (формула Кармана)

2. 40-50-е годы – создание математической базы и теоретических основ большинства моделей турбулентности.

Колмогоров – 1942 (формула Колмогорова, первая модель $k-\omega$)

Ротта – 1951 (первая модель Рейнольдсовых напряжений)

Клаузер – 1956 (формула Клаузера)

Ван-Дрифт – 1956 (демпфирующий множитель)

3. 60-е годы – наше время. Использование моделей турбулентности для замыкания уравнений Рейнольдса. Бурное развитие моделирования турбулентности в 60е-70е годы. Появление моделей различных типов, в первую очередь $k-\varepsilon$. Большие надежды, связанные с моделями типа $k-\varepsilon$, появление большого количества модификаций. Разочарование 80х

годов. 90е – практический подход к созданию моделей. Появление лучших из современных моделей турбулентности.

Проблемы тестирования моделей

Появление огромного количества моделей привело к необходимости выбора. Для этого необходимо провести сравнительный анализ моделей.

Однако при попытке тестирования моделей естественным образом возникают определенные трудности. Во-первых, необходимо выбрать течения, для которых известен набор достоверных экспериментальных данных, свободных от погрешностей, а также выбрать представительные критерии для сравнения моделей. Во-вторых, необходимо провести серийные расчеты этих течений с использованием разных моделей турбулентности и при этом быть уверенными в независимости результата от программной реализации и произвола в постановке задачи. Результатом такой работы должны явиться рекомендации по области применимости тех или иных моделей турбулентности.

Подобные работы по тестированию моделей проводились как отдельными авторами, так и под эгидой различных организаций. В первую очередь следует отметить три Стэнфордских конференции, а также общеевропейские проекты (ERCOFTAG и Flomania). Подобная работа позволила составить представление о свойствах тех или иных моделей турбулентности.

Классификация моделей.

Для определения турбулентных напряжений используются модели турбулентности – алгебраические или дифференциальные соотношения. Этим моделей очень много, но ни одна из них не является идеальной. Причина такого многообразия – отсутствие идеальности и поиски новых, более точных или универсальных моделей.

Спектр моделей турбулентности очень широк: от простых алгебраических связей до сложных моделей рейнольдсовых напряжений, содержащих 7 и более дифференциальных уравнений. Однако среди всего многообразия моделей можно выделить несколько основных групп (обсуждение основных групп моделей и их краткая характеристика)

1. Алгебраические модели
2. Модели с одним дифференциальным уравнением
3. Модели с двумя дифференциальными уравнениями
4. Модели, не использующие гипотезу Буссинеска

Следует отметить, что некоторые модели формально невозможно отнести ни к одной из перечисленных категорий, эти модели мы будем рассматривать вместе с моделями, наиболее близкими к ним по свойствам.

Алгебраические модели турбулентности

Гипотеза пути смешения.

Молекулярный перенос импульса.

Рассмотрим простейшее сдвиговое течение, в котором скорость – $U(y)$. Тогда перенос импульса равен

$$dP_{xy} = \overline{dp_{xy}} = \overline{\rho(U + u'')v''dS} = \overline{\rho u''v''}dS$$

Тогда тензор вязких напряжений равен

$$t_{xy} = p\delta_{xy} - \sigma_{xy} = -dP_{xy}/dS = -\overline{\rho u''v''}$$

С другой стороны: пусть в единице объема содержится n частиц имеющих среднюю термическую скорость v_m (примерно $4/3$ скорости звука) и среднюю длину свободного пробега l_m . Тогда

1. Половина частиц летит в нужном направлении
2. При интегрировании по углу их средняя нормальная скорость становится $v_m/2$.

Разница моментов в точках на расстоянии l_m составляет $m[U(0) - U(-l_m)]$ (m – масса молекулы). Тогда перенос импульса за счет молекул «прилетающих снизу» составляет

$$\Delta P_- = n \cdot \frac{v_m}{4} \cdot m [U(0) - U(-l_m)] \approx \frac{1}{4} \rho v_m \cdot l_m \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\text{Аналогично } \Delta P_+ \approx \frac{1}{4} \rho v_m \cdot l_m \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\text{Тогда } t_{xy} = \Delta P_- + \Delta P_+ = \frac{1}{2} \rho v_m \cdot l_m \frac{\partial U}{\partial y} = \mu \frac{\partial U}{\partial y}; \mu = \frac{1}{2} \rho v_m \cdot l_m$$

Предположения:

1. $l_m \left| \partial^2 U / \partial y^2 \right| \ll \left| \partial U / \partial y \right|$ ($Kn \ll 1$)
2. Выполнение распределения Максвелла при наличии сдвига $l_m \left| \partial U / \partial y \right| \ll v_m$

Гипотеза пути смешения Прандтля

Рассмотрим теперь турбулентное течение. Будем считать, что турбулентный перенос импульса осуществляется некими среднестатистическими турбулентными молями (или вихрями), имеющими характерную скорость поперек потока v_{mix} и характерный линейный размер l_{mix} , на протяжении которого турбулентный моль сохраняет свою индивидуальность. Проведя аналогичные рассуждения, получим

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \rho v_{mix} \cdot l_{mix} \frac{\partial U}{\partial y} = \mu_t \frac{\partial U}{\partial y}$$

Прандтль предположил, что

$$v_{mix} = Cl_{mix} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$$

Следует отметить, что в отличие от длины свободного пробега длина пути перемешивания не является строго детерминированной величиной. Поэтому путь перемешивания можно «переопределить» внося в него все константы (0.5 и C). Тогда

$$\tau_{xy} = \rho \cdot l_{mix}^2 \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]^2 = \mu_t \frac{\partial U}{\partial y}$$

Соответственно турбулентная вязкость определяется как

$$\mu_t = \rho \cdot l_{mix}^2 \frac{\partial U}{\partial y}$$

Однако следует помнить, что аналогия между молекулярным тепловым и хаотическим турбулентным движением не является полной. В первую очередь, это связано с существенной разномасштабностью турбулентных вихрей.

Модель Прандтля является незамкнутой, поскольку длина пути перемешивания не определена.

Несколько позже Карман сделал попытку замкнуть модель Прандтля воспользовавшись второй производной скорости. Из размерности следует

$$l = -\kappa \frac{du/dy}{d^2u/dy^2},$$

что приводит к

$$\mu_T = -\kappa^2 \rho \frac{(du/dy)^3}{(d^2u/dy^2)^2}$$

Однако эта гипотеза оказалась менее удачной, чем модель Прандтля.

Применение модели Прандтля к свободным сдвиговым течениям

Модели Прандтля для свободных сдвиговых течений.

$$\mu_t = \chi \rho [U_{\max}(x) - U_{\min}(x)] \delta(x)$$

$$\mu_t = \rho \cdot l_{mix}^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|; l_{mix} = \alpha \delta(x)$$

Хотя эта модель хорошо работает для таких течений, ее коэффициенты сильно отличаются для различных течений

Течение	α
Дальний след	0.180
Слой смешения	0.071
Плоская струя	0.098
Круглая струя	0.080

Это отличие связано, в первую очередь, с различием когерентных структур в разных свободных сдвиговых течениях.

Значение гипотезы Прандтля для всей теории турбулентных течений.

1. Все алгебраические модели построены на основе модели Прандтля.
2. Огромное влияние на дифференциальные модели с одним и двумя уравнениями. Линейный масштаб турбулентности входит практически во все модели.

Пристенные версии алгебраических моделей турбулентности.

Пристенные версии алгебраических моделей турбулентности в первую очередь настроены на расчет пограничных слоев. В этой связи, прежде всего, необходимо вспомнить о двуслойной структуре турбулентного пограничного слоя. Важно, что внутренняя и внешняя область пограничного слоя существенно различаются

(масштабами, автомодельными законами и т.п.). Это привело к тому, что подавляющее большинство алгебраических моделей турбулентности для пограничных слоев имеют двухслойную структуру.

Внутренняя область

В терминах гипотезы Прандтля для внутренней области длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию до стенки $l_{mix} = \kappa y$. В случае плоской пластины можно показать, что коэффициент пропорциональности и константа в логарифмическом законе равны. Так из эксперимента известно, что для пластины во внутренней области выполняется соотношение $\tau = (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} = const$.

Воспользовавшись тем, что при достаточно высоких числах Рейнольдса начиная с некоторого расстояния от стенки интенсивность турбулентного переноса значительно превышает интенсивность молекулярного, получим

$$\rho v_*^2 = \tau_w = \tau \approx \rho v_t \frac{\partial u}{\partial y} = \rho l_{mix}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \rho \left(\kappa y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

Перейдя к переменным закона стенки $y^+ = \frac{y v_*}{\nu}$, $u^+ = \frac{u}{v_*}$ получим

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{\kappa y^+}$$

откуда непосредственно следует логарифмический закон стенки

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$$

В непосредственной близости стенки турбулентные пульсации подавляются стенкой. Для учета этого обстоятельства используется так называемый демпфирующий множитель, который может быть введен либо в формулу Прандтля

$$v_t = l_{mix}^2 D \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, l_{mix} = \kappa y,$$

либо прямо в путь смешения

$$v_t = l_{mix}^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, l_{mix} = D_l \kappa y$$

Между этими формами записи простая связь $D = D_l^2$

Будем, для определенности использовать первую из двух формул. Тогда демпфирующий множитель должен удовлетворять следующим условиям (теория демпфирующих множителей Лойцянского).

1. Демпфирующий множитель D должен обеспечивать правильное (соответствующее эксперименту) поведение турбулентной вязкости вблизи стенки, $\frac{v_{Ti}}{\nu} \Big|_{y \rightarrow 0} = \alpha (y^+)^4$ ($\alpha = 0.0092 \div 0.0125$).
2. Демпфирующий множитель D должен расти при удалении от стенки (асимптотически приближаясь к 1) и практически обращаться в единицу при $y^+ > 30 \div 60$.

3. Демпфирующий множитель D должен удовлетворять соотношению:

$$B = \lim_{y^+ \rightarrow \infty} \left[\int_0^{y^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} (D) dy^+ - \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) \right],$$

где B – константа в логарифмическом законе

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$$

Всеми этим условиям удовлетворяет демпфирующий множитель, предложенный в 1956 году Ван-Дристом $D = (1 - \exp(-y v_* / A v))^2$, $A = 26$.

Это наиболее известный и используемый вид демпфирующего множителя, хотя существуют и другие (например, демпфирующий множитель Лойцянского $D = (1 - \exp[-(y v_* / A v)^2])$, $A = 26$)

Внешняя область

Основные принципы определения масштабов и создания алгебраических моделей для внешней области пограничного слоя были сформулированы Клаузером в 1954 году. В этой работе было сформулировано несколько моделей для внешней области пограничного слоя, однако часто используется лишь одна из них – так называемая вторая модель Клаузера. Согласно этой модели характерным линейным масштабом турбулентного движения во внешней области является толщина пограничного слоя, а характерным скоростным масштабом – скорость внешнего потока. Турбулентная вязкость во внешней области, согласно Клаузеру, определяется как

$$\nu_{To} = k \delta^* U_e, \quad k = 0.0168$$

Первая модель Клаузера практически никогда не используется, поскольку в качестве линейного масштаба использует толщину пограничного слоя, которую трудно определять из-за асимптотического характера скорости на внешней границе пограничного слоя.

При использовании формулы Клаузера на внешней границе пограничного слоя турбулентная вязкость оказывается большой величиной. Это противоречит существенно более низкому уровню турбулентности внешнего потока. Если для «чистых» пограничных слоев с постоянной скоростью на внешней границе (и нулевым сдвигом во внешнем потоке) это допустимо, то для более сложных течений это неприемлемо.

На основе экспериментальных измерений уровня турбулентности в области перемежаемости Клеббанов в 1956 г. предложил формулу для коэффициента перемежаемости (т.е. время, в течение которого в данной точке наблюдается турбулентный поток, отнесенное к общему времени измерений).

$$\gamma = (1 + 5.5(y/\delta_{0.95})^6)^{-1}$$

Практически во всех алгебраических моделях турбулентности коэффициент перемежаемости Клеббанова используется в качестве множителя к турбулентной вязкости во внешней области. В этой ситуации использование процентной толщины пограничного слоя не приводит к существенным трудностям, поскольку результаты расчета мало чувствительны к этому параметру.

$$\nu_{To} = k \delta^* U_e \gamma$$

«Сшивка» решений

Как правило, сшивка решений во внутренней и внешней областях производится в точке равенства турбулентной вязкости. С формальной точки зрения это не очень хорошо, поскольку в точке сшивки турбулентная вязкость не дифференцируема, а в уравнениях Рейнольдса она стоит под знаком производной. С практической точки зрения это редко играет существенную роль. Тем не менее, иногда используются гладкие сопряжения (например – $\tan H$).

Дополнительные сложности, возникающие при расчете пограничных слоев

При расчете пристенных течений зачастую возникают некоторые дополнительные сложности. Как правило, они обусловлены наличием дополнительных факторов так или иначе меняющих как профиль скорости в пограничном слое, так и непосредственно характеристики турбулентности. Например:

1. Проблема малых чисел Рейнольдса. Рассмотренная модель опирается на обобщение экспериментальных данных по развитым пограничным слоям при значительных числах Рейнольдса. В ситуации, когда число Рейнольдса (по толщине пограничного слоя) не очень велико, турбулентность в пограничном слое не успевает до конца развиться и корреляции, на которых построена данная модель, оказываются не совсем верными.

2. Массообмен через стенку (вдув-отсос) приводит к увеличению (в случае вдува) или уменьшению (в случае отсоса) турбулентных пульсаций. При отсосе толщина пограничного слоя уменьшается (относительно отсутствия массообмена), а при вдуве увеличивается. Кроме того, с точки зрения закона стенки, это приводит к изменению угла наклона логарифмического профиля скорости.

3. Продольный градиент давления не меняет логарифмического закона, но существенно изменяет интенсивность турбулентных пульсаций. Кроме того, при положительном градиенте давления толщина пограничного слоя становится больше, а при отрицательном – меньше, чем в безградиентном пограничном слое.

4. Эффекты сжимаемости, вызванные как большими числами Маха в набегающем потоке, так и сильной неизотермичностью потока, также приводят к изменению логарифмического закона.

5. Шероховатость поверхности может приводить к сдвигу логарифма (изменению константы B).

6. Продольная кривизна поверхности приводит к увеличению (на вогнутой стенке) или уменьшению (на выпуклой стенке) турбулентных пульсаций.

В большинстве случаев для учета этих (или других подобных) факторов в модели турбулентности необходимо вводить специальные поправки. В особенности это касается алгебраических моделей турбулентности. Рассмотрим наиболее популярную модель, построенную на изложенных выше принципах и включающую в себя большой набор поправок

Модель Себеси-Смита.

В рамках этой модели большинство поправок введены в демпфирующий множитель, а поправка на малые числа Рейнольдса в качестве множителя к турбулентной вязкости во внешней области.

$$v_T = \begin{cases} v_{Ti}, y \leq y_m \\ v_{To}, y > y_m \end{cases}, v_{Ti}(y_m) = v_{To}(y_m),$$
$$v_{Ti} = (\kappa y)^2 D |\partial u / \partial y|, D = (1 - \exp(-y v_* / A v))^2,$$
$$A = A_0 \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right) \left(\frac{\mu}{\mu_e} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right) \right)^2 \frac{p^+}{B_*} \left(1 - \exp \left(C_1 \frac{\mu_w}{\mu} B_* \right) \right) + \exp \left(C_1 \frac{\mu_w}{\mu} B_* \right) \right)^{-0.5},$$
$$B_* = \frac{v_w}{v_*}, p^+ = \frac{v_e U_e}{v_*^3} \frac{dU_e}{dx},$$
$$v_{To} = k(1 + \Pi_0) / (1 + \Pi) \delta^* U_e \gamma, \gamma = (1 + 5.5(y / \delta_{0.95})^6)^{-1},$$
$$\Pi = \Pi_0 (1 - \exp(-0.243 \sqrt{z_1} - 0.298 z_1)), z_1 = \text{Re}_\theta / 425 - 1.$$

Константы модели:

$$\kappa = 0.41, k = 0.0168, A_0 = 26, \Pi_0 = 0.55, C_1 = 11.8.$$

Однако для применения этой модели к свободноконвективным пограничным слоям в нее приходится вносить поправки (Sebeci, Khattab).

$$v_{To} = (0.075 \delta_{0.95})^2 |\partial u / \partial y| \gamma$$

Эта ситуация типична для алгебраических моделей.

Другие гипотезы для масштабов пограничного слоя

В заключение обзора пристенных алгебраических моделей рассмотрим некоторые другие гипотезы, которые по тем или иным причинам оказались менее востребованы, чем модель Себеси-Смита.

1. Гипотеза Эскудиера для максимума пути смещения.

$$l_{mix} = \max(\kappa y, 0.09 \delta)$$

Такое определение пути смещения позволяет замкнуть модель Прандтля без привлечения дополнительных предположений. Хотя эта гипотеза хорошо описывает турбулентный масштаб в пограничном слое, ее практическое использование существенно затруднено из-за трудностей определения толщины пограничного слоя.

2. Модели Ю.В. Лапина

В основе этих моделей лежит тот факт, что при замене формулы Прандтля во внутренней области на формулу

$$v_T = \kappa y v_*$$

также получается логарифмический профиль скорости на плоской пластине

$$\rho v_*^2 = \tau_w = \tau \approx \rho v_t \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \kappa y v_* \frac{\partial u}{\partial y}$$

или в переменных закона стенки

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{\kappa y}$$

Использование этой формулы приводит к изменению демпфирующего множителя (в соответствии с перечисленными ранее требованиями)

$$D = [1 - \exp(-\gamma v_* / \nu A)]^3, A = 13$$

Более того, в этих моделях в качестве масштаба во внешней области также используется динамическая скорость, а константа во внешней области оказывается равной κ , что позволяет сформулировать модель в предельно простой форме

$$\nu_T = \kappa \nu_* \min\{\gamma D, \delta^* \gamma\}$$

Эта модель, в силу высокой чувствительности коэффициента трения к любым внешним воздействиям, требует гораздо более существенных поправок при расчете пограничных слоев с осложняющими факторами (для градиента давления и некоторых других факторов такие поправки разработаны). Благодаря этому обстоятельству эта модель, несмотря на очевидные достоинства при расчете течений, на которые она настроена, оказывается гораздо менее универсальной, даже чем другие алгебраические модели.

Развитие алгебраических моделей турбулентности.

Некоторые недостатки алгебраических моделей.

Несмотря на очевидные достоинства алгебраических моделей турбулентности связанные с простотой формулировки и реализации, а также с простотой калибровки констант, они имеют ряд существенных недостатков.

1. Алгебраические модели крайне не универсальны. При переходе от одного течения к другому возникает необходимость модификации моделей. Например, модель Себеси-Смита (настроенная для вынужденноконвективных ПС) не очень хорошо работает для труб, а при переходе к свободноконвективным ПС требует серьезной модификации (переходу от формулы Клаузера к формуле Прандля).

$$\nu_{To} = (0.075 \delta_{0.95})^2 |du/dy| \gamma$$

2. Невозможность применения алгебраических моделей к расчету более сложных течений (в первую очередь трехмерных течений и течений в областях сложной геометрии). Серьезные сложности возникают даже для при расчете трехмерных турбулентных ПС. Основная проблема состоит в определении параметров пограничного слоя в течениях сложной геометрии (скорость на внешней границе пограничного слоя, толщина пограничного слоя, динамическая скорость на стенке, расстояние до стенки, продольная скорость и т.п.).
3. Мгновенная реакция моделей изменению «масштабных параметров». При резком изменении параметров внешнего потока это приводит к столь же резкому изменению турбулентной вязкости без «эффектов памяти». Пример: пограничный слой на движущейся стенке.

Для преодоления некоторых перечисленных недостатков существуют простые пути решения. Так, например, Патанкар предложил модифицировать формулу Прандля для течений с множеством твердых стенок следующим образом.

$$v_t = l^2 |\omega|; \frac{1}{l} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i}; l_i = \kappa y_i \left(1 - \exp\left(\frac{-y_i^+}{A}\right) \right)$$

Модель Болдуина-Ломакса

Наиболее удачная попытка создать алгебраическую модель, свободную от параметров, характерных для пограничного слоя – модель Болдуина-Ломакса.

Сохранив двухслойность модели и формулу Прандтля во внутренней области пограничного слоя

$$v_T = \begin{cases} v_{Ti}, y \leq y_m \\ v_{To}, y > y_m \end{cases}, v_{Ti}(y_m) = v_{To}(y_m),$$

$$v_{Ti} = (\kappa y)^2 D |\omega|, D = (1 - \exp(-y v_* / A v))^2,$$

авторы существенно модифицировали формулу Клаузера для внешней области пограничного слоя, избавившись от «неудобных» характеристик пограничного слоя.

$$v_{To} = k C_{CP} F_{WAKE} \gamma, \gamma = \left(1 + 5.5 (C_{KLEB} y / Y_{MAX})^6 \right)^{-1},$$

В этой модели характерными линейным и скоростным масштабами пограничного слоя во внешней области являются величины F_{MAX} , Y_{MAX} . Эти величины определяются максимальным значением функции

$$F(y) = y |\omega| (1 - \exp(-y v_* / A v))$$

поперек пограничного слоя.

Параметр

$$F_{WAKE} = \text{Min}(Y_{MAX} F_{MAX}, C_{WK} Y_{MAX} U_{DIF}^2 / F_{MAX})$$

осуществляет переключение между «погранслошной» и «струйной» версиями модели. Так, в пограничном слое минимальным является первое значение. В этом случае реализуется несколько модифицированная формула Клаузера. Если стенки оказываются далеко, то минимальным оказывается второе значение. Тогда

$$\frac{Y_{MAX}}{F_{MAX}} = \frac{Y_{MAX}}{Y_{MAX} |\omega_{MAX}| (1 - \exp(-Y_{MAX} v_* / A v))} \approx \frac{1}{|\omega_{MAX}|}$$

Соответственно полученная формула является аналогом второй формулы Прандтля

$$\mu_t = \chi \rho [U_{\max}(x) - U_{\min}(x)] \delta(x) = \chi \rho U_{DIF} \delta(x)$$

с той разницей, что линейный масштаб определяется как

$$\delta(x) = \frac{U_{DIF}}{|\omega_{MAX}|},$$

что, вообще говоря, является хорошей оценкой ширины струи.

Константы модели:

$$\kappa = 0.4, k = 0.0168, A = 26, C_{CP} = 26, C_{KLEB} = 0.3, C_{WK} = 0.25.$$

В модели Болдуина-Ломакса предусмотрены ламинарно-турбулентный переход и реламинаризация. В случае, когда максимальная поперек пограничного слоя вязкость не превышает 14, она полагается равной нулю в этом сечении.

Хотя предложенная Болдуном и Ломаксом модель отчасти решает проблемы, присущие алгебраическим моделям, ситуация далека от идеальной.

1. Хотя в этой модели нет параметров, характерных для пограничного слоя, эта модель все равно привязана к понятиям пограничного слоя или струи через определение F_{MAX} . Во многих случаях это бывает трудно сделать.
2. При определении максимума функции F вопреки пограничного слоя может возникать «перескок» с одного локального максимума на другой. Это приводит к резкому нефизическому скачку турбулентной вязкости во внешней области пограничного слоя. Как правило, для борьбы с этим явлением используются специальные (сложные с алгоритмической точки зрения) процедуры по «отслеживанию» максимумов.
3. Механизм «реламинаризации» также может включаться в «неподходящий» момент и приводить к сильному искажению решения.
4. Универсализация модели привела к потере качества: для расчета обычных пограничных слоев традиционные алгебраические модели работают лучше, чем модель Болдуина-Ломакса.

Тем не менее, модель Болдуина-Ломакса оказалась одной из наиболее популярных алгебраических моделей, была закодирована в большом количестве коммерческих пакетов, в течение долгого времени была наиболее используемой в практических приложениях и активно используется до сих пор.

Полудиференциальные модели.

Отсутствие «эффектов памяти» в алгебраических моделях привело к созданию целого направления, называемого «полудиференциальные модели» (half-equation models).

Начало этого направления было положено работой Джонсона и Кинга в 1985 году. В предложенной ими модели записывается уравнение для максимума кинетической энергии турбулентности вдоль поверхности. Используя гипотезу Невзглядова-Драйдена ($-\overline{u'v'} = 0.31k$), формулу Колмогорова ($\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$) и формулу пути смешения Прандтля ($l = \kappa y$), авторы получили обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка от продольной координаты x , решение которого давало релаксационный параметр.

Эта модель была успешно использована для решения различных задач (в том числе отрывных течений на профилях). Недостаток этой модели (кроме ориентации на пограничные слои) состоит в очень сложном алгоритме решения ОДУ.

Модель Хортон. (1994)

Наиболее удачной полудиференциальной моделью, по-видимому, является модель Хортон. В этой модели, построенной на основе традиционных формул Прандтля и Клаузера, ОДУ записано непосредственно относительно релаксационного параметра.

$$\nu_T = \nu_{T0} \tanh\left(\frac{\nu_{Ti}}{\nu_{T0}}\right) \cdot \gamma, \quad \gamma = \left(1 + \left(0.17 \frac{y}{\delta^*}\right)^{6.75}\right)^{-1},$$

$$\nu_{Ti} = (\kappa y)^2 D \left| \frac{\tau}{\tau_w} \frac{\partial u}{\partial y} \right|,$$

$$D = \left(1 - \exp\left(-\frac{y v_*'}{A \nu}\right)\right)^2, \quad A = A_0(1 - b p^+), \quad p^+ = -\frac{v_e}{\rho_w v_*'^3} \frac{dp}{dx},$$

$$\nu_{T_0} = k \delta^* U_e \sigma(x).$$

Для поиска $\sigma(x)$ решается дифференциальное уравнение:

$$\delta \frac{d}{dx}(as) = C_1 s(1-a)$$

$$a = \sigma^{0.69}, \quad s = \left[\left\{ \frac{\partial(u/U_e)}{\partial(y/\delta^*)} \right\}_{y=0.5\delta} \right]^{0.69}.$$

Константы модели:

$$C_1 = \begin{cases} 0.14, & \sigma \leq 1 \\ 0.50, & \sigma > 1 \end{cases}, \quad b = \begin{cases} 14.76, & p^+ \geq 0 \\ 12.60, & p^+ < 0 \end{cases}, \quad \kappa = 0.41, \quad k = 0.018, \quad A_0 = 26.$$

Использование хорошо проверенных основных формул в сочетании с удачным подбором коэффициентов позволило автору создать модель, которая хорошо описывает очень широкий набор течений (в рамках пограничного слоя).

Несмотря на некоторые преимущества полудифференциальных моделей перед алгебраическими, это направление не получило широкого развития по следующим причинам.

1. Полудифференциальные модели не проще алгебраических при расчете течений сложной геометрии. Возникают те же проблемы с определением параметров пограничного слоя, а кроме того вдоль поверхности необходимо решать ОДУ.
2. Преимущества этих моделей над алгебраическими не столь существенны.

В результате для полудифференциальных моделей не оказалась большой области применения.

Область применимости алгебраических моделей

В настоящее время алгебраические модели практически уступили свое место дифференциальным. Однако в течениях, для которых разработаны алгебраические модели их применение, безусловно, является оправданным. Но даже в таких ситуациях реализация и использование алгебраических моделей в современных кодах может быть довольно непростой задачей.

Кроме того, эти модели могут быть использованы в пристенной области при использовании гибридных методов и при разработке пристенных функций.

Дифференциальные модели турбулентности с одним уравнением.

В алгебраических моделях турбулентная вязкость определяется алгебраической формулой, содержащей параметры потока, расстояние до стенки и т.д. В дифференциальных моделях для турбулентных характеристик (таких, как турбулентная вязкость, кинетическая энергия турбулентности и др.) записываются уравнения переноса.

Типичное уравнение переноса может быть записано в следующей форме:

Конвекция = Диффузия + Генерация - Диссипация

Движение любой физической величины в потоке жидкости или газа может быть описано при помощи уравнения переноса. Сложность состоит в конкретизации членов, стоящих в правой части. Так, например, что уравнения Навье-Стокса - это типичные уравнения переноса, градиент давления в них является генерационным членом. Искусство построения дифференциальных моделей состоит, во-первых, в выборе переменных, для которых записываются уравнения, а во-вторых, в удачном моделировании членов в правой части.

Дифференциальные модели свободны от основных недостатков, характерных для алгебраических моделей:

1. Они легко применимы к течениям в областях сложной геометрии (по крайней мере, при этом не возникает технических трудностей)
2. В них нет необходимости использовать параметры, характерные для пограничных слоев.
3. Они имеют «эффекты памяти» за счет конвективных и диффузионных членов в уравнениях переноса.

За эти достоинства приходится расплачиваться численным решением дополнительных уравнений, причем эти уравнения могут быть гораздо более неприятными с вычислительной точки зрения, чем уравнения Навье-Стокса.

Дифференциальные модели принято классифицировать по количеству уравнений переноса, входящих в них. Соответственно, наиболее простыми (с точки зрения количества уравнений) дифференциальными моделями являются модели с одним уравнением.

Модели с одним уравнением (как и алгебраические модели) служат для вычисления турбулентной вязкости и, как правило, не приспособлены для создания на их основе нелинейных моделей и моделей Рейнольдсовых напряжений (о причинах этого, а также об исключениях – несколько позже).

Модели с одним дифференциальным уравнением можно разделить на две категории. В моделях первой категории дифференциальное уравнение записано относительно турбулентной вязкости (или величины, напрямую связанной с ней), а в моделях второй категории – относительно других характеристик турбулентности.

С точки зрения «строгой» статистической науки турбулентная вязкость не является характеристикой турбулентности, как статистического явления. Поэтому построение моделей относительно турбулентной вязкости не очень корректно. С другой стороны, расчет турбулентной вязкости – это основной результат, который должна обеспечить модель турбулентности, использующая гипотезу Буссинеска. Если записывать уравнение переноса относительно других характеристик турбулентности, то необходимо привлечение неких алгебраических замыкающих соотношений для вычисления турбулентной вязкости (которые оказываются неуниверсальными), что заметно сужает область применимости модели и ее качество.

Кроме того, в случае определения только турбулентной вязкости не удастся использовать полную гипотезу Буссинеска $-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}$, а приходится довольствоваться ее упрощением $-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_T \cdot S_{ij}$

Опыт построения дифференциальных моделей с одним уравнением показал, что на практике модели относительно турбулентной вязкости предпочтительнее, чем другие модели. Наиболее удачные модели этой группы – это модели Спаларта-Аллмареса и Секундова, на которых остановимся подробнее.

Модель Спаларта-Аллмареса.

На примере этой модели разберем принципы и технологию построения современных моделей турбулентности. Модель строится последовательно, при этом на каждом следующем шаге расширяется набор течений, для которых она пригодна.

1. Свободная турбулентность (отсутствует влияние стенок).

Будем считать, что диссипация турбулентной вязкости происходит за счет влияния стенок. Кроме того, в свободной турбулентности при высоких числах Рейнольдса турбулентный перенос существенно превышает молекулярный, поэтому можно пренебречь молекулярной вязкостью.

Тогда уравнение переноса несколько упрощается:

КОНВЕКЦИЯ = ГЕНЕРАЦИЯ + ТУРБ. ДИФФУЗИЯ.

Генерация в свободных сдвиговых течениях пропорциональна $\partial U/\partial y$ [1/с]. Поскольку левая часть уравнения переноса турбулентной вязкости имеет размерность $[m^2/c^2]$, генерация (из соображений размерности) должна быть пропорциональна $v_t \frac{\partial U}{\partial y}$.

Для сохранения тензорной инвариантности производная скорости должна быть заменена на тензорный инвариант (либо S , либо ω). Изначально использовалась величина Sv_t . В процессе разработки модели оказалось, что в задачах внешней аэродинамики (для которых разрабатывалась эта модель) в окрестности лобовой точки ωv_t предпочтительнее чем Sv_t . Поэтому в качестве генерационного члена использовалась именно ωv_t , хотя в обозначениях осталось S .

$$\frac{Dv_t}{Dt} = C_{b1} S v_t$$

Вырождение однородной изотропной турбулентности ($v_t \sim t^{-0.2}$) не годится для калибровки константы, поскольку $S=0$. Поэтому калибровка проводилась на задаче вырождения турбулентности в поле однородного сдвига. Эксперимент и DNS дают значения 0.1-0.16, калибровка Спаларта – 0.13-0.14, однако в некоторых моделях (Секундов, Болдуин-Барс) значение этой константы достигает 0.2.

Диффузия. Классический оператор $\nabla \cdot (v_t/\sigma \nabla v_t)$ сохраняет интеграл от турбулентной вязкости. Однако это не обязательно, поскольку турбулентная вязкость не сохраняется по объему, как энергия. Авторами предложен вариант, сохраняющий $v_t^{1+C_{b2}}$. Можно показать, что в этом случае течения, в которых конвекция отрицательна, считаются плохо (например, круглая струя).

$$\frac{D\tilde{v}}{Dt} = C_{b1} S v_t + \frac{1}{\sigma} ([\nabla \cdot (v_t \nabla v_t)] + C_{b2} [(\nabla v_t) \cdot (\nabla v_t)])$$

Калибровка констант проводилась на свободных сдвиговых течениях. В силу специфики модели (внешние течения) предпочтение было отдано дальнему следу, поскольку при калибровке (в силу различий в структуре турбулентности между разными свободными сдвиговыми течениями) возникает конфликт. Так, при выбранных авторами константах коэффициент расширения плоской струи завышен на 38%. В результате калибровки был выбран следующий набор констант.

$$\sigma = \frac{2}{3}, C_{b1} = 0.1355, C_{b2} = 0.622$$

2. Пристенные высокорейнольдсовы течения (от логарифмической области и далее).

В этой области потока молекулярная вязкость также мала по сравнению с турбулентной, но добавляется диссипативный член, который отвечает за подавление турбулентности при приближении к стенке. Из соображений размерности он равен $-C_{w1}(v_t/d)^2$.

На логарифмическом участке профиля скорости для деформации и турбулентной вязкости верно $S = v^*/(\kappa d); v_t = v^* \kappa d$. Подставив эти зависимости в уравнение, получаем.

$$C_{w1} = C_{b1}/\kappa^2 + (1 + C_{b2})/\sigma$$

Однако в таком виде диссипативный член слишком медленно убывает во внешней области пограничного слоя. Для более интенсивного подавления диссипативного члена введена функция f_w .

$$\frac{D\tilde{v}}{Dt} = C_{b1}Sv_t + \frac{1}{\sigma}([\nabla \bullet (v_t \nabla v_t)] + C_{b2}[(\nabla v_t) \bullet (\nabla v_t)]) - C_{w1}f_w(v_t/d)^2$$

Для определения этой функции необходимо сформулировать ее аргумент, который будет «различать» логарифмический участок профиля скорости и внешнюю область.

$$\text{В качестве такой переменной авторами предложена величина } r = \left(\frac{l}{l_{mix}}\right)^2 = \frac{v_t}{S\kappa^2 d^2}.$$

Функция $f_w = f_w(r)$ предложена в следующем виде:

$$f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, g = r + C_{w2}(r^6 - r)$$

Эта функция равна 1 на логарифмическом участке профиля скорости, оказывается около 0.5 во внешней области пограничного слоя, и равна 0 – в свободных сдвиговых течениях.

Калибровка констант проводилась в пограничном слое на плоской пластине

$$C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2.$$

Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными и моделью Себеси-Смита ($C_f = 0.00262$ при $Re_0 = 10^4$). Интересно, что если по полученной турбулентной вязкости вычислить значение «константы» Клаузера, то ее максимальное значение окажется 0.021 вместо 0.168.

3. *Пристенные низкорейнольдсовы течения (от логарифмической области к стенке).*

Пока модель была настроена на логарифмический закон стенки, в котором $S = v^*/(\kappa d)$; $v_t = v^* \kappa d$. Однако, в вязком подслое и переходной области это не так. Есть два пути решения проблемы:

1. Ввести в уравнения дополнительные множители или слагаемые, в результате чего необходимая величина турбулентной вязкости станет решением дифференциального уравнения. Этот подход приводит к тому, что уравнения становятся гораздо хуже с вычислительной точки зрения.
2. Оставить уравнение «как есть» для некоторой переменной \tilde{v} , а по ее значению пересчитывать турбулентную вязкость. Именно этот подход применен в модели Спаларта-Аллмареса. Кроме того, оказалось, что в вязком подслое и переходной области необходимо увеличить генерацию турбулентности.

$$\frac{D\tilde{v}}{Dt} = \frac{1}{\sigma} [\nabla \cdot ((v + \tilde{v})\nabla\tilde{v})] + C_{b2} [(\nabla\tilde{v}) \cdot (\nabla\tilde{v})] + C_{b1}\tilde{S}\tilde{v} - C_{w1}f_w \left(\frac{\tilde{v}}{d}\right)^2$$

$$v_t = f_{v1}\tilde{v}, f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \chi = \frac{\tilde{v}}{v}$$

$$\tilde{S} = \Omega + f_{v2} \frac{\tilde{v}}{\kappa^2 d^2}, f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$$

4. *Ламинарно-турбулентный переход.*

1. Проблема описания перехода

Как правило, ламинарно-турбулентный переход развивается по следующему сценарию. Ламинарное течение становится неустойчивым. С этого момента возмущения определенного типа начинают постепенно нарастать. Когда амплитуда возмущений достигает определенного уровня, турбулентный перенос становится соизмеримым с молекулярным, что приводит к перестройке профилей скорости. Процесс перестройки профиля также занимает определенное время, за которое поток успевает пройти некоторое расстояние. Эта область называется областью перехода. Обычно область перехода не очень протяженная, поэтому принято говорить о точке перехода. Исходя из вышеизложенного сценария положение точки перехода определяется следующим факторами.

1. Положением точки потери устойчивости
2. Начальной амплитудой возмущений
3. Скоростью роста этих возмущений

Очевидно, что на эти факторы могут существенно влиять различные внешние воздействия такие как

1. Уровень внешней турбулентности.
2. Градиенты давления и отрывы
3. Эффекты сжимаемости (чисел Маха)
4. Влияние линейного масштаба турбулентности (характерных линейных масштабов внешних возмущений)

5. Шероховатость
6. Эффекты кривизны

С точки зрения описания турбулентности в рамках RANS, любая дифференциальная модель турбулентности при низком уровне турбулентности во внешнем потоке практически всегда имеет два решения, одно из которых практически ламинарное (с очень низкой турбулентной вязкостью), а второе турбулентное. Так, в рассматриваемой модели Спаларта-Аллмареса величина $\check{\nu}$ входит множителем во все слагаемые в правой части. Поэтому это уравнение всегда имеет тривиальное (нулевое) решение. Таким образом, расчет ламинарных течений при «включенной» модели не составляет трудностей.

Проблема описания перехода в рамках RANS состоит в «перескоке» с одной ветки решения на другую и является одной из наиболее трудно моделируемых проблем. Саму проблему можно разделить на две части.

1. Определение места перехода (где?)
2. Осуществление самого перехода (как?)

В большинстве задач переход происходит в пограничном слое, поэтому, как правило, задача сводится к определению точки перехода в пограничном слое. В пограничном слое принято выделять естественный, байпасный и вынужденный переход. В первом случае, характерном для задач внешнего обтекания переход происходит за счет естественного развития возмущений в неустойчивом ламинарном пограничном слое. Во втором, характерном для внутренних задач, в неустойчивый пограничный слой вносятся возмущения с внешней границы пограничного слоя. При этом переход происходит несколько раньше, чем в случае естественного перехода. Наконец, при вынужденном переходе в неустойчивый пограничный слой вносятся возмущения при помощи турбулизаторов (нитка, бугорок, шероховатость), что обычно приводит к немедленной его турбулизации.

2. Определение точки перехода

1. Предписанный переход. Точка перехода определяется из общих соображений или из эксперимента. Тем более, что в экспериментах часто используются турбулизаторы.
2. Спонтанный переход. Можно попробовать построить такие демпфирующие функции в низкорейнольдсовой модели турбулентности, чтобы спонтанный переход осуществлялся в правильном месте. Существует несколько попыток реализовать эту идею (в частности, Wilcox), однако больших успехов достигнуто не было по двум причинам. Во-первых, трудно (или даже невозможно) построить универсальную функцию откалиброванную и на демпфирование в вязком подслое и переходной области, и на переход, поскольку эти процессы по-разному реагируют на внешние факторы (см. выше). Во-вторых, спонтанный переход очень чувствителен к используемым схемам и сеткам.
3. Определение точки перехода из свойств пограничного слоя. Один из подобных подходов был разработан Drila, он требует интегрирования характеристик пограничного слоя вдоль поверхности и на основе этих интегралов определяется точка перехода.

$$n = \int_{Re_{0,0}}^{Re_0} \frac{dn}{d Re_0} d Re_0$$

$$\log_{10}(Re_{0,0}) = \left[\frac{1.415}{H-1} - 0.489 \right] \cdot \tanh\left(\frac{20}{H-1} - 12.9\right) + \frac{3.295}{H-1} + 0.44$$

$$\frac{dn}{d Re_0} = 0.01 \cdot \sqrt{0.25 + (2.4 \cdot H - 3.7 + 2.5 \cdot \tanh(1.5 \cdot H - 4.65))^2}$$

Переход осуществляется когда n (логарифм амплитуды наиболее неустойчивых колебаний) достигает значения 9.

Для получения аппроксимаций (1) Drela проанализировал устойчивость семейства автомодельных пограничных слоев Фолкнера-Скэн при помощи уравнений Оппа-Зоммерфельда. Он обнаружил, что при каждом конкретном значении параметра β (которому соответствует постоянное значение формпараметра H) скорость роста n от Re_0 практически постоянна. Это позволило ограничиться аппроксимацией двух величин - начала неустойчивости и скорости роста n .

Благодаря использованию параметров пограничного слоя (H и Re_0) реализация подхода Drela в NS солвере сильно затруднена, его использование требует ручного вмешательства и практически не поддается автоматизации. При использовании параллельных или неструктурных кодов эта проблема практически неразрешима, поскольку в них могут отсутствовать линии сетки, направленные по нормали к стенке.

4. Создание локальных дифференциальных уравнений перехода. Основной проблемой в такого рода подходах является требование локальности, поскольку неустойчивость является не локальным свойством, свойством течения в целом. Известно несколько попыток создания дифференциальных моделей, описывающих переход. Все они далеки от совершенства и универсальности, наиболее удачной из них, скорее всего, можно считать модель перехода, разработанную Ментером для внутренних течений. В этой модели два дифференциальных уравнения (первое уравнение относительно перемежаемости, а второе – относительно локального числа Рейнольдса перехода к турбулентности). Хотя опубликованная версия модели недостаточна для воспроизведения, по результатам Ментера она работает очень хорошо.

3. Осуществление перехода

Технически переход осуществляется при помощи введения в окрестности точки перехода дополнительного генерационного члена, не имеющего физического смысла, а призванного «столкнуть» решение с ламинарной ветви на турбулентную. Также важно предотвратить спонтанный переход, поскольку его местоположение зависит не от свойств течения, а от численной реализации (схема, сетка и т.д.)

В модели Спаларта-Аллмареса эта идея была использована впервые и реализована следующим образом (trip-term).

$$f_{t1} = C_{t1} g_t \exp\left(-C_{t2} \frac{\omega_t^2}{\Delta U^2} (d^2 + g_t^2 d_t^2)\right), f_{t2} = C_{t3} \cdot \exp(-C_{t4} \chi^2)$$

$$g_t = \min(0.1, \Delta U / \omega_t \cdot \Delta x), \omega_t = \Omega_{w,trip}$$

$$d_t^2 = (z - z_{trip})^2 + (y - y_{trip})^2 + (x - x_{trip})^2, \Delta U = |u - U_{trip}|$$

Константы модели подбирались таким образом, чтобы в пограничном слое на плоской пластине зависимость $C_f(x)$ совпадала с экспериментальной. Следует отметить, что вторая функция служит для подавления спонтанного перехода, который также крайне нежелателен из-за своей чувствительности к сетке, схеме и т.п.

Предложенная функция перехода может быть адаптирована к различным моделям (как с одним, так и с двумя уравнениями). Для этого в уравнение для турбулентной вязкости или для кинетической энергии турбулентности добавляется функция f_{11} , умноженная на соответствующие величины для сохранения размерности.

Для контроля перехода Спалартом был придуман так называемый индекс перехода $i_t = \frac{1}{kv^*} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}$, который равен 1 для турбулентных пограничных слоев и равен 0 для ламинарных.

Иногда, в случае незначительной доли ламинарных участков, используют fully turbulence подход. Для этого на внешней (и входной) границе задают сравнительно высокий уровень турбулентной вязкости (от 1 до 10), что приводит к турбуликации пограничного слоя от самого начала.

Кроме того, существует целый ряд задач, в которых турбулизация происходит после ламинарного отрыва. Для этих течений применима trip-less технология, идея которой состоит в том, что если зона отрыва «заражена» турбулентностью, то эта турбулентность не вымывается из нее при помощи конвекции. Технически, это делается в два этапа. На первом этапе проводится fully turbulence расчет, а на втором на внешней и входной границах задается низкий уровень турбулентной вязкости. Через некоторое время вязкость «вымывается» из пограничного слоя до точки отрыва, а далее турбулированная зона отрыва при помощи конвекции и диффузии является источником турбулентности.

4. Обратный переход (реламинаризация)

Затронув тему перехода нельзя не упомянуть обратный переход от турбулентной формы течения к ламинарной.

Феномен обратного перехода исследован несколько хуже в первую очередь потому, что он встречается существенно реже. Обычно под реламинаризацией понимают ситуацию, в которой форма профиля скорости в ТПС под влиянием внешнего воздействия (градиент давления, отсос, кривизна поверхности) становится близкой к форме профиля скорости в ламинарном ПС. Этот факт, вообще говоря, не обязательно означает отсутствие турбулентных пульсаций в ПС. Поэтому часто эти понятия разделяют, говоря об обратном переходе (реверсе перехода) в том случае, когда поток становится действительно ламинарным.

Причиной ламинаризации профиля скорости может стать, например, сильное ускорение потока. Эксперименты показывают, что зачастую амплитуда турбулентных пульсаций при этом не изменяется (хотя уровень турбулентности падает из-за ускорения основного потока). Искажение профиля скорости при этом происходит из-за влияния градиента давления на форму профиля реинольдсовых напряжения и осредненной скорости.

При реверсе перехода в первую очередь происходит повышение устойчивости осредненного течения. Это приводит к уменьшению генерации турбулентности и,

соответственно, к уменьшению амплитуды турбулентных пульсаций. Для получения полностью ламинарного потока необходимо, чтобы все турбулентные вихри передали свою энергию в тепло через каскадный перенос. В некотором роде этот процесс аналогичен вырождению однородной изотропной турбулентности и довольно продолжителен по времени.

На первый взгляд проблема моделирования течений с реверсом перехода не должна быть неразрешимой. При соответствующих условиях модельная генерация турбулентности должна уменьшаться и ее уровень должен падать. На практике ни одна из моделей турбулентности не в состоянии правильно описать реламинаризацию. По-видимому причина в том, что модельные уравнения не реагируют должным образом на изменение параметров течения, поскольку при условиях близких к точке потери устойчивости это влияние оказывается очень нелинейным.

Окончательная формулировка модели

В итоге, с учетом всех поправок модель Спаларта-Аллмареса приобретает следующий вид.

Дифференциальное уравнение в этой модели составлено относительно \tilde{v} .

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{v}}{Dt} = \frac{1}{\sigma} & \left([\nabla \cdot ((v + \tilde{v})\nabla\tilde{v})] + C_{b2} [(\nabla\tilde{v}) \cdot (\nabla\tilde{v})] \right) + \\ & + C_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\tilde{v} - \left(C_{w1}f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2}f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{v}}{d} \right)^2 + f_{t1}\Delta U^2 \end{aligned}$$

В этом уравнении:

$$v_t = f_{v1}\tilde{v}, f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \chi = \frac{\tilde{v}}{\nu},$$

$$\tilde{S} = \Omega + f_{v2} \frac{\tilde{v}}{\kappa^2 d^2}, f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}},$$

$$f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, g = r + C_{w2}(r^6 - r), r = \frac{\tilde{v}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2}$$

Иницирующая ламинарно-турбулентный переход функция trip-term:

$$f_{t1} = C_{t1}g_t \exp\left(-C_{t2} \frac{\omega_t^2}{\Delta U^2} (d^2 + g_t^2 d_t^2)\right), f_{t2} = C_{t3} \cdot \exp(-C_{t4}\chi^2),$$

$$g_t = \min(0.1, \Delta U / \omega_t \cdot \Delta x), \omega_t = \Omega_{w,trip},$$

$$d_t^2 = (z - z_{trip})^2 + (y - y_{trip})^2 + (x - x_{trip})^2, \Delta U = |u - U_{trip}|.$$

Константы модели:

$$\sigma = 2/3, \kappa = 0.41, C_{b1} = 0.1355, C_{b2} = 0.622,$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma}, C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2, C_{v1} = 7.1,$$

$$C_{t1} = 1, C_{t2} = 2, C_{t3} = 1.2, C_{t4} = 0.5.$$

Граничные условия

Часто при решении различных задач необходимо поставить граничное условие для турбулентной вязкости во внешнем потоке. Этот внешний поток, как правило, характеризуется уровнем турбулентности $Tu = \frac{\sqrt{k}}{U_e}$. Для задач внешней аэродинамики эта величина очень мала, для внутренних задач существенно зависит от предыстории потока. Эта величина позволяет определить кинетическую энергию k , но не турбулентную вязкость ν_T .

Принято делить внешний поток на "ламинарный" и "турбулентный". В первом случае, как правило, задают заведомо низкий уровень турбулентной вязкости, например, $\nu_T = 10^{-3}\nu$. Во втором – уровень достаточный для турбулизации пристенных пограничных слоев. Этот уровень зависит от используемого кода, сетки и т.п. и меняется в пределах $\nu_T = [1 \div 10] \cdot \nu$. Часто пользуются "научным" способом постановки граничных условий $\frac{\nu_T}{\nu} = Tu$, но следует помнить, что этот способ имеет реальный смысл только в предельных случаях – "ламинарном" и "турбулентном".

Модификации модели Спаларта-Аллмареса

1. Течения с кривизной и вращением.

Известно, что кривизна линий тока или движение во вращающейся системе координат могут привести к интенсификации или подавлению турбулентных пульсаций. Это происходит потому, что в одних случаях кривизна линий тока или вращение дестабилизирует, а в других стабилизирует течение (например – кривой канал). Для того чтобы модели турбулентности описывали подобные явления, необходимо вводить специальные поправки.

Одним из первых к этой проблеме обратился Launder. Он предложил поправку для k - ϵ моделей, в которой введен дополнительный множитель f_r перед диссипацией в уравнении для ϵ и определил эту функцию для сдвиговых течений.

$$f_r = 1 - C_{\epsilon 3} Ri_g, Ri_g = \frac{k^2 U}{\epsilon^2 R^2} \frac{\partial(RU)}{\partial y}$$

Роди предложил альтернативный подход, состоящий в домножении генерационного члена в уравнении для диссипации на функцию

$$f_p = 1 + C_{\epsilon 3} Ri_f, Ri_f = \frac{2\nu_t U}{P_k} \frac{\partial(U/R)}{\partial y}$$

Обе эти поправки основаны на оценке расстояния до центра вихря и применимы только к простым ситуациям.

Основная трудность при создании подобных поправок состоит в определении параметров, количественно определяющих кривизну линий тока. Если в двумерном случае эта задача относительно легко решается, то в трехмерном возникают большие трудности.

Одной из наиболее удачных поправок, применимых в произвольном трехмерном случае является поправка (Burg, Menter, Grotjans, Frühauf, 1998):

$$f_r = 1 + C_c C_{u_T}, C_{u_T} = C_{\text{lim}} \cdot th \left(\frac{1}{C_{\text{lim}}} \frac{k^2 S^2 - \Omega^2}{\varepsilon^2} \right)$$

$$C_c = 0.2, C_{\text{lim}} = 2.$$

Для простейшего сдвигового течения с продольной кривизной аргумент гиперболического тангенса очень похож на турбулентное число Ричардсона, предложенное Лаундером.

$$C_{u_T} = C_{\text{lim}} \cdot th \left(\frac{1}{C_{\text{lim}}} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

Наиболее успешной оказалась вращательная поправка к модели Спаларта-Аллмареса, однако и она неидеальна (особенно в случае значительных вращений или существенной кривизны).

В этой поправке используется два параметра, первый из которых может быть связан с поправкой Ментера, а второй является абсолютно новым

$$r^* = \left| \frac{S}{\Omega} \right|, \tilde{r} = \frac{-\varepsilon_{ijk} \cdot \Omega_i \cdot S_{jk} \cdot (DS/Dt)_{ij}}{D^4}, D^2 = \frac{(S^2 + \Omega^2)}{2}$$

Непосредственно в самой модели генерационный член умножается на функцию f_{r1} , которая подбиралась из следующих соображений

Представим функцию f_{r1} в следующем виде

$$f_{r1}(r^*, \tilde{r}) = A \cdot f_1(r^*) \cdot [1 - f_2(\tilde{r})] + B$$

1. Чистое вращение (вихрь) $f_{r1}(0, \tilde{r}) = const = -C_{r1} \Rightarrow f_1(0) = 0 \Rightarrow B = -C_{r1}$.
2. Сдвиговые течения $f_{r1}(1, 0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} f_1(1) = 1 \\ f_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 1 + C_{r1}$.
3. Слабое вращение $\begin{cases} r^* \approx 1 \\ \tilde{r} \ll 1 \end{cases}; F_{r1}(1, \tilde{r}) \approx 1 - C_{r5} \tilde{r}; C_{r5} = 24 \Rightarrow f_2'(0) = \frac{C_{r5}}{1 + C_{r1}}$
4. Ограничение по r^* $f_1(r^*) \xrightarrow{r^* \rightarrow \infty} const = C_{r4}; C_{r4} = 2$
5. Ограничение по \tilde{r} $f_2(\tilde{r}) \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow \pm\infty} const = C_{r3}$

Этим ограничениям удовлетворяет функция вида

$$f_{r1}(r^*, \tilde{r}) = (1 + C_{r1}) \cdot \frac{C_{r4} r^*}{C_{r4} - 1 + r^*} \cdot \left[1 - C_{r3} \arctg \left(\frac{C_{r5} \tilde{r}}{(1 + C_{r1}) C_{r3}} \right) \right] - C_{r1}$$

Подставив C_{r4} и введя $C_{r2} = \frac{C_{r5}}{(1 + C_{r1}) C_{r3}}$ получим окончательную формулировку

поправки

$$f_{r1} = \frac{2r^*(1 + C_{r1})}{1 + r^*} (1 - C_{r3} \arctg(C_{r2} \tilde{r})) - C_{r1},$$

Константы в этой функции подбирались на основе расчетов течения во вращающемся канале и пограничном слое с продольной кривизной поверхности.

$$C_{r1} = 1, C_{r2} = 12, C_{r3} = 1.$$

По результатам расчетов модель Спаларта-Аллмареса с предложенной поправкой оказывается заметно лучше других моделей для расчета течений с существенной кривизной линий тока и вращением.

2. Модификация демпфирующих функций (f_{v3} версия модели).

В ряде случаев использование стандартного набора демпфирующих функций приводит к отрицательному (очень маленькому по модулю) значению $\tilde{\nu}$ вблизи стенки. Хотя это легко можно исправить, ограничивая $\tilde{\nu}$, была сделана попытка модификации демпфирующих функций, которая обеспечивает неотрицательные значения $\tilde{\nu}$. Однако эта модификация привела к чрезмерному затягиванию области перехода (что иногда хорошо, а иногда плохо)

$$\tilde{S} = f_{v3}\Omega + f_{v2} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2}, f_{v2} = \left(1 + \frac{\chi}{C_{v2}}\right)^{-3}, f_{v3} = \frac{(1 + \chi \cdot f_{v1})(1 - f_{v2})}{\chi}$$

3. Поправка на сжимаемость

По аналогии с моделью Секундова (о ней позже) введено дополнительное слагаемое, учитывающее эффекты сжимаемости $-C_5 \frac{v_T^2 S^2}{a^2}$, $C_5=3.5$

4. Учет шероховатости стенки

Большинство реально обтекаемых поверхностей не являются идеально гладкими. Причем оказывается, что даже очень небольшие неровности поверхности могут сильно повлиять на сопротивление обтекаемых тел. Первой проблемой, с которой ученые столкнулись при изучении шероховатости, было многообразие форм неровностей. Для решения этой проблемы была придумана некая идеальная «модельная» шероховатость. При рассмотрении конкретной шероховатости ей в соответствие ставилась «эквивалентная» модельная шероховатость с высотой бугорков k_s . На практике наиболее объективным безразмерным параметром, характеризующим шероховатость, является величина $k_s^+ = \frac{k_s v^*}{\nu}$.

Шероховатость может влиять на турбулентный пограничный слой двумя способами: сдвигать переход и влиять на слой целиком.

При рассмотрении влияния шероховатости на переход в качестве «модельной» шероховатости выступает так называемая цилиндрическая шероховатость (цилиндр, лежащий поперек потока). Можно разделить три различные ситуации:

1. Шероховатость не влияет на переход. Это происходит при высоте бугорков песочной шероховатости $k_s^+ \leq 7$.
2. Переход сдвигается к ближе шероховатости, но не достигает ее.
3. Переход происходит прямо на шероховатости. Это происходит, когда высота бугорков превышает критическую высоту шероховатости $k_s^+ \approx 15 \div 20$.

При рассмотрении шероховатых поверхностей «модельной» является так называемая песочная шероховатость. В этом случае также выделяют три режима.

1. Режим без проявления влияния шероховатости на сопротивление и профиль скорости (высот бугорков меньше допустимой высоты шероховатости $k_s^+ \leq 5$). Сопротивление соответствует сопротивлению гладкой поверхности.
2. Переходный режим. Часть элементов шероховатости выступает из вязкого подслоя. Сопротивление складывается из сопротивления гладкой поверхности и выступающих элементов шероховатости.
3. Полное проявление шероховатости $k_s^+ > 70$. Все элементы шероховатости выступают из вязкого подслоя. Сопротивление полностью определяется сопротивлением выступающих элементов шероховатости.

Следует отметить, что с ростом высоты элементов шероховатости изменяется закон стенки, при сохранении угла наклона величина B уменьшается. Поскольку и низкорейнольдсовы модели турбулентности и пристенные функции (они будут подробно рассмотрены в разделе, посвященном $k-\varepsilon$ моделям) настроены на «гладкий» закон стенки, оба подхода требуют модификации при обтекании шероховатых поверхностей.

Учет шероховатости при использовании пристенных функций производится путем коррекции закона стенки в соответствии с высотой эквивалентной песочной шероховатости.

В низкорейнольдсовых моделях эта проблема решается более сложным образом (как правило, через модификацию расстояния до стенки). Так, например, в модели SA

$$d = d_{\min} + 0.03k_s$$

кроме того, изменяются граничные условия

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = \frac{\tilde{v}}{d}$$

и демпфирующие функции

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = \frac{\tilde{v}}{d}, \chi = \frac{\tilde{v}}{v} + C_{r1} \frac{k_s}{d}, f_{v2} = 1 - \frac{\frac{\tilde{v}}{v}}{1 + \frac{\tilde{v}}{v} f_{v1}}, C_{r1} = 0.5$$

5. Нелинейная версия модели

Во многих задачах не удается получить хорошего решения при помощи моделей турбулентной вязкости потому, что в них не выполняется гипотеза Буссинеска.

При использовании одного дифференциального уравнения для турбулентной вязкости возникают сложности при создании нелинейных альтернатив гипотезе Буссинеска. Причина этих сложностей состоит в том, что такие модели не позволяют определить характерный временной масштаб турбулентности для обезразмеривания тензоров скоростей деформации и завихренности (а это необходимо из соображений размерности).

Спалартом была сделана попытка сформулировать нелинейную модель следующим образом

$$(\tau_{NL})_{ij} = \tau_{ij} - C_{NL} (\Omega_{ik} \tau_{jk} + \Omega_{jk} \tau_{ik}).$$

Здесь τ_{NL} – искомый (нелинейный) тензор рейнольдсовых напряжений, τ – тензор рейнольдсовых напряжений, определяемый с помощью классической линейной гипотезы

Буссинеска ($\tau_{ij} = -2\nu_t S_{ij}$), ν_t – турбулентная вязкость, Ω_{ik} – нормированный тензор завихренности $\Omega_{ik} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) / \sqrt{\frac{\partial u_m}{\partial x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}}$, а C_{NL} – эмпирическая константа равная 0.3.

Опыт расчетов показал, что эта модель, хотя и качественно описывает нелинейные эффекты, но в целом улучшение не стоит тех дополнительных вычислительных затрат, которые при этом требуются (хотя иногда это может быть не так)

6. Попытка удовлетворить принципу реализуемости

Нормальные компоненты тензора Рейнольдсовых напряжений по пределения должны быть неотрицательными в любой системе координат. Математически это можно сформулировать так (принцип реализуемости Ламли) $\overline{u_i'^2} \geq 0, \overline{u_i'^2} \cdot \overline{u_j'^2} \geq (\overline{u_i' u_j'})^2, \det\{\overline{u_i' u_j'}\} \geq 0$

Однако в случае использования упрощенной гипотезы Буссинеска $-\overline{u_i' u_j'} = 2\nu_T \cdot S_{ij}$ сумма нормальных компонент тензора Рейнольдсовых напряжений оказывается равной нулю $-\overline{u_i' u_i'} = 2\nu_T \cdot S_{ii} = 2\nu_T \cdot \text{div}(\vec{V}) = 0$. Из этого следует, что в этом случае принцип реализуемости автоматически не выполняется. Спаларт сделал модификацию модели для двумерного случая, которая обеспечивает выполнение принципа реализуемости в двумерном случае.

$$\begin{aligned} (\tau_{ii})_R &= \tau_{ii} + [(\tau_{ii} - \tau_{jj})^2 + 4\tau_{ij}^2]^{0.5} \\ (\tau_{jj})_R &= \tau_{jj} + [(\tau_{ii} - \tau_{jj})^2 + 4\tau_{ij}^2]^{0.5} \\ (\tau_{ij})_R &= \tau_{ij} \end{aligned}$$

Как показали расчеты, применение этой поправки практически не сказывается на решении (несколько меняется только поле давления). Кроме того, неочевидно как обобщить эту поправку на трехмерный случай.

Заключение

Таким образом, модель Спаларта-Аллмареса оказалась одной из наиболее удачных моделей турбулентности, пригодной для расчета широкого круга течений. Причины такого успеха, по-видимому, кроются в следующем

1. Направленность на решение типичных прикладных задач, в первую очередь создавался и совершенствовался инструмент для расчетов.
2. Большой объем вложенного труда. Тестирование и калибровка осуществлялись на широком круге задач, что позволило существенно повысить универсальность модели.

Модель Секундова $\nu_T - 92$.

Как и в модели Спаларта-Аллмареса, дифференциальное уравнение в этой модели записано относительно турбулентной вязкости, однако принципы построения модели в данном случае совершенно иные. Остановимся подробнее на методике построения этой модели

Генерационные члены

Будем считать, что генерационные члены в уравнении для турбулентной вязкости зависят от первых и вторых производных скорости и турбулентной вязкости.

$$\Gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial y}, \Gamma_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \Gamma_1 = \frac{\partial v_T}{\partial y}, \Gamma_2 = \frac{\partial^2 v_T}{\partial y^2},$$

В трехмерном случае эти величины могут быть обобщены следующим образом

$$\Gamma_1 = S, \Gamma_2 = [(\nabla \cdot \nabla V) \cdot (\nabla \cdot \nabla V)]^{0.5},$$

$$N_1 = [\nabla v_T \cdot \nabla v_T]^{0.5}, N_2 = [\nabla N_1 \cdot \nabla N_1]^{0.5},$$

Следует отметить, что это не единственный способ обобщения. Например, $\frac{\partial u}{\partial y}$

можно заменить на завихренность Ω как и в модели Спаларта-Аллмареса.

Левая часть уравнения переноса для турбулентной вязкости имеет размерность

$$\frac{Dv_T}{Dt} \left[\frac{m^2}{s^2} \right].$$

Из соображений подобия и размерности можно сформулировать пять независимых членов той же размерности (также следует отметить, что это можно сделать неединственным образом).

$$P_1 = N_1^2$$

$$P_2 = v_t \Gamma_1$$

$$P_3 = \frac{v_t^{1.5} \Gamma_2}{\Gamma_1^{0.5}}$$

$$P_4 = v_t \Delta v_t$$

$$P_5 = v_t N_2$$

Во избежание сингулярности в случае нулевой деформации заменим

$$P_3 = \frac{v_t^{1.5} \Gamma_2}{\Gamma_1^{0.5}} \Rightarrow P_2^{1/3} P_3^{2/3} = v_t^{4/3} \Gamma_2^{2/3}.$$

Связь генерации и диффузии

Рассмотрим стандартный диффузионный член для турбулентной вязкости

$$\nabla \cdot (C v_T \nabla v_T) = C v_T (\nabla \cdot \nabla v_T) + C \nabla v_T \cdot \nabla v_T = C(P_1 + P_4).$$

Таким образом, можно сказать P_1 и P_4 не являются независимыми составляющими генерационного члена, а связаны с диффузией.

Передача энергии от осредненного потока

Динамическая (зависящая от производных скорости) составляющая генерационного члена предлагается в следующем виде:

$$P_u = P_2 + A_1 P_3 = v_t \Gamma_1 + A_1 v_t^{4/3} \Gamma_2^{2/3}.$$

Видно, что наряду с традиционной для полуэмпирических моделей зависимостью от первой производной в этой модели предложена также зависимость от второй производной. Однако, как показали численные эксперименты, такой генерации

оказывается недостаточно для хорошего описания профиля турбулентной вязкости в слоях смешения, поэтому добавляется еще одно слагаемое вида $A_2\sqrt{P_1P_2}$:

$$P_u = v_T\Gamma_1 + A_1v_T^{4/3}\Gamma_2^{2/3} + A_2N_1((v + v_T)\Gamma_1)^{1/2}.$$

Следует отметить, что нет прямого доказательства влияния второй производной скорости на генерацию, однако есть косвенные свидетельства этого. При наличии благоприятного градиента давления профиль становится более заполненным, увеличивается вторая производная (радиус кривизны профиля). В то же время, чем больше по модулю благоприятный градиент давления, тем более стабильным становится пограничный слой. Иными словами, с ростом Γ_2 генерация должна несколько уменьшаться, соответственно $A_1 < 0$.

Проблема универсального описания свободных сдвиговых течений.

В свободных сдвиговых течениях турбулентный перенос в значительной степени осуществляется крупномасштабной турбулентностью (когерентными структурами). Так, первые 2-3 низкочастотные крупномасштабные моды определяют 60-70 % турбулентных напряжений. Поскольку когерентные структуры в плоском и осесимметричном случае отличаются (в силу отличия механизмов неустойчивости), возникает проблема калибровки модели для качественного расчета плоской и осесимметричной струй. Сходные проблемы возникают в следе, но там когерентные структуры, кроме осесимметричности, существенно зависят от формы тела (остроты задней кромки).

Для учета осесимметричности течения необходимо сформулировать некий критерий осесимметричности. А.Н. Секундов предложил следующий способ определения этого критерия.

Рассмотрим две поверхности, проходящие через заданную точку: $vt = \text{const}$ и плоскость, образованную векторами $\text{grad}(v_t)$ и $\text{rot}(\vec{V})$. Локальный радиус кривизны линии, являющейся пересечением этих поверхностей, определяет расстояние от оси симметрии до заданной точки, т. е. является критерием осесимметричности. На основе радиус кривизны r можно сформулировать безразмерный критерий осесимметричности течения $\frac{v_t}{N_1 r}$.

В рассматриваемой модели для учета осесимметричности используется комбинация членов вида P_5 и P_4 ($P_a = C_3 v_T (\Delta v_t + N_2)$). Можно считать, что критерием осесимметричности в рассматриваемой модели является отношение P_a к основной части

$$P_u, \text{ или } Q = \frac{P_a}{v_T \Gamma_1} = \frac{P_4 + P_5}{P_1}.$$

Можно показать, что в плоском случае

$$Q = \frac{v_t (\nabla \cdot \nabla v_t + N_2)}{N_1^2} \rightarrow 0,$$

а в осесимметричном

$$Q = \frac{v_t (\nabla \cdot \nabla v_t + N_2)}{N_1^2} \rightarrow -\frac{v_t}{N_1 r}$$

Диффузия

Как и в модели Спалатра-Аллмареса и диффузионный член не сохраняет интеграл от турбулентной вязкости по пространству.

$$\nabla \cdot [\rho(C_0 v_T + v) \nabla v_T] + \nabla \cdot (\rho((C_1 - C_0)v_T - v)) \cdot \nabla v_T$$

С учетом слагаемого P_4 , добавляющегося в поправке на осесимметричность

$$\rho C_3 v_t (\nabla \cdot \nabla v_t)$$

он может быть представлен в следующем виде

$$\rho((C_0 + C_3)v_T + v) \cdot (\nabla \cdot \nabla v_T) + C_1 \nabla(\rho v_T) \cdot \nabla v_T$$

Эффекты сжимаемости

До сих пор мы, как правило, рассматривали течения несжимаемой жидкости, более того при калибровке констант моделей турбулентности в основном использовались именно такие течения. Возникают обоснованные опасения в применимости таких моделей к расчету сжимаемых течений. Эффекты сжимаемости (переменной плотности) могут быть существенными либо в случае больших чисел Маха (при $M=0.1$ влияние сжимаемости составляет около 1%), либо в случае сильной неизоэнтропичности.

К счастью, оказалось, что эффекты сжимаемости не очень сильно влияют на характеристики турбулентности. Это позволило применять обычные модели турбулентности к сжимаемым течениям без существенных модификаций.

Для течений при умеренных числах Маха (до 5) иногда пользуются так называемой гипотезой Морковина, согласно которой в этой ситуации можно пренебречь пульсациями плотности. При использовании этой гипотезы уравнения для турбулентных характеристик остаются без изменений (за исключением появления плотности внутри конвективных членов).

В сжимаемом за счет высокого числа Маха пограничном слое наблюдается незначительное изменение закона стенки, которое приводит к небольшому изменению интегральных толщин. Существует корреляция динамической скорости (и, соответственно, закона стенки) сжимаемого адиабатического пограничного слоя и несжимаемого пограничного слоя (Van Driest, 1951).

$$\frac{u^*}{U_\infty} = \frac{1}{A} \sin^{-1} \left(A \frac{\tilde{u}}{U_\infty} \right), A^2 = \frac{(\gamma-1)}{2} M_\infty^2 \frac{\tilde{T}_\infty}{\tilde{T}_w}$$

Здесь, "волна" относится к сжимаемому слою, а "звездочка" – к несжимаемому.

Однако в сжимаемых неизоэнтропических слоях эта корреляция плохо работает.

В случае сжимаемых течений вместо осреднения по Рейнольдсу используется осреднение по Фавру. При учете влияния эффектов сжимаемости на турбулентность надо принять во внимание два обстоятельства, вытекающие из использования осреднения по Фавру.

Во-первых, дивергенция осредненной по Фавру скорости не равна нулю

$$\nabla \cdot \bar{V} \neq 0$$

Во-вторых, в осредненном по Фавру уравнении для кинетической энергии турбулентности появляются два дополнительных слагаемых: $-\bar{u}_i'' \frac{\partial P}{\partial x_i} + \overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}$. Эти

слагаемые принято называть работа давления и давление-растяжение. С физической точки зрения первое слагаемое отвечает за генерацию турбулентности за счет сил плавучести (быстрая деформация), а второе – за работу сил давления (скоростная сжимаемость).

Соответственно можно выделить два механизма влияния сжимаемости на турбулентность: первый механизм связан с нарушением дивергентности поля скорости при быстрой деформации, а второй - непосредственно с изменением амплитуды турбулентных пульсаций при сжатии (расширении) потока.

Первый механизм в рамках рассматриваемой модели описывается следующим выражением $v_T(\nabla \cdot \bar{V}_R + |\nabla \cdot \bar{V}_R|)$, причем дивергенция берется от осредненной по Рейнольдсу скорости \bar{V}_R . Поскольку осредненная по Рейнольдсу скорость неизвестна при осреднении по Фавру, дивергенция может быть приближенно представлена в следующем виде.

$$\nabla \cdot \bar{V}_R \approx \nabla \cdot \bar{V} + \text{div} \left(\frac{v_T}{\rho \text{Pr}_T} \text{grad} \rho \right)$$

При определении турбулентного числа Прандтля возникают некоторые сложности, поскольку в пограничном слое его значение около 0.87, а в слое смешения 0.7.

Для моделирования второго механизма используется слагаемое $\rho C_5 \frac{v_T^2 \Gamma_1^2}{a^2}$. Эта поправка оказалась довольно удачной для расчета сверхзвуковых течений при больших и умеренных числах Маха. Она успешно применялась и в других моделях турбулентности (например, модель Спаларта-Аллмареса, см. рис. 20).

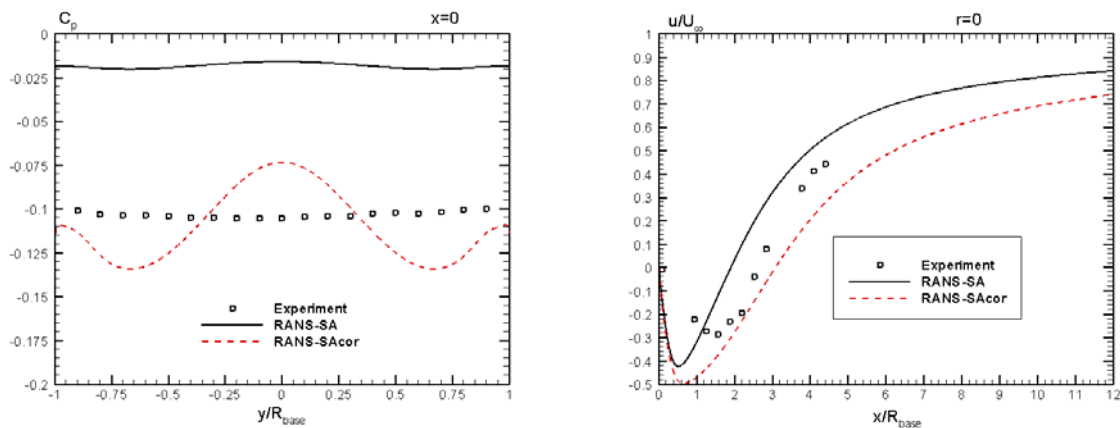


Рис. 20 Результаты расчета сверхзвукового ($M=2.54$) обтекания донной области круглого цилиндра (ракеты) при помощи модели Спаларта-Аллмареса с поправкой и без нее.

Демпфирующие функции

В отличие от модели Спаларта-Аллмареса, демпфирующие функции F_1 и F_2 в этой модели введены прямо в уравнение.

$$F_1 = \frac{N_1 d_w + 0.4 C_8 v}{v_t + C_8 v + v_w}, F_2 = \frac{\chi^2 + 1.3\chi + 0.2}{\chi^2 - 1.3\chi + 1.0}, \chi = \frac{v_t}{7v}$$

Здесь d_w и v_w - расстояние до стенки и значение турбулентной вязкости на стенке (равно 0 для гладких поверхностей).

Кроме того, как и в модели Спаларта-Аллмареса, появляются два диссипативных слагаемых, описывающих подавление турбулентности твердой стенкой.

$$-\rho C_6 \frac{v_T(N_1 d + v_w)}{d^2} - \rho C_7 \frac{F_1 v v_T}{d^2}$$

Поправка на шероховатость

В отличие от модели Спаларта-Аллмареса при введении поправки на шероховатость нет необходимости менять тип граничного условия. В остальном эти поправки очень сильно похожи.

$$d = d_w + 0.01 k_s, v_w = 0.02 v^* k_s$$

Ламинарно-турбулентный переход

В эту модель можно ввести функцию trip-term из модели Спаларта-Аллмареса (только источник, без блокировки спонтанного перехода). Для хорошего описания области перехода необходима перекалибровка констант, однако и со стандартными значениями результаты оказываются вполне удовлетворительными. Следует отметить, что функции F_1 и F_2 препятствуют переходу в пограничном слое при низких числах Рейнольдса, поэтому проблема спонтанного перехода не стоит остро в этой модели.

Окончательная формулировка модели А.Н. Секундова $v_T - 92$

$$\begin{aligned} \frac{Dv_T}{Dt} = & \rho((C_0 + C_3)v_T + v) \cdot (\nabla \cdot \nabla v_T) + C_1 \nabla(\rho v_T) \cdot \nabla v_T + \\ & + \rho C_2 F_2 \left(v_T \Gamma_1 + A_1 v_T^{4/3} \Gamma_2^{2/3} + A_2 N_1 \sqrt{(v + v_T) \Gamma_1} \right) + \\ & + \rho C_3 v_T N_2 - \rho C_4 v_T (\nabla \cdot \bar{V} + |\nabla \cdot \bar{V}|) - \\ & - \rho C_5 \frac{v_T^2 \Gamma_1^2}{a^2} - \rho C_6 \frac{v_T(N_1 d + v_w)}{d^2} - \rho C_7 \frac{F_1 v v_T}{d^2} \end{aligned}$$

Здесь a - скорость звука,

$$\Gamma_1 = S, \Gamma_2 = [(\nabla \cdot \nabla V) \cdot (\nabla \cdot \nabla V)]^{0.5},$$

$$N_1 = [\nabla v_T \cdot \nabla v_T]^{0.5}, N_2 = [\nabla N_1 \cdot \nabla N_1]^{0.5},$$

$$F_1 = \frac{N_1 d_w + 0.4 C_8 v}{v_t + C_8 v + v_w}, F_2 = \frac{\chi^2 + 1.3\chi + 0.2}{\chi^2 - 1.3\chi + 1.0}, \chi = \frac{v_t}{7v}.$$

$$d = d_w + 0.01 k_s, v_w = 0.02 v^* k_s$$

Константы модели:

$$A_1 = -0.5, A_2 = 4, C_0 = 0.8, C_1 = 1.6, C_2 = 0.1,$$

$$C_3 = 4.0, C_4 = 0.35, C_5 = 3.5, C_6 = 2.9, C_7 = 31.5, C_8 = 0.1.$$

Физический смысл слагаемых в правой части

C_0 и C_1 – диффузия

- A_1 – эффекты второго порядка в генерации
- A_2 – поправка генерации для слоя смешения и дальнего следа
- C_3 – поправка на осесимметричность для струйных течений.
- C_4 – поправка на сжимаемость (быстрая деформация)
- C_5 – поправка на сжимаемость (скоростная сжимаемость)
- C_6, C_7 – диссипация под влиянием стенок.
- F_1, F_2 – поправки на низкие числа Рейнольдса.

Достоинства и недостатки модели $v_T - 92$

Сильной стороной этой модели является расчет струйных течений (в этом компоненте она значительно превосходит другие модели). Также эта модель превосходит другие при расчете течений, в которых существенны эффекты сжимаемости.

Основные недостатки модели связаны с вычислительной стороной.

1. Поскольку демпфирующие функции введены в само уравнение, оно становится сложным с вычислительной точки зрения.
2. Расчет вторых производных Γ_2 и N_2 с достаточной точностью требует большого расчетного шаблона.
3. Иногда возникают проблемы со сходимостью, в некоторых задачах не удается получить сошедшегося решения.
4. При использовании очень грубой сетки у стенки $\Delta y_1^+ > 6$ происходит не просто падение точности, а скачкообразный переход на абсолютно другое решение.

В целом эта модель используется гораздо реже моделей Спаларта-Аллмареса и Ментера по двум основным причинам: вычислительная сложность и недостаточная известность.

Развитие модели: S-96

Развитие этой модели было связано с описанием так называемых бесдвиговых пограничных слоев.

Иногда бывает, что характерный масштаб турбулентности около стенки оказывается много больше толщины пограничного слоя. Это может быть, в частности, в том случае, когда турбулентный поток в крупными вихревыми структурами взаимодействует со стенкой. В этом случае нарушаются многие исходные предположения, использованные при создании моделей турбулентности, особенно касающиеся влияния стенки на турбулентность.

Можно показать, что в общем случае возмущения давления затухают обратно пропорционально квадрату расстояния. Таким образом, на расстояниях, соответствующих масштабу турбулентности возмущения давления могут приводить к возмущениям скорости. Также можно показать, что распространение возмущений давления описывается при помощи эллиптического уравнения. Это позволило говорить об эллиптическом механизме распространения турбулентных возмущений на расстояниях, соизмеримых с характерным масштабом турбулентности.

Одной из попыток описать этот механизм и является модель S-96. В этой модели добавлено еще одно дифференциальное уравнение относительно линейного масштаба

турбулентности, а также добавлены эллиптические механизмы распространения возмущений. Введенные усложнения приводят к улучшению в очень ограниченном числе случаев. Кроме того, при использовании этой модели возникают проблемы при постановке граничных условий, поскольку не до конца ясно, что такое линейный масштаб турбулентности в ламинарном набегающем потоке

Другой попыткой описать эллиптический механизм является модель Дурбина-Мансура-Янга. В этой модели для генерации турбулентности используется дополнительное эллиптическое уравнение. Следует отметить, что эта идея была также использована в модели Дурбина (3 уравнения переноса для k , ε и $\overline{v'^2}$ и одно эллиптическое). Однако в отличие от последней модель Дурбина-Мансура-Янга оказалась гораздо менее удачной модель.

Уравнение для кинетической энергии турбулентности.

Уравнения для Рейнольдсовых напряжений.

Рассмотрим нестационарное уравнение Навье-Стокса для мгновенного движения

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

вместе с уравнением Рейнольдса для осредненного движения

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial(U_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right)$$

Подставив в первое уравнение $u_i = U_i + u'_i$ и вычтя из него второе, получим уравнения для пульсаций скорости

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial(U_i u'_j + u'_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - u'_i u'_j + \overline{u'_i u'_j} \right)$$

Умножаем это уравнение для u'_n , записываем аналогичное уравнение с заменой индексов i и n .

Делаем преобразования, используя следующие соотношения.

1. $\frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_n U_j) = U_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_n)$ - из неразрывности для осредненного движения
2. $u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_n u'_j) + u'_n \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_n u'_j)$ - из неразрывности для пульсаций
3. вязкий член и член с давлением дифференцируем по частям

После осреднения получаем уравнения для рейнольдсовых напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{in}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tau_{in}}{\partial x_j} = & - \left(\tau_{ij} \frac{\partial U_n}{\partial x_j} + \tau_{nj} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_n}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tau_{in}}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_n u'_j} - \frac{\delta_{ij}}{\rho} \overline{u'_n p'} - \frac{\delta_{nj}}{\rho} \overline{u'_i p'} \right) - 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_n}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Слагаемые в правой части отвечают, соответственно, за генерацию, перераспределение энергии между компонентами тензора Рейнольдсовых напряжений, диффузию (молекулярную и турбулентную) и диссипацию.

Уравнение для кинетической энергии турбулентности

Введем кинетическую энергию турбулентности $k = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$

Уравнение для кинетической энергии турбулентности можно получить из уравнений для рейнольдсовых напряжений путем свертки индексов i и n .

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - u'_j \overline{\left(\frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} \right) - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

Члены в правой части соответствуют генерации, диффузии (молекулярной и турбулентной) и диссипации кинетической энергии турбулентности.

Для замыкания этого уравнения необходимо определить (промоделировать) следующие величины

1. Зависимость Рейнольдсовых напряжений от кинетической энергии турбулентности и осредненных параметров потока $\tau(k, U)$.
2. Турбулентная диффузия $u'_j \overline{\left(\frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)}$
3. Диссипация $\varepsilon = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$

Алгебраические гипотезы для замыкания.

Для замыкания уравнения для кинетической энергии турбулентности существует совсем немного гипотез, а именно

1. Гипотеза Буссинеска.

$$-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

2. Гипотеза градиентной диффузии

$$-\overline{u'_i \phi'} \approx \nu_T \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

однако существует второе слагаемое с корреляцией давления. DNS показал, что оно мало для простейших течений

$$\overline{u'_j \left(\frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} = -\frac{\nu_T}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

3. Замена диссипации линейным масштабом. Связь между линейным масштабом и путем смешения Прандтля.

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{1.5}}{l}$$

4. Формула Колмогорова

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

5. Гипотеза Невзглядова-Драйдена

$$\tau_{xy} \approx a_1 k$$

Эти гипотезы могут быть дополнены теми или иными демпфирующими функциями, учитывающими близость твердых стенок.

Модели с одним уравнением на основе уравнения для кинетической энергии турбулентности.

На основе уравнения для кинетической энергии турбулентности было построено большое количество различных моделей, среди которых следует выделить модели Emmons (1954), Глушко (1965), Wolfshtein (1967), Bradshaw, Ferriss, Atwell (1967), Goldberg (1991).

Наиболее успешной из них (для своего времени) была модель Bradshaw, Ferriss, Atwell (1967), которая была признана лучшей моделью турбулентности на Стэнфордской конференции 1968 года. В этой модели из уравнения для k с учетом описанных выше замыкающих соотношений было получено уравнение для касательного напряжения τ_{xy} .

Однако лучшие современные модели существенно превосходят все модели с одним уравнением, построенные на основе уравнения для кинетической энергии турбулентности. Причиной этого, в первую очередь, является использование алгебраических соотношений для диссипации, поскольку эти соотношения являются очень неуниверсальными.

Другие модели с одним уравнением.

Кроме вышеупомянутых моделей существует большое количество моделей с одним дифференциальным уравнением относительно различных характеристик турбулентности. Эти модели, как правило, не являются выдающимися, хотя некоторые из них содержат интересные идеи по моделированию турбулентности.

Так, например, Менгер вывел из них уравнение для турбулентной вязкости из уравнений k - ε модели. Полученная модель оказалась очень сложной и непригодной для практических расчетов. При упрощении модели пришлось воспользоваться некоторыми предположениями, в результате которых качество полученной модели оказалось невысоким.

Достоинства и недостатки моделей с одним уравнением.

Основное достоинство – это простейшие из дифференциальных уравнений. В актив можно завести вычислительную дешевизну, простоту калибровки и, по крайней мере, наличие двух хорошо проработанных моделей турбулентности.

К принципиальным недостаткам относится, в первую очередь, необходимость привлечения других соотношений для линейного масштаба. Если в случае пограничных слоев эта проблема решается путем использования расстояния до стенки, то в свободных сдвиговых течениях даже у лучших моделей возникают существенные проблемы (эта проблема часто называется проблемой следа-струи).

В целом, по-видимому, модели с одним уравнением на данный момент оптимальны по соотношению простота-качество.

Модели с двумя дифференциальными уравнениями

Модели с одним уравнением для кинетической энергии турбулентности оказались низкого качества из-за привлечения дополнительных неуниверсальных алгебраических соотношений для диссипации. Наиболее естественный путь развития - построение второго дифференциального уравнения для диссипации.

На самом деле вторая переменная может быть любой, важно, чтобы можно было построить замыкающее соотношение, связывающее турбулентную вязкость с кинетической энергией турбулентности и этой переменной. И действительно, существует огромное количество моделей с разными переменными для второго уравнения (примеры: k - τ , k - l , k - ξ модели). Одной из последних разработок является разработанная Ментером модель $k - \sqrt{kl}$, однако опыт ее использования еще недостаточен.

Тем не менее, опыт использования разных моделей показал, что выбор второй переменной заметно влияет на свойства модели. Во-первых, переменная для второго уравнения не должна очень сильно меняться, иначе эти уравнения будут трудны для численного решения. Во-вторых, для этой переменной необходимо ставить граничные условия, поэтому надо иметь четкое представление, какие значения она должна принимать на стенке, во внешнем потоке с заданным уровнем турбулентности и т.д. И, наконец, немаловажным для качества модели является количество "вложенного труда", поскольку для калибровки требуется проведение значительного количества расчетов различных течений.

В настоящий момент наиболее продвинутыми и часто используемыми являются два типа моделей с двумя уравнениями: $k - \varepsilon$ и $k - \omega$. Остановимся на них подробнее.

Модели типа k - ε .

Высокорейнольдсовы версии модели

В литературе принято два способа получения уравнения для изотропной диссипации

$$\varepsilon = 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}.$$

Во-первых, это уравнение можно вывести из уравнений Навье-Стокса при помощи процедуры осреднения по Рейнольдсу. Это уравнение будет содержать различные корреляции, которые невозможно определить через осредненные параметры потока. Естественно, в этом случае потребуются некоторые дополнительные предположения для моделирования членов полученного уравнения.

С другой стороны, можно записать уравнение переноса для ε и предположить, что генерация и диссипация ε пропорциональны аналогичным величинам для k .

Так или иначе, оба пути приводят к так называемой стандартной (высокорейнольдсовой) модели, предложенной Spalding, Launder в 1972 году.

$$\frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot \left(\left(v + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \varepsilon$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \nabla \cdot \left(\left(v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$P_k = v_T S^2 = -\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Подбор констант был выполнен на основе струйных течений (и зависимости

$$C_2 = C_1 - \frac{\kappa^2}{\sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu}}).$$

$$\sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92, C_\mu = 0.09.$$

Существуют и другие, несколько менее известные, высокорейнольдсовы версии модели. Так, например, Yakhot, Orszag в 1986 году воспользовались теорией ренормгрупп (renormalization group, RNG) и создали RNG версию модели. Эта версия несколько отличается от стандартной модели коэффициентами.

Однако все высокорейнольдсовы модели абсолютно непригодны для расчета пристенных течений, поскольку никак не учитывают влияние стенки на турбулентность. Существует два подхода к решению этой проблемы: использование пристенных функций или создание низкорейнольдсовых версий модели. Выбор подхода в значительной степени связан с используемой сеткой.

Генерация турбулентности

Рассмотрим генерационный член в уравнении для кинетической энергии турбулентности (полученном из уравнений Навье-Стокса путем осреднения по Рейнольдсу с учетом обобщенной гипотезы Буссинеска)

$$P_k = -\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = v_T S^2$$

Видно, что генерация турбулентности зависит от деформации S .

С другой стороны, в простейших сдвиговых течениях $S = \Omega = \frac{\partial u}{\partial y}$, поэтому в них нет

никакой разницы между S и Ω . Однако в некоторых ситуациях замена S на Ω приводит к существенному изменению свойств модели. Одной из таких ситуаций является течение в окрестности критической точки крылового профиля, где $S \gg \Omega$. При использовании деформации S в генерационном члене происходит сильная генерация турбулентной вязкости в этой области, что не согласуется с экспериментом.

Особенно сильно это свойство проявляется в моделях с одним дифференциальным уравнением. Именно по этому в модели Спаларта-Аллмареса, разрабатывавшейся для задач внешней аэродинамики, генерационный член пропорционален завихренности Ω . Правда, это несколько ухудшает свойства модели в некоторых других течениях (в

частности с кривизной линий тока и вращением), но эти проблемы решаются при использовании соответствующей поправки.

Для k - ε моделей существует модификация Kato, Launder, 1993, в которой по следам модели Спаларта-Алламереса используется измененное выражения для генерации $P_k = \nu_T S \Omega$ вместо $P_k = \nu_T S^2$.

Низкорейнольдсовы версии k - ε моделей.

Высокорейнольдсовые версии k - ε моделей не приспособлены для расчета пристенных течений, поскольку вблизи стенки локальное турбулентное число Рейнольдса мало. Для расчета пристенных течений используются либо низкорейнольдсовые модели, либо пристенные функции.

В низкорейнольдсовых моделях в уравнения вводятся дополнительные функции, отвечающих за влияние стенок на турбулентность (в некотором роде эти функции являются аналогом демпфирующей функции Ван-Дрифта). В общем случае большинство низкорейнольдсовых k - ε моделей могут быть записаны следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= \nabla \cdot \left(\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \varepsilon - f_k \\ \frac{D\varepsilon}{Dt} &= \nabla \cdot \left(\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} - f_\varepsilon \\ \nu_t &= C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Основное отличие низкорейнольдсовой версии от высокорейнольдсовой состоит в модификации диссипации. Легко показать, что около стенки $\varepsilon = \nu \cdot \nabla \cdot (\nabla k) = \nu \cdot \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$.

Однако постановка такого граничного условия не очень хороша с вычислительной точки зрения, поскольку приводит к существенной дополнительной нелинейности. Поэтому вводят специальную функцию f_k , которая удовлетворяет на стенке условию

$$f_k = \nu \cdot \frac{\partial^2 k}{\partial y^2},$$

и постепенно падает до 0 при удалении от стенки.

Диссипацию представляют в виде $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + f_k$ и второе уравнение записывают относительно $\tilde{\varepsilon}$. Поскольку ε и $\tilde{\varepsilon}$ отличаются около стенки, в уравнение для $\tilde{\varepsilon}$ вводится дополнительное слагаемое f_ε , которое перестает оказывать влияние вдалеке от стенок. Следует отметить, что часто «волну» не пишут.

Кроме того, в модель введены демпфирующие функции f_2 и f_μ , которые предназначены непосредственно для учета влияния стенки. Как и в моделях с одним уравнением для описания влияния стенок необходим линейный масштаб. Существует два различных подхода к определению линейного масштаба при построении подобных функций.

В рамках одного подхода в качестве линейного масштаба используется расстояние до стенки, во втором подходе линейный масштаб строится без использования расстояния до стенки на основе производных скорости (типа формулы Кармана) или на основе турбулентных характеристик (например, турбулентное число Рейнольдса $Re_T = k^2 / \nu \varepsilon$). Оба подхода имеют свои недостатки. Так, при использовании первого подхода возникает неопределенность в течениях сложной геометрии, а при использовании второго – функции могут по ошибке «включиться» и вдалеке от стенок.

Низкорейнольдсовых k - ε моделей существует огромное количество, наиболее удачными из них являются модели Chien (1982) и Launder, Sharma (1974).

Модель Чена построена на основе первого подхода

$$f_\mu = 1 - \exp(-C_3 d^+), \quad d^+ = v_* d / \nu,$$

$$f_2 = \left(1 - 0.22 \exp\left(-\left(\frac{Re_T}{6}\right)^2\right) \right), \quad Re_T = k^2 / \nu \varepsilon,$$

$$f_k = \frac{2\nu k}{d^2},$$

$$f_\varepsilon = \frac{2\nu \varepsilon}{d^2} \exp(-C_4 d^+),$$

$$\sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_1 = 1.35, C_2 = 1.8, C_3 = 0.0115, C_4 = 0.5, C_\mu = 0.09$$

Модель Лаундера-Шармы построена на основе второго подхода.

$$f_\mu = \exp\left(-3.4 / \left(1 + 0.02 Re_T\right)^2\right), \quad Re_T = k^2 / \nu \varepsilon$$

$$f_2 = \left(1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)\right)$$

$$f_k = 2\nu (\nabla \sqrt{k}) \bullet (\nabla \sqrt{k}),$$

$$f_\varepsilon = -C_3 \nu v_T \left[(\nabla \nabla \vec{V}) \bullet \bullet \bullet (\nabla \nabla \vec{V}) \right],$$

$$\sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92, C_3 = 2.0, C_\mu = 0.09$$

Требования к расчетной сетке

Общие требования к сетке сформулировать довольно легко: сетка должна быть достаточной для разрешения всех особенностей течения. Следует отметить, что при использовании схем различного порядка точности требования к сетке могут меняться, поскольку диссипативные свойства схемы зависят от шага сетки.

В турбулентном пограничном слое непосредственно около стенки примерно до $y^+ = 5$ находится вязкий подслой. При использовании низкорейнольдсовых моделей турбулентности для правильного описания пограничного слоя первый от стенки узел сетки должен находиться в вязком подслое, а для точного описания коэффициента трения считается, что должно выполняться соотношение $y_1^+ \leq 1$ (3-4 узла в подслое). Кроме того, нельзя слишком резко увеличивать шаг сетки (отношение соседних шагов не должно превышать 1.3), поскольку это приводит с заметной потерей точности.

При использовании пристенных функций требования несколько другие. Так, для классических пристенных функций первая точка должна находиться на логарифмическом участке профиля скорости, что, как правило, приводит к требованию $30 \leq y_1^+ \leq 100 \div 1000$. В случае течений сложной геометрии такому требованию довольно трудно удовлетворить. Современные пристенные функции смягчают это требование, а предложенные Менгером автоматические пристенные функции переходят от пристенных функций к низкорейнольдсовым граничным условиям в зависимости от шага сетки.

Пристенные функции.

Идея пристенных функций состоит в том, что при постановке граничных условий на стенке используется закон стенки. Это позволяет сформулировать граничные условия для уравнений для скорости вдоль стенки и турбулентных характеристик (для моделей типа $k-\varepsilon$ это необходимо сделать и для k и для ε). Традиционно принято два подхода для постановки граничных условий с помощью пристенных функций. В первом случае определяются потоки искомых величин через стенку и напрямую используются при решении уравнений методом конечных объемов. Во втором определяются значения этих величин в узлах на некотором расстоянии от стенки. Выбор подхода в значительной степени определяется способом решения уравнений (конечно-разностный или конечно-объемный), способом хранения данных (cell centred или vertex based), а также причинами субъективного характера. Многолетний опыт использования пристенных функций показал, что первый подход несколько более универсален, чем второй.

Очевидно, что в ситуациях, когда закон стенки не выполняется, пристенные функции не могут претендовать на правильное описание пограничного слоя.

Тем не менее, существует две веские причины использования пристенных функций.

1. Для сложных задач очень трудно (а часто невозможно) построить сетку, удовлетворяющую критерию для низкорейнольдсовых моделей ($y_1^+ < 2$) и имеющую разумный размер.
2. Высокореинольдсовые модели турбулентности с вычислительной точки зрения существенно проще, чем низкорейнольдсовые, поскольку уравнения для турбулентных характеристик существенно более линейные.

В основе пристенных функций лежат нижеследующие физические предположения для логарифмической области пограничного слоя ($30 < y^+ < 100$).

1. Логарифмический профиль скорости

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{y v_*}{\nu} \right) \quad (1)$$

2. Формула Колмогорова

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2)$$

3. Постоянство касательного напряжения

$$\rho v_*^2 = \tau_w = \tau = \rho (v + v_t) \frac{\partial u}{\partial y} \approx \rho v_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

4. Гипотеза о локальном равновесии генерации и диссипации кинетической энергии турбулентности

$$P_k = v_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \approx \varepsilon \quad (4)$$

Формулы (1) - (4) связывают 5 переменных ($U, v_*, v_t, k, \varepsilon$) и недостаточны для постановки граничных условий.

При помощи несложных преобразований из (1) – (4) можно получить

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{v_*}{\kappa y} \quad (5)$$

$$k = \frac{v_*^2}{C_\mu^{0.5}} \quad (6)$$

$$\varepsilon = \frac{v_*^3}{\kappa y} \quad (7)$$

Вообще говоря, выражение (5) можно считать недостающей связью между искомыми 5 переменными, но оказывается, что его использование для замыкания не всегда является наиболее эффективным путем.

Пристенные функции для переменных

Этот подход чаще используется в vertex based программах и в настоящее время используется все реже. Рассмотрим детали его использования. Будем считать, что первый пристенный узел лежит на стенке, а второй - на логарифмическом участке профиля скорости. Использование выражений (1)-(7) возможно несколькими способами.

В классическом подходе (Spalding, Launder, 1972) это делается так.

1. Кинетическая энергия турбулентности k в узле 2 берется с предыдущей итерации, по формуле (6) вычисляется v_* .
2. Вычисляется y^+ и u^+ в узле 2, проверяется $30 < y^+ < 100$, решаются уравнения движения (касательная составляющая решается от второго узла).
3. По формуле (7) вычисляется ε в узле 2, решается уравнение для ε от второго узла
4. Решается уравнение для k с граничным условием $\frac{\partial k}{\partial n} = 0$ от первого узла

Однако это не единственный способ постановки граничных условий. Например, можно предположить, что первый и второй узлы лежат на логарифмическом участке профиля скорости. Тогда из двух уравнений типа (1) можно найти динамическую скорость и скорость в первом узле, а для турбулентных характеристик найти значения по формулам (6)-(7).

Часто для улучшения сходимости алгоритма динамическая скорость определяется не из (6), а из комбинации соотношений (1) и (6) с предыдущей итерации

$$v_*^2 = \frac{\kappa C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\ln \left(E \frac{y C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\nu} \right)}$$

Для повышения точности при расчете потока вдоль стенки часто используются интегральные значения вида (поскольку все величины в вязком подслое и буферной области меняются нелинейно)

$$\bar{F} = \frac{1}{y_2} \int_0^{y_2} F \cdot dy.$$

При этом распределение скорости между узлами 1 и 2 полагается

$$u^+ = \begin{cases} y^+, y^+ < \bar{y}^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+), y^+ < \bar{y}^+ \end{cases}$$

Недостатки пристенных функций для переменных

1. Жесткое требование к сетке в отношении координаты узла 2 ($30 < y^+ < 100$).
2. Классический подход (Launder, Spalding, 1974) применим только для моделей, содержащих уравнение для кинетической энергии.
3. Падение динамической скорости в окрестности точки отрыва приводит к падению теплового потока (что неверно)

$$T - T_w = -\frac{q_w \text{Pr}_t}{\rho C_p v_*} F(y^+), \tag{8}$$

$$F(y^+) = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) + 9 \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} - 1 \right) \left(\frac{\text{Pr}_t}{\text{Pr}} \right)^{1/4}$$

Пристенные функции для потоков

Этот подход характерен для cell centered программ, но может быть и использован для vertex based. При этом подходе в пристенной ячейке методом конечных объемов решается уравнение, а граничные условия ставятся на потоки величин на стенку. Как и в случае граничных условий на переменные существует несколько реализаций. Так, например, в разработанном на кафедре пакете SINF это сделано следующим образом:

1. В первом узле решается трансцендентное уравнение для динамической скорости, вытекающее из (1)

$$v_* \ln(v_*) = \frac{\kappa u}{\ln\left(E \frac{y}{v}\right)}.$$

$$Flux_p = 0.0$$

2. Решаются уравнения для газа с учетом потоков на стенке $Flux_u = \tau_w$

$$Flux_v = 0.0$$

3. Турбулентные характеристики определяются из соотношений (6) – (7).
4. Температура вычисляется из соотношения (8).

Из всего многообразия пристенных функций наиболее универсальными, по-видимому, являются автоматические пристенные функции, разработанные Ментером и реализованные в пакете CFX. Эти пристенные функции являются объединением аналитического решения в вязком подслое и так называемых масштабируемых (scalable) пристенных функций (Grotjans, Menter, 1998), которые применимы для чрезвычайно широкого диапазона y_1^+ (на плоской пластине от $y_1^+ \approx 2$).

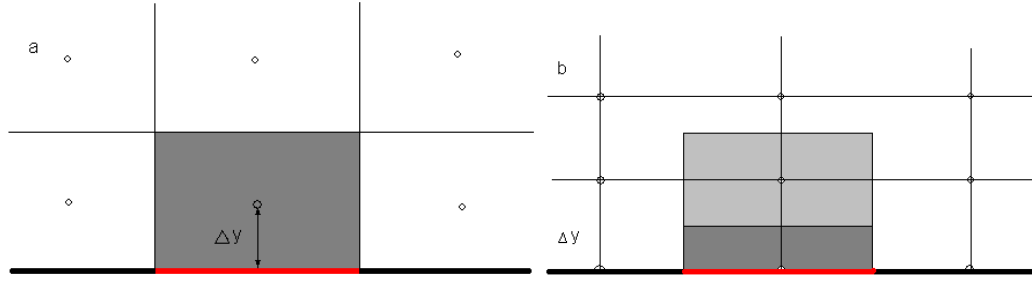


Рис. 21. Использование автоматических пристенных функций для cell-centred (a) и vertex-based (b) алгоритмов. Кружками обозначены узлы, в которых хранятся данные.

Рассмотрим подробнее их использование на примере оригинальной $k-\omega$ модели (обобщить на случай $k-\varepsilon$ не очень сложно). На рис. 21 изображены примеры расчетных сеток для обоих рассматриваемых подходов. При помощи пристенных функций необходимо определить поток через красную грань темной ячейки. При этом в рамках обоих подходов предполагается, что первый пристенный узел расположен на расстоянии Δy от стенки (для vertex-based подхода это означает, что "жирная" линия на самом деле не является стенкой, а удалена от нее на Δy).

1. С предыдущей итерации используются значения U_w и k_w в первом пристенном узле.
2. Вычисляются u^* , u^+ и y^+ по формулам

$$u^* = \left((u_{sub}^*)^4 + (u_{log}^*)^4 \right)^{1/4}; u_{sub}^* = \sqrt{\frac{\nu U_w}{\Delta y}}; u_{log}^* = C_\mu^{1/4} \sqrt{k_w}$$

$$y^+ = \frac{u^* \Delta y}{\nu}; u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$$

3. Решаются уравнения движения. Поток на стенке Равны

$$F_u = \tau_w = \rho C_\tau U_w$$

$$F_v = F_w$$

$$C_\tau = \left((C_{\tau,sub})^4 + (C_{\tau,log})^4 \right)^{1/4}; C_{\tau,sub} = u^* \sqrt{\frac{\nu}{U_w \Delta y}}; C_{\tau,log} = \frac{u^*}{u^+}$$

4. Решаются уравнение для турбулентных характеристик. Для удельной диссипации на стенке задается значение

$$\omega_w = \left((\omega_{w,sub})^4 + (\omega_{w,log})^4 \right)^{1/4}; \omega_{w,sub} = \frac{6}{\beta \nu} \left(\frac{u^*}{y^+} \right)^2; \omega_{w,log} = \frac{1}{\kappa \sqrt{C_\mu}} \frac{u^{*2}}{\nu y^+}; \beta = \frac{3}{40}$$

А уравнение для кинетической энергии решается с граничным условием

$$F_k = 0$$

При этом в первом узле генерация считается по формуле

$$P_k = \left(\frac{k_w}{\omega_w} \right) \cdot \left(\frac{\tau_w}{\kappa \mu y^+} \right)$$

Развитие пристенных функций

Интенсивное использование пристенных функций в практических расчетах стимулирует дальнейшую их разработку. В основном модификации касаются увеличения их области применимости, в них вводится учет влияния различных факторов (градиент давления, шероховатость и т.п.).

Одним из наиболее удачных примеров таких исследований являются разработки группы из UMSIT (B. Launder), которые были стимулированы заказом на разработку простого и работоспособного подхода для расчета течения в ядерном реакторе в условиях отказа. Этим, в значительной степени, определяется направленность работ: тепловые задачи и задачи свободной конвекции.

Исследования велись в двух направлениях: аналитическом и численном. В первом случае были достигнуты значительные успехи в расчете существенно неизотермических течений. В частности, разработаны пристенные функции для температуры и для уравнения движения с архимедовыми силами.

Второй подход основан на введении вблизи стенки дополнительной сетки (30-40 узлов от первого до второго узла), на которой решается упрощенная низкорейнольдсовая модель турбулентности. Утверждается, что затраты при этом в 1.5-2 раза выше, чем у стандартных пристенных функций, и на порядок ниже, чем для низкорейнольдсовых моделей. Точность расчета при этом не хуже, чем у низкорейнольдсовых моделей.

Гибридные модели

Успех k - ε моделей для свободной турбулентности и алгебраических моделей для пограничных слоев естественным образом привел к попыткам создания гибридных моделей (иногда называемых зональные или двухслойные). В этих моделях вблизи стенки используется алгебраическая модель турбулентности, а вдали от них – дифференциальная.

Препятствием к обширному распространению таких моделей послужили следующие обстоятельства.

1. Довольно трудно автоматизировать определение положения границы между областями, в которых используются разные модели. В случае простых течений это можно сделать «вручную», однако для более сложных течений это сделать невозможно. Например – сочленение крыла и фюзеляжа самолета.
2. На границе между областями необходимо задать граничные условия для турбулентных характеристик. Это требует привлечения дополнительных гипотез для алгебраических моделей (которые могут, вообще говоря, не выполняться).
3. Для использования алгебраических моделей необходимо определить характеристики пограничного слоя, что не всегда просто, поскольку скорость во внешнем потоке может быть непостоянна.
4. Пристенное течение может оказаться довольно далеким от развитого пограничного слоя, в этом случае алгебраические модели абсолютно непригодны.

Тем не менее, в некоторых коммерческих кодах такие модели вполне успешно используются.

Иногда в рамках гибридных моделей сочетаются различные дифференциальные модели. Так, в пакете Fluent при использовании стандартной k - ε модели вблизи стенки можно использовать модель Wolfstein с одним уравнением для k .

Достоинства и недостатки моделей типа k - ε .

К достоинствам моделей этого типа можно отнести расчет свободных сдвиговых течений. Кроме того, по этим моделям накоплен огромный опыт расчетов, они хорошо исследованы и есть в большинстве коммерческих программ.

Опыт эксплуатации k - ε моделей показал, что при расчете пограничных слоев с положительным (неблагоприятным) градиентом давления все модели этого типа склонны к завышению генерации кинетической энергии турбулентности, что приводит к принципиально неправильному описанию таких течений. Этот недостаток является очень серьезным, поскольку делает практически невозможным правильный расчет течений с отрывом с гладкой поверхности.

Существует несколько попыток модификации для устранения этого недостатка, однако такие модели не получили широкого применения.

$$f_{\varepsilon} = \max \left[\left(\frac{l}{\kappa C_{\mu}^{-3/4} y} - 1 \right) \left(\frac{l}{\kappa C_{\mu}^{-3/4} y} \right)^2 \frac{\varepsilon^2}{k}, 0 \right]$$

$$f_{\varepsilon} = \max \left[\left(\frac{l}{\kappa C_{\mu}^{-3/4}} \frac{\partial l}{\partial y} - 1 \right) \left(\frac{l}{\kappa C_{\mu}^{-3/4}} \frac{\partial l}{\partial y} \right)^2 \frac{\varepsilon \varepsilon}{k}, 0 \right]$$

Применение пристенных функций, основанных на законе стенки, приводит к ошибкам при расчете отрывных течений и течений в областях сложной геометрии.

Для низкорейнольдсовых версий модели свойственны вычислительные проблемы, связанные с сильной нелинейностью демпфирующих функций.

В целом эти модели, будучи безусловными лидерами среди дифференциальных моделей в 80-е годы, заметно уступили свои позиции моделям с одним уравнением и моделям типа k - ω .

Модели типа k - ω .

Величину ω принято называть удельной диссипацией. Как правило, она связана с кинетической энергией турбулентности и изотропной диссипацией соотношением

$$\varepsilon = C_{\mu} k \omega$$

Впервые комбинацию уравнений для k и ω предложил Колмогоров в 1942 году, однако его уравнения нельзя считать моделью турбулентности в современном понимании этого слова. Активным продвижением k – ω моделей (уже как инструмента для расчета турбулентных течений) занимался Уилкоккс, ему принадлежит целый ряд моделей, в частности модель Уилкоккса-Рубезина. Наиболее простой является так называемая высокорейнольдсовая модель Уилкоккса (Wilcox, 1988)

Высокорейнольдсовая модель Уилкокса.

Даже высокорейнольдсовая версия хорошо описывает пристенные течения, не имеет проблем с градиентом давления.

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu_T) \nabla k) + P_k - \rho \beta^* \omega k$$

$$\rho \frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\omega \mu_T) \nabla \omega) + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \rho \beta \omega^2$$

Здесь:

$$\mu_T = \rho k / \omega,$$

Константы модели:

$$\alpha = \frac{5}{9}, \beta^* = 0.09, \sigma_k = 0.5, \sigma_\omega = 0.5, \beta = 0.075$$

Однако при использовании этой модели возникают проблемы при расчете струйных течений. Основная проблема состоит в чрезвычайной чувствительности к граничным условиям во внешнем потоке (что особенно видно в свободных сдвиговых течениях, см. таблицу).

Течение	$k - \omega$	$k - \varepsilon$	Эксперимент
Дальний след	0.301 – 500	0.256	0.365
Слой смешения	0.103 – 0.141	0.098	0.115
Плоская струя	0.090 – 0.136	0.109	0.100 – 0.110
Круглая струя	0.073 – 0.371	0.120	0.086 – 0.095

Перекрестный член.

Ментер вывел уравнения $k - \omega$ модели из высокорейнольдсовой $k - \varepsilon$ модели и показал, что их отличие от модели Уилкокса состоит в наличии так называемого перекрестного члена $\frac{\rho}{\omega} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)$ в уравнении для ω .

При добавлении этого слагаемого (Wilcox, 1993) чувствительность к граничным условиям пропадает.

$$\rho \frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\omega \mu_T) \nabla \omega) + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \rho \beta \omega^2 + \sigma_d \frac{\rho}{\omega} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)$$

$$\sigma_d = \begin{cases} 0, & (\nabla k) \cdot (\nabla \omega) \leq 0 \\ 0.3, & (\nabla k) \cdot (\nabla \omega) > 0 \end{cases}$$

Следует отметить, что в пограничном слое ω монотонно убывает от стенки. Следовательно, перекрестный член не равен нулю только от максимума k до внешней границы слоя. Иными словами, можно считать, что от стенки до максимума k используется $k - \omega$ модель, а далее - $k - \varepsilon$.

Модель Ментера.

Именно Ментеру принадлежит идея об объединении двух типов моделей ($k - \varepsilon$ – вдали от стенок, $k - \omega$ – вблизи к стенкам).

Кроме того, известно, что в значительной части пограничного слоя касательное напряжение пропорционально кинетической энергии турбулентности (Ментер использует название SST и Shear Stress Transport). Для безградиентного пограничного слоя (равновесного) это гипотеза Невзглядова-Драйдена $\tau = \rho a_1 k$, а для неравновесного -

$$\tau = \rho \sqrt{\frac{P_k}{\varepsilon}} a_1 k.$$

Наибольшая техническая сложность при создании такой "комбинированной" модели состоит в формулировке функций, которые автоматически переключают модель с одной "ветки" на другую. Ментер это сделал следующим образом.

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu_T) \nabla k) + P_k - \rho \beta^* \omega k$$

$$\rho \frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\omega \mu_T) \nabla \omega) + \rho \frac{\gamma}{\mu_T} P_k - \rho \beta \omega^2 + (1 - F_1) D_{k\omega}$$

Здесь:

$$\mu_T = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, F_2 = \tanh(\arg_2^2), \arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega d}, \frac{500\nu}{d^2\omega}\right),$$

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2, \phi = \{\sigma_k, \sigma_\omega, \beta\},$$

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d}, \frac{500\nu}{d^2\omega}\right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} d^2}\right],$$

$$CD_{k\omega} = \max(D_{k\omega}, 10^{-20}), D_{k\omega} = \frac{2\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega).$$

Константы модели:

$$\sigma_{k1} = 0.85, \sigma_{\omega 1} = 0.5, \beta_1 = 0.075,$$

$$\sigma_{k2} = 1.0, \sigma_{\omega 2} = 0.856, \beta_2 = 0.0828,$$

$$\beta^* = 0.09, \kappa = 0.41, a_1 = 0.31, \gamma = \beta/\beta^* - \sigma_\omega \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}.$$

По итогам десятилетнего опыта эксплуатации этой модели в ней было сделано единственное изменение – в уравнении для k P_k ограничивается значением $10\rho\beta^*k\omega$.

Граничные условия к k - ω моделям.

Кроме того, Ментер провел тщательные исследования влияния граничных условий на результаты расчетов и сформулировал универсальную и надежную формулировку, которую можно считать общепринятой.

На стенке аналитическое (но трудное в реализации) условие, предложенное Wilcox

$$\omega \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{6\nu}{\beta_1 y^2} \text{ заменено на значение на стенке } \omega_w = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 \Delta y_1^2}.$$

Для внешнего слаботурбулентного потока предложено следующее условие

$$\omega = 1 \div 10 \frac{U_\infty}{L}; \nu_t = 10^{-3} \nu; k = \nu_t \omega$$

При расчете пограничных слоев, когда возникают трудности с трактовкой характерного линейного масштаба L используется условие

$$\omega = \frac{4\nu_*^2}{\sqrt{\beta^*} U_e \delta^*}.$$

Следует отметить, что предложенная Менгером поправка на SST может быть применена и к другим моделям с двумя уравнениями. Так, например, модифицированная модель Чена в ряде случаев превосходит оригинальную.

Комбинация модели Менгера совместно с автоматическими пристенными функциями (это реализовано в CFX) позволяет получать хорошие решения в широком диапазоне значений y^+ .

Область применимости моделей с двумя уравнениями.

Модели с двумя уравнениями являются единственными реальными конкурентами одноуравнительных моделей при расчете турбулентных течений. Их использование приводит к несколько большим затратам, однако наличие двух независимых переменных позволяет выбрать в качестве линейного масштаба не только расстояние до стенки. Наиболее часто используемой из моделей с двумя уравнениями является модель Менгера.

Модели рейнольдсовых напряжений

Все модели турбулентности, о которых мы говорили ранее (так называемые линейные модели), построены с использованием обобщенной гипотезы Буссинеска

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

В большинстве случаев (за исключением некоторых простейших течений) эта гипотеза неверна, но иногда, когда на течение существенное влияние оказывает только одна компонента тензора рейнольдсовых напряжений, это никак не сказывается на результате расчетов.

Тем не менее, во многих случаях такое влияние оказывается существенным, что приводит к необходимости использования моделей, учитывающих анизотропию тензора рейнольдсовых напряжений, о которых мы будем говорить далее.

Следует отметить, что сильно анизотропными оказываются наиболее крупные вихри (когерентные структуры), поэтому в ситуациях, когда линейные модели непригодны, зачастую возникает вопрос о применимости в этих случаях осреднения по Рейнольдсу и о принципиальной возможности моделирования рейнольдсовых напряжений.

Так или иначе, но желание учесть анизотропию тензора рейнольдсовых напряжений привело к созданию целого класса моделей, который принято делить на следующие типы.

1. Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений (DRSM). Для каждой из 6 независимых компонент тензора рейнольдсовых напряжений решается дифференциальное уравнение. Для замыкания этой системы к рассматриваемым 6 уравнениям необходимо добавить еще как минимум одно для масштаба диссипации (итого не меньше 7 уравнений).
2. Алгебраические модели Рейнольдсовых напряжений (ARSM). В этом случае устанавливаются алгебраические связи между рейнольдсовыми напряжениями и

осредненными параметрами потока. Необходимые масштабы турбулентности получаются из решения двух дифференциальных уравнений (как правило, k - ε или k - ω), которые называются базой модели. Иными словами для замыкания «базовых» уравнений вместо гипотезы Буссинеска используются сложные (обычно трансцендентные) алгебраические связи.

3. Явные алгебраические модели Рейнольдсовых напряжений (EARSМ). В этом случае алгебраические связи разрешаются относительно рейнольдсовых напряжений. Иначе говоря, вместо линейной связи (гипотеза Буссинеска) между тензором рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций используются более сложные нелинейные соотношения. Поэтому эти модели часто называют нелинейными моделями (NLM).

Некоторые следствия тензорного анализа

В моделях рейнольдсовых напряжений в существенной степени используются свойства тензоров. Большинство из этих свойств хорошо известны, однако одно из них следует рассмотреть подробнее.

Рассмотрим два тензора второго ранга в трехмерном пространстве \mathbf{A} и \mathbf{B} , причем $\mathbf{B} = f(\mathbf{A})$. Разложим функцию f в ряд Тейлора. Тогда

$$\mathbf{B} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{A} + a_2 \mathbf{A}^2 + \dots$$

Для тензоров, как и для матриц, выполняется теорема Гамильтона-Кэли, говорящая о том, что тензор является корнем своего характеристического уравнения

$$\mathbf{A}^3 - b_2 \mathbf{A}^2 + b_1 \mathbf{A} - b_0 \mathbf{I} = 0,$$

где коэффициенты b_i являются инвариантами тензора \mathbf{A} .

Таким образом, для тензоров второго ранга в трехмерном пространстве куб тензора может быть выражен через низшие степени этого тензора.

Подставив это выражение в ряд Тейлора, получим функциональную зависимость

$$\mathbf{B} = c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{A} + c_2 \mathbf{A}^2,$$

причем коэффициенты c_i зависят от инвариантов тензора \mathbf{A} – а именно от $\{\mathbf{A}\}$, $\{\mathbf{A}^2\}$, $\{\mathbf{A}^3\}$.

Эту функциональную зависимость часто записывают в бездивергентном виде

$$\left(\mathbf{B} - \frac{1}{3} \{\mathbf{B}\} \mathbf{I} \right) = c_1 \left(\mathbf{A} - \frac{1}{3} \{\mathbf{A}\} \mathbf{I} \right) + c_2 \left(\mathbf{A}^2 - \frac{1}{3} \{\mathbf{A}^2\} \mathbf{I} \right)$$

Если оба тензора \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют нулевой след, то

$$\mathbf{B} = c_1 \mathbf{A} + c_2 \left(\mathbf{A}^2 - \frac{1}{3} \{\mathbf{A}^2\} \mathbf{I} \right)$$

Подобные рассуждения можно провести для функции нескольких переменных и определить общий вид функциональной зависимости. Естественно, в этом случае количество тензорных групп и тензорных инвариантов будет существенно больше.

При создании моделей Рейнольдсовых напряжений часто вместо тензора рейнольдсовых напряжений используется тензор анизотропии.

$$a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}$$

Этот тензор является безразмерным, симметричным и девиаторным. В некоторых работах используют величину $b_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij}$

Часто используются инварианты этого тензора $A_2 = a_{ij} a_{ji} = \{\mathbf{A}^2\}$ и $A_3 = a_{ij} a_{jk} a_{ki} = \{\mathbf{A}^3\}$, а также их комбинация $A = 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3)$. Эта величина является структурной характеристикой турбулентности, изотропной турбулентности соответствует $A=1$, а двумерной турбулентности (например, сворачивание слоя смешения) - $A=0$.

Обзор развития дифференциальных моделей Рейнольдсовых напряжений.

Первая модель рейнольдсовых напряжений была предложена Ротта в 1951 году. Как и большинство дифференциальных моделей того времени, это был не инструмент расчета, а попытка теоретического исследования. До середины 70-х годов особых успехов в этой области не было.

В 1975 году Launder В.Е., Reese G.J., Rodi W. предложили первую по настоящему работоспособную модель рейнольдсовых напряжений. В этой работе были изложены основные идеи построения дифференциальных моделей рейнольдсовых напряжений, а также была предложена модель, которая до сих пор является основой для разработки новых моделей и всяческих усовершенствований.

Из более современных моделей следует отметить модели GL (Гибсон, Лаундер) и SSG (Специале, Саркар, Гатски).

Заранее следует отметить, что несмотря на значительные потенциальные преимущества, чрезвычайная сложность и нелинейность этих моделей не позволила им составить сколько-нибудь серьезную конкуренцию линейным моделям турбулентности.

Дифференциальные модели Рейнольдсовых напряжений.

Уравнение для Рейнольдсовых напряжений может быть получено непосредственно из уравнений Навье-Стокса с использованием осреднения по Рейнольдсу.

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} D_{ijk} + P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}$$

$$D_{ijk} = \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j} - \overline{u'_i u'_j u'_k} - \frac{1}{\rho} (\delta_{ik} \overline{u'_j p'} + \delta_{jk} \overline{u'_i p'})$$

$$P_{ij} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

$$\Phi_{ij} = \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}$$

Для замыкания этой системы уравнений необходимо тем или иным образом промоделировать диффузионный, диссипативный и перераспределительный члены

Рассмотрим наиболее часто используемые подходы к моделированию этих слагаемых.

Диффузионные слагаемые

Для диффузионных членов в нескольких исследованиях было показано, что основной вклад вносит тройная корреляция скорости. Поэтому обычно используется один из вариантов гипотезы градиентной диффузии

$$D_{ijk} = C_s \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_l u'_j}}{\partial x_l} + \overline{u'_l u'_l} \frac{\partial \overline{u'_k u'_j}}{\partial x_l} + \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_l} \right), C_s = 0.22 \quad - \text{ сильно упрощенное}$$

уравнение для третьих моментов.

$$D_{ijk} = \left(\nu \delta_{kl} + C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \right) \frac{\partial \overline{u'_l u'_j}}{\partial x_l}, C_s = 0.22 \quad - \text{ анизотропная диффузия}$$

$$D_{ijk} = \left(\frac{2}{3} C_s \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k}, C_s = 0.22 \quad - \text{ изотропная диффузия.}$$

Изотропная диффузия проще, однако в этом случае нарушается симметричность диффузионного члена относительно перестановки индексов. В работе LRR было показано, что в простых случаях между этими подходами нет особой разницы, и что моделирование диффузионного члена не очень сильно влияет на результат. Однако сказать что-нибудь определенное про более сложные ситуации невозможно, поскольку систематические исследования влияния модели диффузии не проводились.

Диссипативные слагаемые

Для диссипативных членов наиболее простым является предположение о локальной изотропности диссипации. $\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon$. Это предположение справедливо в высокорейнольдсовом приближении (вдали от стенок).

Другим предельным случаем является предположение о пропорциональности диссипации соответствующему Рейнольдсовому напряжению. $\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i u'_j}$

Лаундер и Рейнольдс рассмотрели асимптотические разложения скорости в ряд около стенки и, после некоторого анализа, была предложена формула:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon}{k} \left[\overline{u'_i u'_j} + \alpha (\overline{u'_i u'_k n_k n_j} + \overline{u'_j u'_k n_k n_i}) + \beta \overline{u'_k u'_l n_k n_l} \delta_{ij} \right], \alpha = 1, \beta = 1.$$

В большинстве современных моделей используются разные взвеси этих подходов (например, Hanjalic (1996)).

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_s) \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon + f_s \varepsilon_{ij}^*$$

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{\varepsilon}{k} \frac{\left[\overline{u'_i u'_j} + (\overline{u'_i u'_k n_k n_j} + \overline{u'_j u'_k n_k n_i} + \overline{u'_k u'_l n_k n_l} \delta_{ij}) f_d \right]}{1 + \frac{3}{2} \frac{\overline{u'_m u'_n}}{k} n_m n_n f_d}$$

Перераспределительные слагаемые

Корреляция давление – скорость деформации является наиболее важной для получения хорошего результата и наиболее сложной для моделирования.

В основе всех современных моделей лежит работа Chou 1945 года. В этой работе показано, что если взять дивергенцию уравнения для пульсационной составляющей скорости получится уравнение Пуассона для пульсаций давления. Исключая давление из корреляции давление-скорость деформации можно показать, что она может быть представлена в следующем виде

$$\frac{p'}{\rho} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\pi} \int_{vol} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u'_l u'_m}{\partial x_l \partial x_m} \right)_Y \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)_X + 2 \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right)_X \left(\frac{\partial u'_m}{\partial x_l} \right)_Y \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)_X \right\} \frac{dvol}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + S_{ij},$$

где S_{ij} - интеграл по поверхности, который пренебрежимо мал вдали от твердой границы. Это позволяет разделить соответствующую корреляцию на две части.

$$\Phi_{ij} = \varepsilon \cdot A_{ij}(\mathbf{a}) + k M_{ijkl}(\mathbf{a}) \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$$

Иными словами, можно выделить слагаемые, не зависящие от производной скорости $\Phi_{ij,1}$ («медленное», slow слагаемое, слагаемое Ротта), и слагаемые, зависящие от нее $\Phi_{ij,2}$ («быстрое», rapid слагаемое).

Поскольку $\Phi_{ij,1}$ зависит только от тензора анизотропии, исходя из тензорного анализа все модели имеют вид

$$\Phi_{ij,1} = -\varepsilon \left(C_1 a_{ij} + C_2 \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \right)$$

Моделирование $\Phi_{ij,2}$ оставляет гораздо больше свободы для творчества, поэтому различные модели различаются в основном моделированием этого слагаемого. Наиболее простой корреляцией является упрощенная модель LRR

$$\Phi_{ij,2} = -\gamma \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right), \gamma = 0.6$$

В той же работе был проведен анализ тензора четвертого ранга $M_{ijkl}(\mathbf{a})$, и на основе кинематических ограничений и предположения о линейности этого тензора относительно тензора анизотропии была предложена модель

$$\Phi_{ij,2} = -\frac{c_2 + 8}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) - \frac{30c_2 - 2}{55} 2k S_{ij} - \frac{8c_2 - 2}{11} \left(Q_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right), c_2 = 0.4$$

Все рассмотренные слагаемые строились без учета влияния стенки. Задача построения слагаемых, учитывающих влияние стенки, оказывается еще более сложной. Как правило, безразмерной характеристикой расстояния до стенки является величина

$f(l/x_n) = \frac{k^{1.5}}{2.5 \varepsilon x_n}$. Легко показать, что в логарифмической области эта величина равна 1:

$k = \frac{v_*^2}{C_\mu^{0.5}}$, $\varepsilon = \frac{v_*^3}{\kappa u}$, $2.5 = \frac{\kappa}{C_\mu^{3/4}}$. Существует множество вариантов слагаемых для учета

влияния стенки, вот, например, один из них

$$\Phi_{ij,1}^w = C_1^w \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_k u'_m n_k n_m} \delta_{ij} - 1.5 \overline{u'_k u'_i n_k n_j} - 1.5 \overline{u'_k u'_j n_k n_i} \right) f(l/x_n)$$

$$\Phi_{ij,2}^w = C_2^w \left(\Phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - 1.5 \Phi_{ki,2} n_k n_j - 1.5 \Phi_{kj,2} n_k n_i \right) f(l/x_n)$$

Определение изотропной диссипации

Наконец, уравнение для изотропной диссипации необходимо для определения ε . Однако, как показал опыт расчетов, модель рейнольдсовых напряжений «наследует» свойства базовой модели. Это значит, что использование уравнения для ε приведет к существенным ошибкам в случае течений с положительным градиентом давления.

Один из вариантов решения проблемы – введение в уравнение для ε специальных поправок, которые начинают работать при нарушении характера поведения турбулентных характеристик на логарифмическом участке профиля скорости, например

$$E = \max \left[\left[\left(\frac{1}{C_\mu^{-3/4} \kappa} \frac{\partial l}{\partial y} \right)^2 - 1 \right] \left(\frac{1}{C_\mu^{-3/4} \kappa} \frac{\partial l}{\partial y} \right)^2 A \frac{\varepsilon \xi}{k}, 0 \right], \quad l = \frac{k^{1,5}}{\varepsilon}$$

Иногда используют уравнение для завихренности ω , но большинство исследователей традиционно предпочитают уравнение для ε .

Пример DRSM - модель Спезиале, Саркара, Гатски

Высокореинольдсовая версия

$$\Phi_1 = -\rho \varepsilon \left[\left(C_{s1} + C_{r1} \frac{P_k}{\varepsilon} \right) \mathbf{a} + C_{s2} \left(\mathbf{a}^2 - \frac{1}{3} A_2 \mathbf{I} \right) \right]$$

$$\Phi_2 = \rho k \left[\left(C_{r2} - C_{r3} A_2 \right) \mathbf{S}_{ij} + C_{r4} \left(\mathbf{aS} + \mathbf{Sa} - \frac{2}{3} \{ \mathbf{aS} \} \mathbf{I} \right) + C_{r5} (\mathbf{a}\Omega + \Omega \mathbf{a}) \right]$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$$

$$D_{ijk} = \frac{2}{3} C_s \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial x_k}$$

Уравнение для диссипации

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \varepsilon)}{\partial x_j} = c_{\varepsilon 1} \rho \frac{\varepsilon}{k} P_k - \rho c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)$$

Коэффициенты модели:

C_{s1}	C_{s2}	C_{r1}	C_{r2}	C_{r3}	C_{r4}	C_{r5}	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_ε
1.7	-1.05	0.9	0.8	0.65	0.625	0.2	1.44	1.83	1.3

Низкорейнольдсовая версия

$$\Phi_1 = -\rho \varepsilon \left[C_1 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{C_1} \right) f_w \right\} \mathbf{a} + C_1' (1 - f_w) \left(\mathbf{a}^2 - \frac{1}{3} A_2 \mathbf{I} \right) \right]$$

$$\Phi_2 = \rho \varepsilon \left[C_{01} \mathbf{S}_{ij} + C_{11} \left(\mathbf{aS} + \mathbf{Sa} - \frac{2}{3} \{ \mathbf{aS} \} \mathbf{I} \right) + C_{12} (\mathbf{a}\Omega + \Omega \mathbf{a}) \right]$$

$$\Phi_w = f_w \left[0.45 \left(\mathbf{P} - \frac{2}{3} P_k \mathbf{I} \right) - 0.03 \left(\mathbf{Q} - \frac{2}{3} P_k \mathbf{I} \right) + 0.16 k \mathbf{S} \right]$$

$$P_{ij} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right), \quad P_k = \frac{1}{2} P_{ii}$$

$$Q_{ij} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)$$

$$C_1 = 1.7 + 0.9 \frac{P_k}{\varepsilon},$$

$$C_1' = -1.05,$$

$$C_{01} = 0.8 - 0.65 \sqrt{A_2},$$

$$C_{11} = 0.625,$$

$$C_{12} = 0.2$$

$$f_w = \exp \left[- \left(0.0184 \frac{\sqrt{k} y}{\nu} \right)^4 \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (U_k \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_k} d_k^{(\varepsilon)} + [C_{\varepsilon 1} (1 + C_{\varepsilon 4} f_w) p - C_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \varepsilon^*] \frac{\varepsilon}{k} + \xi$$

$$\text{где, } d_k^{(\varepsilon)} = (\nu \delta_{kl} + C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l}$$

$$f_\varepsilon = 1 - \frac{2}{9} \exp[-(R_t/6)^2]; \quad R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}, \quad \varepsilon^* = \varepsilon - 2 \frac{\nu k}{y^2}, \quad \xi = \left[(-2 + \frac{7}{9} C_{\varepsilon 2}) \frac{\varepsilon \varepsilon^*}{k} - \frac{\varepsilon^{*2}}{2k} \right] f_w$$

Коэффициенты модели $(C_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 4}) = (0.15, 1.35, 1.8, 1.0)$

Основные проблемы, возникающие при использовании моделей реинольдсовых напряжений.

1. Сложность системы дифференциальных уравнений (не менее 7 уравнений для турбулентности), требующих для решения больших вычислительных ресурсов.
2. Эта система уравнений кроме громоздкости отличается сильной нелинейностью, что приводит к необходимости использовать различные ухищрения для улучшения устойчивости и сходимости. К таковым относятся специальные схемы, векторные прогоны и использование сложных алгоритмов демпфирования. При решении столь нелинейной системы уравнений возникают численные проблемы, для решения которых приходится пользоваться специальными приемами.
3. Полученное решение может быть неприемлемым с физической точки зрения. Это происходит, когда оно не удовлетворяет принципу реализуемости $\overline{u_i'^2} \geq 0, \overline{u_i'^2} \cdot \overline{u_j'^2} \geq (\overline{u_i' u_j'})^2, \det \{ \overline{u_i' u_j'} \} \geq 0$. Невозможность априори гарантировать выполнение этого принципа приводит к необходимости проверять его в каждом конкретном случае и к последующей выбраковке результатов «дефектных» расчетов. Очевидно, что такой инструмент неприменим для «инженерного» использования.
4. Кроме того, возникают проблемы с постановкой граничных условий на свободных границах для напряжений.

5. При расчете задач теплопередачи необходимо решать еще 3 дополнительных уравнения для корреляций скорости и температуры, что еще больше усложняет систему.
6. Также следует отметить, что все модели рейнольдсовых напряжений калибровались и тестировались на простейших течениях несжимаемой жидкости. Для кривизны и вращения, сжимаемости и т.п. требуется введение специальных поправок, разработка которых для столь сложных моделей является если не безнадежной, то крайне трудоемкой работой.

Попытка упростить DRSM привела к созданию алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений, которые могут быть получены из дифференциальных моделей при использовании некоторых предположений.

Алгебраические модели Рейнольдсовых напряжений.

Первые алгебраические модели были основаны на гипотезе локального равновесия генерации и диссипации турбулентности $(P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}) = 0$. Однако это предположение оказалось слишком грубым и несправедливым для большинства ситуаций.

Ключевой в развитии алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений оказалась идея Родри о пропорциональности генерации и диссипации турбулентности соответствующим величинам для кинетической энергии турбулентности

$$(P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}) = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} (P_k - \varepsilon).$$

Это предположение позволяет из любой дифференциальной модели рейнольдсовых напряжений сделать соответствующую алгебраическую модель. Например, подставив в эту формулу замыкающие из модели LRR

$$P_{ij} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

$$\Phi_{ij,1} = -C_1 \varepsilon a_{ij}$$

$$\Phi_{ij,2} = -\gamma \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right), \gamma = 0.6$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon$$

можно получить соответствующую алгебраическую модель.

Для окончательного замыкания модели необходимо определить величины кинетической энергии турбулентности k и изотропной диссипации ε . Уравнения для определения этих величин называются базой модели. Как показали многочисленные исследования, модель рейнольдсовых напряжений в значительной степени «наследует» свойства базовой модели. Это означает, что в этом случае сохраняются проблемы, связанные с градиентом давления при использовании уравнения для ε .

К сожалению, использование алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений не решает всех проблем.

Во-первых, как и в случае дифференциальных моделей, невозможно априори гарантировать выполнение принципа реализуемости.

Кроме того, добавляются сложности, связанные с необходимостью решения системы трансцендентных алгебраических уравнений. Эта система может вообще не иметь действительных решений, а может иметь их несколько. Наличие нескольких решений может приводить к «перескоку» с одной ветки на другую.

Явные алгебраические модели Рейнольдсовых напряжений

Попытки решить проблемы алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений привели к созданию явных алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений, т.е. тем или иным способом разрешить алгебраически уравнения относительно напряжений.

Такой подход сразу решает несколько проблем. Во-первых, нет необходимости решать систему трансцендентных уравнений. Во-вторых, в этом случае можно решить проблемы не единственности решения, провести регуляризацию сингулярностей и т.п. Наконец, при наличии явного выражения для напряжений легко провести проверку принципа реализуемости.

С другой стороны, из любой дифференциальной модели рейнольдсовых напряжений можно получить соответствующую алгебраическую модель, но не любая алгебраическая модель может быть разрешена относительно напряжений. Это несколько ограничивает возможности и свободу творчества в первую очередь при моделировании корреляции давление-скорость деформации.

В рамках явных алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений не менее важным аспектом является выбор базы модели, поскольку недостатки «базовой» модели наследуются моделью Рейнольдсовых напряжений.

Следует также отметить чрезвычайную сложность калибровки констант в подобных моделях, поскольку они содержат много сложных и нелинейных слагаемых.

Теория построения таких моделей была разработана Pore, 1975 и базируется на следующих основаниях. С точки зрения тензорной математики тензор анизотропии должен зависеть от производной скорости $\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$, т.е. он является функцией симметричного тензора скоростей деформаций S_{ij} и антисимметричного тензора завихренности Ω_{ij} . При помощи тензорного анализа можно показать, что тензор анизотропии $a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} / k - 2/3$ является линейной комбинацией 10 тензорных групп $a = \sum_{i=1}^{10} \beta_i T_i$. Каждый из этих 10 тензоров является симметричным, девиаторным и зависит только от тензоров S и Ω . При этом коэффициенты β_i могут быть функциями только 5 тензорных инвариантов $\{S^2\}, \{\Omega^2\}, \{S^3\}, \{S\Omega^2\}, \{S^2\Omega^2\}$.

$$\begin{aligned}
T_1 &= S \\
T_2 &= S^2 - \frac{1}{3} \{S^2\} I \\
T_3 &= \Omega^2 - \frac{1}{3} \{\Omega^2\} I \\
T_4 &= S\Omega - \Omega S \\
T_5 &= S^2\Omega - \Omega S^2 \\
T_6 &= S\Omega^2 + \Omega^2 S - \frac{2}{3} \{S\Omega^2\} I \\
T_7 &= S^2\Omega^2 + \Omega^2 S^2 - \frac{2}{3} \{S^2\Omega^2\} I \\
T_8 &= S\Omega S^2 - S^2\Omega S \\
T_9 &= \Omega S\Omega^2 - \Omega^2 S\Omega \\
T_{10} &= \Omega S^2\Omega^2 - \Omega^2 S^2\Omega
\end{aligned}$$

Количество ненулевых коэффициентов, а также максимальная степень, входящая в используемые тензорные группы определяют сложность модели.

Наиболее известными и часто используемыми являются, пожалуй, две явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений, созданные в середине 90х годов.

Первая из них создана Wallin, Johansson (1997). Авторы взяли высокорейнольдсовую модель LRR, вывели из нее алгебраическую модель рейнольдсовых напряжений, нашли явное решение относительно напряжений. Рассмотрев результаты прямого численного моделирования течения в канале, авторы добавили в выражение для рейнольдсовых напряжений демпфирующую функцию, аналогичную функции Ван-Дрифта. Использование полей скорости, кинетической энергии турбулентности и диссипации, полученных в рамках DNS позволило авторам независимо произвести отладку самой модели, а потом, не меняя модель, подобрать к ней наиболее подходящую базу.

$$\begin{aligned}
a &= f_1 \beta_1 \tau T_1 + (1 - f_1^2) \frac{3B_2 - 4}{\max(\Pi_S, \Pi_S^{eq})} \tau^2 T_2 + f_1^2 \beta_3 \tau^2 T_3 + \\
&+ \left[f_1^2 \beta_4 - (1 - f_1^2) \frac{B_2}{2 \max(\Pi_S, \Pi_S^{eq})} \right] \tau^2 T_4 + f_1 \beta_6 \tau^3 T_6 + f_1^2 \beta_9 \tau^4 T_9, \\
f_1 &= 1 - \exp\left(-\frac{dv^*}{vA^+}\right),
\end{aligned}$$

При этом характерный масштаб времени турбулентного переноса определяется по формуле, предложенной Дурбиным (турбулентный временной масштаб ограничен снизу диссипативным масштабом)

$$\begin{aligned}
\tau &= \max(k/\varepsilon, 6 \cdot \sqrt{v/\varepsilon}). \\
\beta_1 &= -\frac{N(2N^2 - 7\Pi_\Omega)}{Q}, \beta_3 = -\frac{12IV}{NQ}, \beta_4 = -\frac{2(N^2 - 2\Pi_\Omega)}{Q}, \\
\beta_6 &= -\frac{6N}{Q}, \beta_9 = \frac{6}{Q}, Q = \frac{5}{6}(N^2 - 2\Pi_\Omega)(2N^2 - \Pi_\Omega), \\
\Pi_S &= \tau^2 \{S^2\}, \Pi_\Omega = \tau^2 \{\Omega^2\}, \Pi_S = \tau^3 \{S^3\}, IV = \tau^3 \{S\Omega^2\}, V = \tau^4 \{S^2\Omega^2\},
\end{aligned}$$

$$N = N_c + \frac{162(\phi_1 + \phi_2 N_c^2)}{D}, \phi_1 = IV^2, \phi_2 = V - 0.5II_s II_\Omega,$$

где N_c представляет собой решение следующего кубического уравнения $N_c^3 - C_1' N_c^2 - (2.7 \cdot II_s + 2 \cdot II_\Omega) N_c + 2C_1' II_\Omega = 0$.

Это решение можно представить в виде:

$$N_c = \frac{C_1'}{3} + (P_1 + \sqrt{P_2})^{1/3} + \text{sign}(P_1 - \sqrt{P_2}) |P_1 - \sqrt{P_2}|^{1/3} \quad \text{при } P_2 \geq 0,$$

$$N_c = \frac{C_1'}{3} + 2(P_1^2 - P_2)^{1/6} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right)\right) \quad \text{при } P_2 < 0,$$

где

$$P_1 = \left(\frac{C_1'}{27} + \frac{9}{20} II_s - \frac{2}{3} II_\Omega\right) C_1', P_2 = P_1^2 - \left(\frac{C_1'}{9} + \frac{9}{10} II_s + \frac{2}{3} II_\Omega\right).$$

Константы модели:

$$C_1' = 2.25 \cdot (C_1 - 1), C_1 = 1.8, B_2 = 1.8, A^+ = 26, II_s^{eq} = \frac{405 \cdot C_1^2}{216 \cdot C_1 - 160}.$$

Следует отметить, что генерационный и диффузионный члены в дифференциальных уравнениях для k , ε и ω имеют свои особенности. Так, турбулентная вязкость, необходимая для вычисления диффузионного члена вычисляется по формуле $\mu_T = -\rho f_1 k \tau \frac{\beta_1 + II_\Omega \beta_6}{2}$, а в генерационном члене необходимо использовать $P_k = -\tau_{ij}^t S_{ij}$, а не $P_k = \nu_T S^2$.

В качестве базы модели можно использовать k - ε модель Чена с некоторыми изменениями, которые касаются формулы для диссипации.

$$\varepsilon = \xi + 2\nu k/d^2 \rightarrow \varepsilon = \xi + 2\nu k/d^2 \cdot \exp\left(-0.04 \cdot \frac{dv_*}{\nu}\right),$$

Для k - ω версии базовой являлась низкорейнольдсовая модель Wilcox с измененным коэффициентом $R_\beta = 10$ (вместо 8 в оригинальной модели). Турбулентный масштаб времени равен при этом

$$\tau = \max\left((\beta^* \omega)^{-1}, 6 \cdot \sqrt{\nu/(\beta^* \omega k)}\right).$$

Эта модель, с незначительными изменениями и поправкой на кривизну линий тока, в настоящее время широко используется для расчетов турбулентных течений.

Другой известной моделью является модель, разработанная Speziale и его коллегами (Abid, Rumsey, Gatski, 1995). Эта модель, в отличие от модели Wallin, Johansson содержит члены только второго порядка и включена в различные коммерческие коды.

$$a = -\frac{2\nu_T}{k} T_1 + \frac{2\alpha_5 \tau \nu_T}{k} T_2 - \frac{2\alpha_4 \tau \nu_T}{k} T_4,$$

$$\nu_T = C_\mu^* k \tau, C_\mu^* = \frac{3\alpha_1(1 + \eta^2)}{3 + \eta^2 + 6\xi^2 \eta^2 + 6\xi^2},$$

$$\eta^2 = \alpha_2 \tau^2 \{S^2\}, \xi^2 = \alpha_3 \tau^2 \{\Omega^2\}$$

Константы модели:

$$\alpha_1 = \left(\frac{4}{3} - C_2\right) \frac{g}{2}, \alpha_2 = (2 - C_3)^2 \frac{g^2}{4}, \alpha_3 = (2 - C_4)^2 \frac{g^2}{4},$$

$$\alpha_4 = \left(1 - \frac{C_4}{2}\right) g, \alpha_5 = (2 - C_3) g, g = \left[\left(\frac{C_1}{2}\right) + C_5 - 1\right]^{-1},$$

$$C_1 = 3, C_2 = 0.8, C_3 = 1.75, C_4 = 1.31, C_5 = 2.$$

База модели k - ω :

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_{TI}}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \omega k,$$

$$\rho \frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_{TI}}{\sigma_\omega} \right) \nabla \omega \right) + C_{\omega 1} \frac{\omega}{k} P_k - \rho C_{\omega 2} \omega^2.$$

Здесь:

$$\mu_{TI} = C_{\mu l}^* \rho k / \omega, \tau = \omega^{-1}.$$

Константы модели:

$$\sigma_k = 1.4, \sigma_\omega = 2.0, C_{\mu l}^* = 0.088, \kappa = 0.41,$$

$$C_{\omega 2} = 0.83, C_{\omega 1} = C_{\omega 2} - \frac{\kappa^2}{\sigma_\omega \sqrt{C_{\mu l}^*}}.$$

Как видно из рассмотренных примеров, явные алгебраические модели турбулентности представляют собой нелинейный аналог гипотезы Буссинеска. вопрос о необходимой степени нелинейности модели остается открытым, поскольку априори неочевидна необходимость использования слагаемых порядка выше второго. С одной стороны, без таких слагаемых невозможно описать некоторые особенности течений (например, нелинейность профиля тангенциальной скорости при течении во вращающейся круглой трубе). С другой стороны, при включении таких слагаемых модель существенно усложняется без четкого осознания практической необходимости такого усложнения.

Суммируя вышесказанное относительно моделей рейнольдсовых напряжений можно констатировать следующее.

1. Потенциально модели рейнольдсовых напряжений гораздо перспективней моделей турбулентной вязкости.
2. Чрезвычайная сложность таких моделей (за исключением явных алгебраических), а также проблемы с принципом реализуемости не позволяет сделать из них надежный инженерный инструмент расчета с понятными свойствами.
3. Явные алгебраические модели могут стать хорошим инструментом расчета течений, в которых необходимо учитывать анизотропию рейнольдсовых напряжений.

Линейные модели Рейнольдсовых напряжений, построенные на основе масштабов, полученных из моделей рейнольдсовых напряжений.

Наряду со способностью предсказывать анизотропию турбулентности модели рейнольдсовых напряжений обладают еще одним очень важным свойством: они содержат гораздо больше различных масштабов турбулентности. Оказалось, что некоторые из этих

масштабов могут быть использованы при построении линейных моделей турбулентной вязкости.

Наиболее ярким примером использования подобных масштабов является модель Дурбина. Анализируя результаты DNS, Дурбин заметил, что в окрестности стенки (на логарифмическом участке профиля скорости) гораздо более точной является не традиционная зависимость $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$, а $\nu_t = C_\mu \frac{\overline{v'^2}}{\varepsilon} k$ (рис. 22).

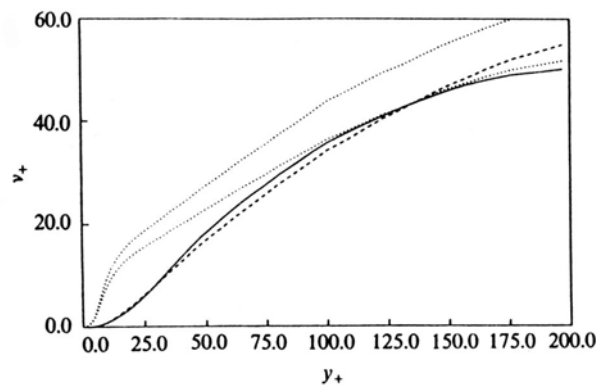


Рис. 22. Сравнение турбулентной вязкости, полученной по результатам DNS (сплошная линия), с использованием различных моделей на основе профиля скорости из DNS (точки - $k-\varepsilon$, штриховая линия - $k - \varepsilon - \overline{v'^2}$).

Несоответствие в традиционной формуле приводит к необходимости использования специальных демпфирующих функций в традиционных низкорейнольдсовых моделях типа $k-\varepsilon$.

Базируясь на этом свойстве, Дурбин придумал модель с тремя дифференциальными уравнениями для k , ε и $\overline{v'^2}$. Отличительным свойством этой модели является отсутствие слагаемых с расстоянием до стенки.

Кроме того, Дурбин для генерации в уравнении для $\overline{v'^2}$ использовал эллиптическое уравнение. Как и в модели Секундова S-96 это необходимо для корректного учета невязкого влияния стенки (так называемый бессдвиговый пограничный слой). Итоговая модель содержит три дифференциальных уравнения переноса и одно эллиптическое уравнение для генерации $\overline{v'^2}$.

Одной из основных трудностей при реализации этой модели является граничное не твердой стенке для $\overline{v'^2}$ и $f = \frac{P_{22}}{k}$ вида $f(0) = -\frac{20\nu^2 \overline{v'^2}}{\varepsilon(0)y^4}$. Использование граничного условия такого вида очень затруднительно в большинстве программ.

За прошедшее время было создано несколько модификаций этой модели с оригинальными и различным образом модифицированными (code-friendly) граничными условиями ($f \xrightarrow{y \rightarrow 0} -2\nu(\overline{v'^2}/k)/y^2$). Опыт расчетов показал, что в целом эта модель качественно очень хорошо описывает особенности течения. Хуже всего обстоят дела с предсказанием трения на поверхности, результат сильно зависит от версии модели и

может существенно отличаться от экспериментальных данных. Причиной такого поведения, по-видимому, является отсутствие «жестко» встроенного в модель логарифмического «закона стенки».

Также негативную роль играет большое количество различных версий модели (наборов констант) без подробного описания алгоритма калибровки модели.

Из «побочных» продуктов этой модели следует отметить определения масштабов времени и длины, ограниченных снизу Колмогоровскими масштабами.

$$T = \max\left(\frac{k}{\varepsilon}, C_{\tau}\left(\frac{v}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right)$$

$$L = \max\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_{\eta}\left(\frac{v^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}\right)$$

Также существует несколько нелинейных версий этой модели. Все они построены по принципу модели Speziale.

Существуют и другие модели, построенные на использовании масштабов, полученных из рейнольдсовых напряжений. В частности, можно отметить нелинейную модель Suga, Graft, Launder с тремя дифференциальными уравнениями относительно k , ε и A_2 .

В целом, такие модели оказываются слишком сложными для того, чтобы стать реальными конкурентами лучшим из существующих моделей турбулентности.

Вихреразрешающие методы.

Модели турбулентности, о которых мы говорили раньше, были созданы и соответствующим образом откалиброваны для расчета стационарных течений. Это не означает, что они не могут быть применены к тем нестационарным задачам, где нестационарность определяется геометрически подвижными границами, источниками, зависящими от времени, или переменными граничными условиями, а не внутренней неустойчивостью течения. В этом случае для оправданного применения таких моделей необходимо, чтобы турбулентность в таких течениях была квазистационарной, т.е. характерный турбулентный масштаб времени должен быть существенно меньше характерного периода задачи. Если это условие не выполняется, то нет никаких оснований считать, что полученное решение будет правильным (но и не означает обратного).

Существует, однако, очень широкий класс задач, которые являются стационарными и даже двумерными с точки зрения постановки, однако в реальном течении наблюдается периодическая или квазипериодическая картина. Типичными примерами таких течений являются обтекание цилиндра или профиля при больших углах атаки, «сворачивание» слоя смешения и т.д. Иногда такие режимы течения называют автоколебательными. Упорядоченные вихревые структуры, получающиеся при таком течении, часто называют когерентными, они вносят основной вклад в энергетический спектр турбулентности.

Использование RANS для решения подобных задач зачастую не приводит к хорошему результату, поскольку результаты статистического подхода (RANS) существенно зависят от структуры наиболее крупных вихрей. При этом невозможно создать «универсальный» набор констант в модели турбулентности, пригодный во всех

ситуациях и учитывающий специфику когерентных структур в каждом конкретном случае.

Таким образом, для успешного решения подобных задач необходимо разрешать по крайней мере наиболее крупные (когерентные) вихревые структуры. Существует целый спектр методов, позволяющих это сделать. Совокупность этих методов не имеет устоявшегося названия, но по смыслу их можно назвать «вихреразрешающие» методы. Все эти методы несколько общих свойств:

1. Для их использования необходимо проводить решение трехмерной нестационарной задачи, независимо от того является исходная задача таковой или нет. Использование какой-либо симметрии при этом также не является оправданным.
2. Для получения осредненных по времени характеристик необходимо осреднение решения по большим интервалам времени (существенно больше периода наиболее длинноволновых колебаний), при этом шаг по времени должен быть достаточным для разрешения наиболее мелких структур.

Все это приводит к тому, что даже при использовании наиболее простых и грубых вихреразрешающих методов каждый расчет сопряжен с существенными вычислительными затратами. Именно поэтому, вплоть до середины 90-х годов, использование подобных методов могли себе позволить очень немногочисленные группы исследователей, имеющие доступ к высокопроизводительным суперкомпьютерам. В настоящее время ситуация изменилась, проведение подобных расчетов стало возможным на базе обычного современного ПК. Именно поэтому в последнее десятилетие интерес к вихреразрешающим методам существенно вырос, все больше исследователей используют такие методы и занимаются их разработкой и усовершенствованием.

Каскадный перенос энергии

Различие между разными методами наиболее хорошо видно на основе так называемых спектров турбулентности. Общепринятыми являются энергетические спектры, т.е. разложение кинетической энергии турбулентности в спектр по волновым числам. Во многих случаях (в частности, вырождение однородной изотропной турбулентности) этот спектр оказывается таким, как на рис. 23.

С точки зрения неподвижного наблюдателя, наиболее крупные вихри, проходя через точку пространства, соответствуют колебаниям с длинным периодом, т.е. с низкой частотой (волновым числом). Мелкие вихри, напротив, соответствуют высокочастотным колебаниям.

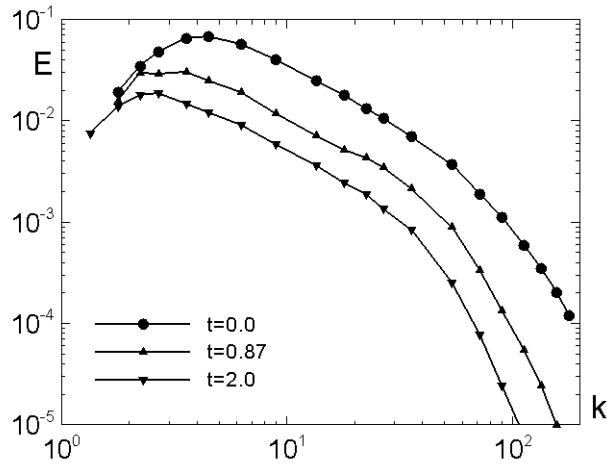


Рис. 23. Энергетический спектр однородной изотропной турбулентности

Важным понятием является так называемый каскадный перенос энергии, т.е. передача энергии от более крупных вихрей к вихрям меньшего размера. При этом наиболее крупные вихри получают энергию от осредненного течения, а наиболее мелкие диссипируют в тепло. Если число Рейнольдса достаточно высоко, то между крупными вихрями, взаимодействующими с осредненным потоком, и мелкими вихрями, диссипирующими в тепло существует область размеров вихрей, которые взаимодействуют только друг с другом. Иными словами, некий вихрь в инерционном интервале взаимодействует только с «соседними» по размеру вихрями. Более крупные вихри для него играют роль осредненного потока, для более мелких вихрей такую роль играет он сам. Вихри, которые значительно крупнее его не оказывают на него никакого влияния (только переносят его), поскольку изменение скорости внутри них на расстояниях, соизмеримых с его размером, пренебрежимо мало. По той же причине он не взаимодействует с существенно более мелкими вихрями. В инерционном интервале можно считать, что для большого диапазона вихрей внутри него взаимодействие осуществляется только с вихрями, лежащими в инерционном интервале, что приводит к закону $-5/3$.

Классификация вихреразрешающих методов

Наиболее строгим подходом к численному моделированию любых, в том числе, и автоколебательных турбулентных течений является так называемое прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation или DNS). Однако вычислительные ресурсы, необходимые для реализации DNS при представляющих практический интерес высоких числах Рейнольдса настолько велики, что его применение для решения прикладных задач аэродинамики даже при самых оптимистичных прогнозах относительно развития вычислительной техники станет возможным лишь через 40-50 лет.

Вторым возможным подходом к расчету автоколебательных течений является метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation или LES). В рамках этого подхода, предложенного еще в середине прошлого века, относительно крупные (с размерами существенно превышающими размеры используемой вычислительной сетки)

турбулентные структуры (вихри), рассчитываются “точно” (без использования каких-либо эмпирических моделей турбулентности), в то время как мелкомасштабная турбулентность (с размерами вихрей меньшими размеров сетки) моделируется с помощью замыкающих соотношений для “подсеточной турбулентности” сходных с традиционными полуэмпирическими моделями, используемыми для замыкания RANS. Принципиальное преимущество LES перед RANS состоит в том, что благодаря относительной однородности и изотропности мелкомасштабной турбулентности, задача построения подсеточных моделей оказывается существенно более простой, чем построение моделей турбулентности для RANS, в которых необходимо моделировать весь спектр турбулентности, т.е. результаты LES оказываются значительно менее чувствительными к выбору тех или иных замыкающих соотношений, чем результаты RANS..

В последние годы для расчета автоколебательных турбулентных потоков достаточно широкое применение получил более экономичный подход, базирующийся на нестационарных уравнениях Рейнольдса (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes equations или URANS). Однако с теоретической точки зрения правомерность этого подхода далеко не очевидна и имеющийся опыт его применения весьма противоречив и недостаточен для формулировки каких-либо общих выводов о границах его применимости. Поэтому применение URANS для каждого нового типа автоколебательных течений требует проведения достаточно трудоемких численных исследований и сопоставления результатов расчетов с экспериментом или с аналогичными результатами расчетов с помощью LES.

Все это стимулировало развитие большого количества гибридных методов, объединяющих в себе лучшие качества RANS и LES. В целом, вихреразрешающие методы можно представить в виде пирамиды, в которой более высокие уровни с одной стороны менее зависимы от моделирования, с другой – требуют больше ресурсов.

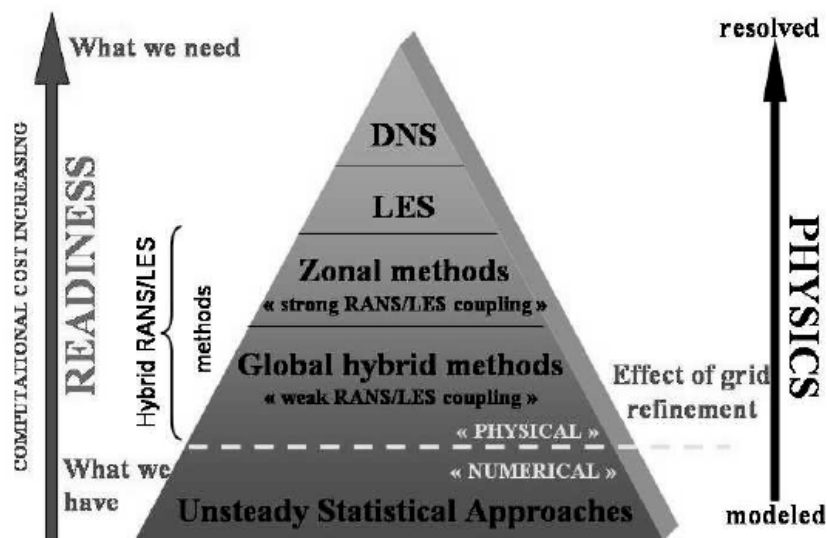


Рис. 24. Классификация гибридных методов

При этом разрешенная и моделируемая часть спектра для разных подходов представлены на рис. 25.

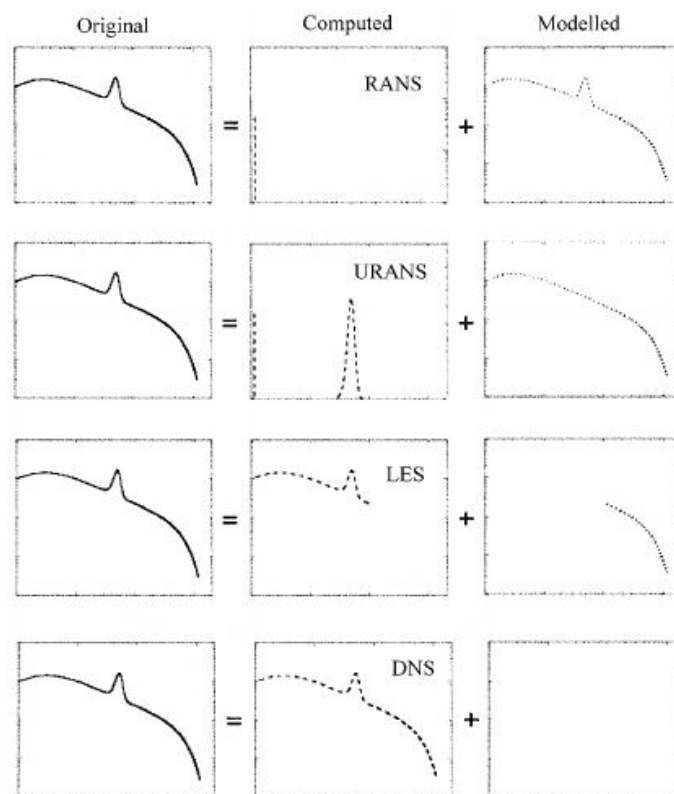


Рис. 25. Условное разделение на разрешенную и моделируемую части спектра для различных методов

Гибридные методы в различных областях потока используют наиболее подходящий в этой области метод: LES и URANS. Возможность этого обусловлена тем, что в присоединенных пограничных слоях с одной стороны RANS обеспечивает приемлемую точность расчета, с другой стороны для их разрешения в рамках LES требуются огромные вычислительные ресурсы.

Различия между гибридными методами, степень их близости к LES или URANS, могут быть условно проведены по следующим критериям.

1. Способ определения границы между RANS и LES областями. Эта граница может быть проведена геометрически, определяться автоматически исходя из качества сетки или свойств решения.
2. Используемая модель турбулентности ближе к подсеточной или к традиционной RANS модели. Наиболее очевидным критерием является использование в модели шага сетки, так RANS модели в качестве не используют шаг сетки, а подсеточные – используют.
3. Поведение решения при измельчении сетки (grid refinement). В случае традиционных RANS моделей измельчение шага сетки приводит к получению все более и более точного решения, начиная с определенного качества сетки решение перестает меняться (такое решение называется сошедшимся по сетке). Для LES имеет смысл говорить только о сходимости осредненного по времени решения. Измельчение шага

сетки приводит к тому, что разрешаются все меньшие и меньшие вихри, в конечном итоге LES должен переходить в DNS.

4. Поведение модели в «предельных» случаях, иными словами может ли используемая модель работать в «чистом» RANS и в «чистом» LES режиме.
5. Как производится обмен информацией о турбулентности между RANS и LES областями. На границе RANS-LES возникает некоторое противоречие, связанное с тем, что информация об одних и тех же турбулентных пульсациях с одной стороны границы моделируется, а с другой – разрешается. Для корректной работы обоих методов необходимо уметь преобразовывать информацию, т.е. уметь извлекать из нестационарного поля осредненные параметры турбулентности и восстанавливать по этим параметрам пульсации. В общем случае эта задача является очень сложной и строго решена быть не может.

Завершая краткий обзор современных подходов к численному моделированию турбулентности, приведем заимствованную из работы Спаларта таблицу, в которой представлены данные, характеризующие вычислительные ресурсы, необходимые для реализации различных подходов к численному моделированию турбулентности и перспективы их практического использования с учетом прогнозов на развитие вычислительной техники. Приведенные в этой таблице данные относятся к типичным прикладным задачам аэродинамики (расчета обтекания самолета или автомобиля без мелких деталей).

Метод	Необходимое число узлов сетки	Необходимое число шагов по времени	Готовность
2D URANS	10^5	$10^{3.5}$	1980
3D RANS	10^7	10^3	1985
3D URANS	10^7	$10^{3.5}$	1995
DES	10^8	10^4	2000
LES	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
DNS	10^{16}	$10^{7.7}$	2080

Прямое численное моделирование (DNS).

Суть этого подхода состоит в непосредственном решении трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса с использованием пространственных сеток и шагов интегрирования по времени, достаточных для разрешения всех существенных для рассматриваемого течения, в том числе, и коротковолновых пространственно-временных неоднородностей. Очевидно, что этот подход является максимально строгим, так как он базируется лишь на одном, достаточно обоснованном предположении о применимости уравнений Навье-Стокса для описания турбулентных течений. Однако, не менее очевидно и то, что для его численной реализации необходимо использовать очень мелкие сетки, количество узлов которых должно резко увеличиваться с ростом числа Рейнольдса.

Действительно, в рамках этого подхода необходимо разрешить наиболее мелкие вихри, имеющие характерный размер $\eta_k = \left(\frac{v^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$. Зависимость количества узлов сетки в одном направлении от числа Рейнольдса можно оценить следующим образом.

$$N \sim \frac{L}{\eta_k} \sim v^{-3/4} \sim \text{Re}^{3/4}$$

Поскольку DNS требует трехмерного нестационарного расчета, стоимость расчета пропорциональна общему количеству узлов сетки и количеству шагов по времени пропорциональна Re^3 . Это означает, что при увеличении числа Рейнольдса в 2 раза затраты увеличиваются примерно на порядок.

Эти жесткие требования отчасти смягчаются при использовании высокоточных спектральных методов численного интегрирования уравнений Навье-Стокса, которые часто используются для DNS. Однако эти методы неприменимы к расчету течений со сложной геометрией. Указанные обстоятельства приводят к тому, что на практике DNS применяется только для расчета простых турбулентных течений при низких (порядка единиц на 10^3 и ниже) числах Рейнольдса. При этом основной задачей расчета является не собственно получение данных о характеристиках осредненного течения (они, как правило, известны), а получение детальной информации о структуре турбулентности, а также вычисление отдельных членов, входящих в те или иные модели турбулентности.

Очевидно, что в ближайшей перспективе применение прямого численного моделирования для решения прикладных задач не возможно.

Метод моделирования крупных вихрей

Неудовлетворенность полуэмпирическими моделями турбулентности RANS, с одной стороны, и объективная невозможность проведения прямого численного моделирования турбулентных течений при интересных для практики значениях чисел Рейнольдса (Релея), с другой, стимулировали поиск иных подходов к численному описанию турбулентных течений.

Метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES), история развития которого начинается с 1960-х годов, основан на пространственной “фильтрации” системы трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса. При таком подходе перенос импульса и энергии крупными, энергонесущими структурами рассчитывается точно, а эффект мелких, неразрешаемых масштабов учитывается через “подсеточные” (SubGrid Scale, SGS) напряжения, которые подлежат моделированию. Принципиальное преимущество LES перед RANS состоит в том, что, благодаря относительной однородности и изотропности мелкомасштабной турбулентности, задача построения подсеточных моделей оказывается существенно более простой, чем построение моделей турбулентности для RANS, когда необходимо моделировать весь спектр турбулентности. Более того, по той же причине, надежды на создание “универсальной” подсеточной модели для LES являются гораздо более обоснованными, чем аналогичной модели для RANS.

Естественной платой за указанные важные преимущества LES является значительное увеличение вычислительных затрат, связанное с необходимостью, как и в случае DNS, проведения трехмерных нестационарных расчетов на достаточно мелких

сетках даже в тех случаях, когда представляющее непосредственный интерес для практики осредненное течение является двумерным и стационарным. С другой стороны, по понятным причинам (мелкомасштабная часть спектра моделируется, а не рассчитывается “точно”) вычислительные ресурсы необходимые для реализации LES оказываются намного меньшими, чем для DNS.

Операция пространственной фильтрации

В методе LES параметры течения в расчетной области разлагаются на крупномасштабную и мелкомасштабную составляющие; для их отделения используется операция пространственной фильтрации в следующем общем виде (для простоты изложения в данном разделе рассматриваются одномерные функции) [Leonard, 1974]:

$$\bar{u}(x, t) = \int_D u(x', t) G(x - x', \bar{\Delta}) dx', \quad u = \bar{u} + u' \quad (1)$$

Здесь разрешаемая (соответствующая крупномасштабному движению) величина отмечена чертой сверху, D - область решения, G - функция фильтра, $\bar{\Delta}$ - ширина фильтра, который определяет наименьший размер вихря, сохраняющегося после применения фильтрации. Упрощенно говоря, вихри с размерами больше ширины фильтра относятся к “крупным вихрям”, а имеющие размер меньший $\bar{\Delta}$ – к “мелким вихрям”. Функция фильтра G вводится так, чтобы удовлетворять интегральному условию

$$\int_D G(x - x', \bar{\Delta}) dx' = 1.$$

Среди наиболее распространенных на практике следует отметить фильтр Гаусса (используется в рамках спектральных подходов)

$$G(x - x', \bar{\Delta}) = \sqrt{\frac{6}{\pi \bar{\Delta}^2}} \cdot \exp\left[-6 \left(\frac{|x - x'|}{\bar{\Delta}}\right)^2\right]$$

и коробчатый (или “box”) фильтр

$$G(x - x', \bar{\Delta}) = \begin{cases} 1/\bar{\Delta}, & |x - x'| \leq \bar{\Delta}/2 \\ 0, & |x - x'| > \bar{\Delta}/2 \end{cases}$$

Полезно представить соотношение (1) в волновом пространстве Фурье, используя определение Фурье-образа переменной u

$$\bar{u}(k) = \int u(x') e^{-ikx'} dx',$$

где k – волновое число. В этом случае (1) преобразуется к виду:

$$\bar{u}(k) = \tilde{G}(k) \bar{u}'(k).$$

Последнее соотношение позволяет определить фильтр Фурье “с крутым срезом” (sharp cutoff filter), который в волновом пространстве выглядит так:

$$\tilde{G}(k) = \int_D G(x - x', \bar{\Delta}) e^{-ikx'} dx' = \begin{cases} 1, & k \leq \pi/\bar{\Delta} \\ 0, & k > \pi/\bar{\Delta} \end{cases}$$

Выполнение условия нормировки гарантирует, что все упомянутые функции фильтра с математической точки зрения становятся дельта - функциями Дирака ($\delta(x - x')$) при стремлении ширины фильтра $\bar{\Delta} \rightarrow 0$, так что:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_D G(x - x', \bar{\Delta}) u(x', t) dx' = \int_D \delta(x - x') u(x', t) dx' \equiv u(x, t),$$

при этом все масштабы движения разрешаются, и (формально) метод LES асимптотически приближается к высокоточному методу DNS. Типичные функции фильтра иллюстрируются на рис. 26.

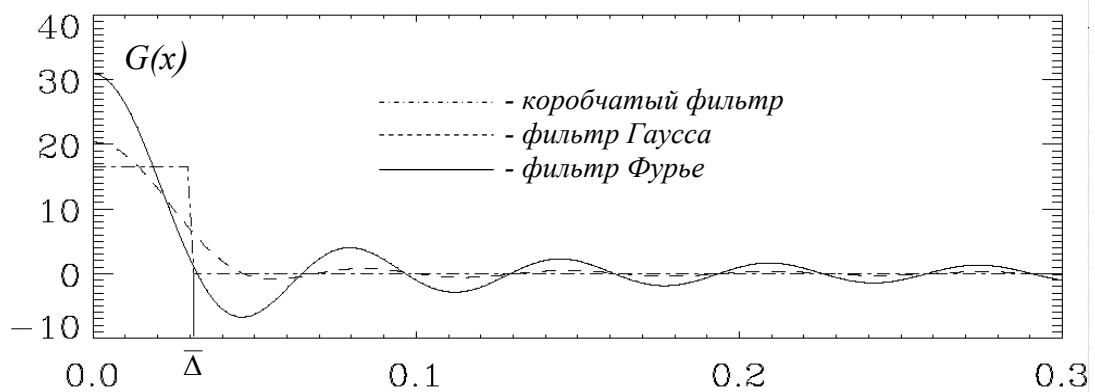


Рис. 26. Функции фильтра в физическом пространстве.

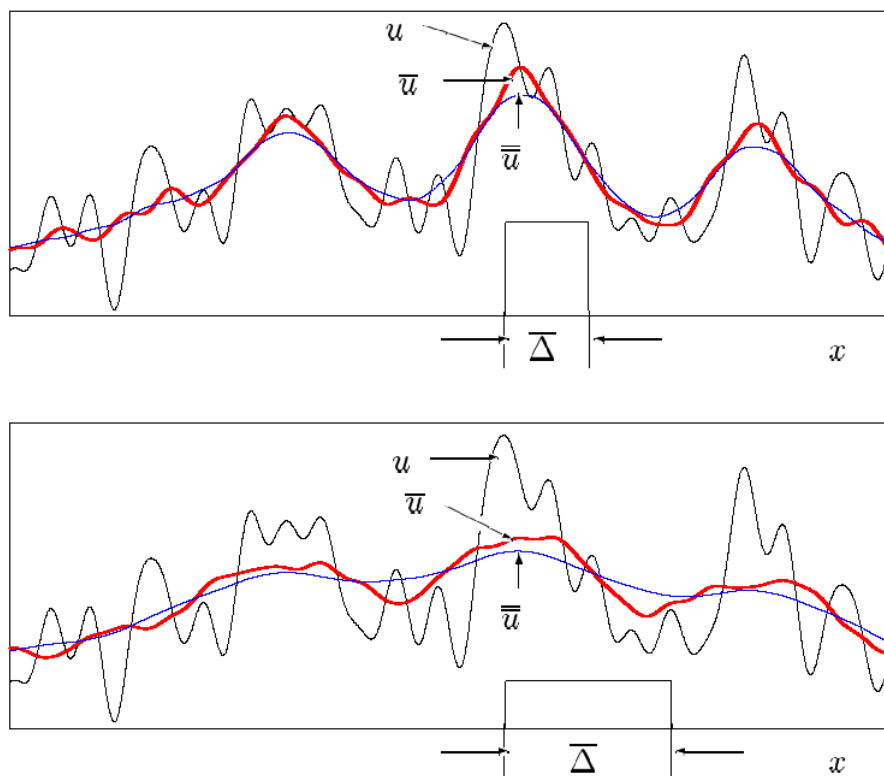


Рис. 27. Пример применения коробчатого фильтра различной ширины.

Рис. 27, заимствованный из работы [Frohlich, 2000] дает представление о применении коробчатых фильтров различной ширины $\bar{\Delta}$ к тестовой функции u . Видно, что с ростом $\bar{\Delta}$ фильтруемая функция становится все более гладкой. Дополнительное сглаживание наблюдается и при повторном применении операции фильтра.

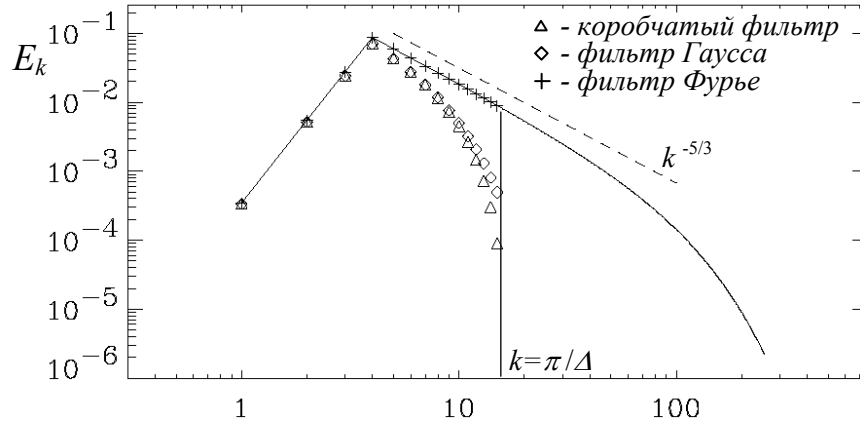


Рис. 28. Применение различных фильтров к тестовой функции, спектр которой показан сплошной линией.

На рис. 28 схематически показаны спектры функции u , полученные после применения к ней различных фильтров [Piomelli, 1998]. Вертикальная линия на рисунке соответствует значению волнового числа $k = \pi/\Delta$, определяющего границу раздела разрешаемых и неразрешаемых масштабов. Видно, что фильтр Гаусса и коробчатый фильтр дают схожие результаты, причем их сглаживающее воздействие распространяется не только на область неразрешаемых мелкомасштабных пульсаций, но и частично затрагивает область, соответствующую разрешаемому движению. Воздействие же фильтра Фурье, в отличие от них, корректно с точки зрения разделения масштабов в LES, поскольку распространяется лишь на неразрешаемые масштабы, так что $E_k(\bar{u}) = E_k(u)$ левее от линии среза и $E_k(\bar{u}) = 0$ правее от нее. Кроме того, только применение фильтра Фурье позволяет получить равенство повторно и однократно отфильтрованной функции, т.е. $\bar{\bar{u}} = \bar{u}$, поскольку для этого фильтра выполняется равенство: $(\tilde{G})^2 = \tilde{G}$. Для других фильтров:

$$\bar{\bar{u}} \neq \bar{u}, \bar{\bar{u}'} \neq 0, \overline{uv} \neq \overline{u} \overline{v}.$$

Последнее определяет, в частности, отличие пространственной фильтрации в методе LES от временного осреднения по Рейнольдсу в методе RANS.

В связи с выявленными особенностями фильтров важно отметить, что при формулировке замыкающих моделей, представляющих эффекты мелкомасштабного движения в методе LES, предполагается, что разделение масштабов на разрешаемые и неразрешаемые происходит внутри инерционного интервала турбулентного спектра, соответствующего закону $k \sim -5/3$. Если допустить, что исходно спектр функции u содержит инерционный интервал, то он может быть разрушен после применения к ней операции фильтра (см. рис. 28). Несмотря на отмеченные недостатки, по соображениям удобства в реальных численных алгоритмах обычно используются простые типы фильтров (такие, как коробчатый).

Очевидно, что метод LES подразумевает проведение нестационарных расчетов, поскольку отфильтрованная величина \bar{u} , включающая, в том числе, пульсационную составляющую крупномасштабного движения, изменяется во времени. Кроме того, она,

исключая крайне специальные случаи, изменяется и во всех пространственных направлениях. Применительно программам, основанным на методе конечных объемов, операция пространственной фильтрации может быть интерпретирована как осреднение по объемам ячеек расчетной сетки [Shumann, 1975].

Пространственно отфильтрованные определяющие уравнения

Для получения определяющих уравнений, использующихся в расчетах по методу LES, к уравнениям Навье-Стокса, дополненным уравнением баланса энергии применяется операция пространственной фильтрации. С формальной точки зрения, полученные таким образом пространственно “отфильтрованные” уравнения, при соответствующей интерпретации входящих в них величин, не отличаются от уравнений Рейнольдса метода RANS. В рамках метода LES полученная система уравнений описывает движение и тепловое состояние разрешаемых крупномасштабных вихревых структур. Вклад неразрешаемого мелкомасштабного движения учитывается через априорно неизвестные подсеточные (SGS) напряжения и тепловой поток

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \text{ и } \tau_{Ti} = \overline{T u_i} - \overline{T} \overline{u_i},$$

которые удовлетворяют условию: $\tau \rightarrow 0$ при стремлении ширины фильтра $\overline{\Delta} \rightarrow 0$.

Тензор SGS напряжений может быть, в общем случае, представлен в виде суммы трех составляющих [Leonard, 1974]:

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}, \tag{2}$$

где $L_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$ - напряжения Леонарда, $C_{ij} = \overline{u_i u_j'} + \overline{u_i' u_j}$ - смешанные напряжения, а $R_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$ - подсеточные напряжения Рейнольдса. Напряжения Леонарда учитывают взаимодействия между разрешаемыми масштабами и могут быть вычислены явным образом при известном поле скорости. Смешанные напряжения представляют взаимное влияние разрешаемых и неразрешаемых масштабов, а подсеточные напряжения Рейнольдса – результат взаимодействия между мелкими, неразрешаемыми масштабами.

Для замыкания систему определяющих уравнений следует дополнить моделями SGS напряжений и теплового потока. Казалось бы, на пути решения проблемы замыкания имеет смысл опираться на накопленный обширный опыт по развитию полуэмпирических моделей RANS. Однако при этом необходимо иметь в виду, что природа моделируемых величин, учитывающих влияние неразрешаемого движения на разрешаемое в методах LES и RANS, различна. Вследствие этого модели рейнольдсовых напряжений RANS, призванные отражать эффекты всего спектра масштабов турбулентности, в своей исходной форме не могут быть использованы для корректного описания подсеточных эффектов, представляющих влияние на разрешаемое движение лишь некоторой, определяемой функцией фильтра, части масштабов течения. Желание использовать принципы, положенные в основу при формулировке моделей RANS для описания SGS масштабов сопряжено с необходимостью их соответствующей адаптации к методологии LES.

Модели подсеточных напряжений

Ключом к качественному описанию на основе метода LES турбулентных течений во многом является аккуратное представление подсеточных напряжений, определяющих воздействие неразрешаемых масштабов на разрешаемое, крупномасштабное движение. Как уже было отмечено, неразрешаемое в рамках LES мелкомасштабное движение находится в меньшей степени зависимости от типа течения, в связи с чем надежды на создание универсальной модели подсеточного движения в данном случае выглядят более обоснованными, чем в методе RANS. При этом появляется возможность достаточно полного описания SGS движения на основе относительно простых моделей, построенных на общих закономерностях, установленных в статистической теории турбулентности. Весьма внушительный список известных автору и используемых на сегодняшний день на практике моделей SGS напряжений можно условно разделить на три подкласса: модели вихревой вязкости, модели близких масштабов и смешанные подходы.

Алгебраические модели типа модели Смагоринского

Большинство SGS моделей относятся к подклассу моделей вихревой вязкости, основанных на гипотезе Буссинеска, которая в методе LES связывает SGS напряжения τ_{ij} с тензором скоростей деформации крупномасштабного движения. Для неразрешаемого теплового потока за основу также берется градиентное соотношение $\tau_{Tj} = -\Gamma_t \cdot \partial \bar{T} / \partial x_j$. Величины ν_t и Γ_t в данном случае представляют собой коэффициенты подсеточной (SGS) вязкости и диффузии соответственно.

На гипотезе Буссинеска основана простейшая и широко используемая до сих пор алгебраическая модель SGS напряжений, предложенная Смагоринским в 1963 г. Формулировка модели основана на анализе размерностей. Для подсеточной вязкости можно записать следующее простое соотношение $\nu_t \propto l_{sgs} \cdot q_{sgs}$, где l_{sgs} - локальный линейный масштаб, а q_{sgs} - масштаб скорости неразрешаемого движения. В рамках концепции LES естественным выглядит использование в качестве локального масштаба длины величины, пропорциональной ширине фильтра: $l_{sgs} = C_s \bar{\Delta}$. В свою очередь, масштаб скорости, как и в теории пути смещения Прандтля, представляется пропорциональным представительному градиенту скорости крупномасштабного движения \bar{u} , вычисляемому как модуль тензора скоростей деформации $|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$:

$$q_{sgs} = l_{sgs} |\bar{S}|.$$

Используя гипотезу Буссинеска и, принимая для генерации и диссипации энергии SGS движения выражения вида

$$P_{sgs} = \varepsilon_{sgs}, P_{sgs} = -\tau_{ij}^{\alpha} \bar{S}_{ij}, \varepsilon_{sgs} = q_{sgs}^3 / l_{sgs},$$

для SGS вязкости окончательно можно записать

$$\nu_t = (C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}|, \quad (3)$$

а для других характеристик

$$k = (C_k \bar{\Delta})^2 |\bar{S}|^2, \varepsilon = C_\varepsilon k^{1.5} / \bar{\Delta}.$$

Как уже отмечалось, в методе конечных объемов величина $\bar{\Delta}$ определяется размерами ячеек расчетной сетки. Для анизотропной расчетной сетки в качестве локальной величины $\bar{\Delta}$ чаще всего используется кубический корень из объема ячейки, что условно записывается в виде

$$\bar{\Delta} = \sqrt[3]{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3},$$

справедливом лишь для случая прямоугольных ячеек.

Следует указать на тот факт, что использование гипотезы Буссинеска негласно предполагает пренебрежение напряжениями Леонарда и смешанными напряжениями в (2), так что $L_{ij} = C_{ij} = 0$. Закладываемая таким образом неточность проявляется, в частности, в том, что значение модельной константы Смагоринского C_s приходится варьировать с целью получения приемлемых результатов при описании течений различных типов [Speziale, 1998].

Кроме того, значение константы Смагоринского может зависеть от используемого численного алгоритма и качества используемой сетки. Это привело к тому, что на сегодняшний день при расчетах течений различных типов значения C_s могут изменяться в весьма широком диапазоне: $0.025 \div 0.3$, где нижнее значение соответствует задачам о течении в каналах, а верхнее - моделированию изотропной турбулентности [Speziale, 1998].

При вычислении коэффициента диффузии в уравнении баланса энергии (как и в методе RANS) используется турбулентное (подсеточное) число Прандтля σ_t (или Pr_t), которое в расчетах по методу LES обычно выбирается в интервале $0.4 \div 0.6$ [Deardorff, 1973]. Уменьшенные по сравнению с моделями RANS значения числа Pr_t свидетельствуют о большей роли мелкомасштабного движения в процессах переноса тепла по сравнению с процессами переноса импульса. Вместе с тем, исследования влияния величины Pr_t на результаты LES конвективных течений выявили слабое воздействие данного фактора, в особенности при высоких значениях молекулярного числа Прандтля [Grotzbach, 1999].

Применительно к задачам турбулентной конвекции рядом авторов предлагалось вводить в модель Смагоринского дополнительный генерационный член, связанный с влиянием на течение эффектов плавучести в поле силы тяжести [Eidson, 1985]

$$v_t = (C_s \bar{\Delta})^2 \left(|S|^2 - \frac{1}{Pr_t} \cdot \frac{g}{T_s} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)^{1/2},$$

где T_s – характерная температура, y – вертикальная координата. Однако предпринятая рядом авторов независимая апробация такого подхода для численного описания турбулентной конвекции выявила расхождение в оценках и взглядах на необходимость подобного рода учета влияния плавучести на подсеточные масштабы [Cabot, 1992; Wong, 1993; Bastiaans, 2000].

Принимаемый для развитой турбулентности принцип каскадной передачи энергии к меньшим масштабам выполняется в среднем, а мгновенно и локально интенсивность передачи энергии может быть большей или меньшей, чем в среднем и осуществляться даже в обратном направлении, от меньших масштабов к большим [Piomelli, 1991]. В связи с этим, в идеале SGS модели должны брать в расчет локальный транспорт энергии. Модели же подсеточных напряжений семейства Смагоринского являются абсолютно

диссипативными, т.е. представляемое ими мелкомасштабное движение в полном объеме рассеивает энергию, получаемую от разрешаемых масштабов. Это приводит к заметным ограничениям возможности использования моделей данного класса для расчетов, например, переходных типов течений, в которых отмеченный “обратный транспорт” энергии (“backscatter”) может играть весьма существенную роль [Piomelli, 1991].

В ряду иных недостатков моделей семейства Смагоринского выделяют уже упомянутую неуниверсальность константы C_s , требующей специальной калибровки при расчетах различных типов течений. Кроме того, в исходной формулировке моделей отсутствует возможность учета влияния на подсеточную вязкость твердых границ; нет механизмов отражения процесса реламинаризации течения, который должен приводить к полному исчезновению влияния подсеточных эффектов в соответствующих областях [Piomelli, 1998]. Необходимо отметить и тот факт, что в ограниченных стенками течениях поток является сильно анизотропным. Для моделирования подобных течений расчетная сетка также, в свою очередь, должна быть сильно неоднородной, со сгущением в пристенных областях, преимущественно в направлении нормали к стенке, что приводит к объяснимому затруднению при выборе масштаба длины в модели.

Указанные недостатки удается ослабить введением специальных модификаций модели Смагоринского [Piomelli, 1998; Frohlich, 2000]. В частности, для уменьшения подсеточной вязкости вблизи стенок используется различные демпфирующие множители. При этом модельная константа C_s заменяется на величину $C_s D(y^+)$. Часто используется демпфирующий множитель Ван Дрифта [Piomelli, 1998], дающий для малых значений y^+ зависимость $v_t \sim y^2$. Асимптотическое поведение вблизи стенок в виде $v_t \sim y^3$ обеспечивается использованием альтернативной демпфирующей функции [Frohlich, 2000]

$$D(y^+) = \left(1 - \exp\left(-\left(y^+/A\right)^3\right)\right)^{1/2}, \quad A^+ = 25.$$

Модифицированные модели Смагоринского активно применяются для расчетов широкого спектра типов течений, в том числе и термоконвективных задач.

Динамические модели

В моделях, именуемых динамическими, параметр C_s в соотношении (3) для вихревой вязкости, в отличие от классической модели Смагоринского, непостоянен во времени и пространстве, изменяясь в процессе расчетов. Динамическая процедура впервые была сформулирована в работе Германо [Germano, 1991], который предложил определять значение параметра C_s , используя информацию об энергии наименьших из разрешаемых масштабов турбулентности.

Основная идея динамической модели проиллюстрирована на рис. 29. В рассмотрение вводится дополнительный “тестовый” пространственный фильтр \hat{G} (обозначаемый скобкой сверху), ширина которого $\hat{\Delta}$ больше ширины “сеточного” фильтра $\bar{\Delta}$ (чаще всего полагают $\hat{\Delta} = 2\bar{\Delta}$). После последовательного применения фильтров \bar{G} и \hat{G} к определяющим уравнениям в них появляется член $T_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$, представляющий действие “подтестовых” масштабов (SubTest Scales, STS). Вклад масштабов, расположенных в интервале спектра между “сеточным” и “тестовым”

фильтрами, учитывается так называемыми динамическими напряжениями Леонарда [Germano, 1991]:

$$L_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j} = T_{ij} - \hat{\tau}_{ij}. \quad (4)$$

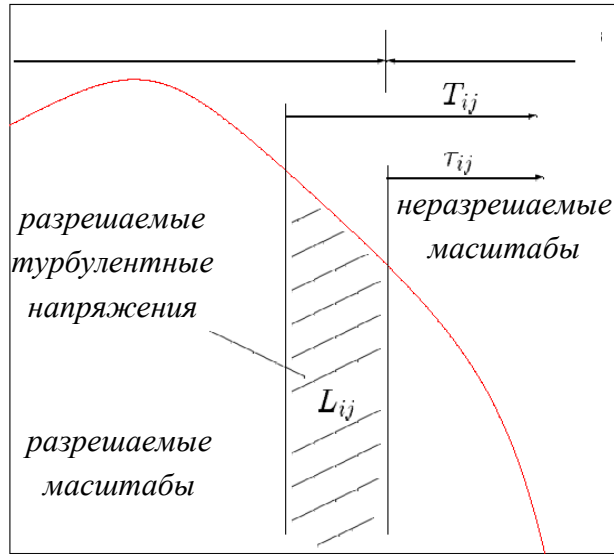


Рис. 29. Схематическое представление динамической модели.

Используя модель вихревой вязкости в качестве функциональной формы SGS и STS напряжений, можно записать (на примере модели Смагоринского):

$$\begin{aligned} \tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} &\approx \tau_{ij}^{\text{mod}}(C, \bar{\Delta}, \bar{u}) = -2(C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \\ T_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} T_{kk} &\approx T_{ij}^{\text{mod}}(C, \hat{\Delta}, \bar{u}) = -2\hat{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

Параметр C_s , должен находиться из соотношения $Q \equiv L_{ij} - L_{ij}^{\text{mod}} = 0$, где $L_{ij}^{\text{mod}} = \tau_{ij}^{\text{mod}} - T_{ij}^{\text{mod}}$. Учитывая (5), и умножая обе части на \bar{S}_{ij} , можно получить окончательно

$$\begin{aligned} L_{ij}^{\text{mod}} &= -2C_s^2 \hat{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + 2C_s^2 \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} = 2CM_{ij}, \quad C = C_s^2 \\ C &= \frac{1}{2} \frac{L_{ij} \bar{S}_{ij}}{M_{ij} \bar{S}_{ij}} \end{aligned}$$

Эта система представляет собой совокупность пяти независимых уравнений с одним неизвестным, из которой должен быть определен параметр $C(x, y, z, t)$. Из-за неопределенности системы параметр C обычно находится с привлечением метода наименьших квадратов [Lilly, 1991].

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \\ Q &= (L_{ij} - 2CM_{ij})^2 \\ \partial Q / \partial C &= 0 \end{aligned}$$

Для неразрешаемого теплового потока используется схожий алгоритм, который приводит к следующим соотношениям [Peng, 1998]:

$$C_0 = \frac{1}{2} \frac{E_j Q_j}{Q_j Q_j}, \quad C_0 = C / Pr_t;$$

$$E_j = -C_0 \hat{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + C_0 \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}$$

$$Q_j = \hat{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}$$

и служит для определения турбулентного числа Прандтля Pr_t . Как показали попытки практического использования этого подхода к задачам термоконвекции, одновременный расчет константы C и Pr_t может приводить к неустойчивостям [Cabot, 1992; Wong, 1993], поэтому зачастую либо полагают число Pr_t постоянным [Cabot, 1992], либо ограничиваются его определением на текущем шаге по времени с использованием данных предыдущих временных шагов [Peng, 1998]: $Pr_t^N \cong (C / C_0)^{N-1}$. Вычислительно более надежная “масштабная” формулировка динамической модели, позволившая получить лучшее согласие с данными DNS, основана на модифицированной гипотезе локального равновесия, которая представляет собой равенство скорости диссипации и генерации SGS энергии с учетом эффектов плавучести [Wong, 1993].

То обстоятельство, что модельные параметры в динамических моделях не являются задаваемыми величинами, а определяются в процессе расчетов, способствует более правильному отражению ими турбулентных эффектов, проявляющихся в течениях различных типов. В частности, автоматически происходит и уменьшение параметров вблизи стенок, при этом более корректно передается асимптотическое поведение SGS сдвиговых напряжений в этих областях; последние становятся близкими к нулю при локально наблюдаемых процессах реламинаризации потока. Возможные отрицательные значения C отражают локальный обратный перенос энергии от неразрешаемого движения к разрешаемому.

Вместе с тем, применение динамических моделей сопряжено с рядом проблем.

1. Разрешенные в модели отрицательные значения параметра C (или Pr_t), и, как следствие, потенциальная возможность появления областей с отрицательной величиной эффективной вязкости ($v_{eff} \equiv \nu + \nu_t$) могут приводить к численной неустойчивости в процессе расчетов. Поэтому при практических расчетах на величину вычисляемой эффективной вязкости обычно налагают условие ее неотрицательности во всей области решения: $v_{eff} \geq 0$ [Peng, 1998].
2. Численная устойчивость может нарушаться и при сильных пространственных осцилляциях параметра C , что сопряжено с необходимостью его регуляризации, осреднения в пространственно однородных направлениях или даже по всему расчетному объему. Для ослабления временных осцилляций может быть использована релаксация во времени с весом ε в следующей общей форме [Frohlich, 2000]: $C^{N+1} = \varepsilon \cdot C + (1-\varepsilon) \cdot C^N$ (индекс N соответствует предыдущему временному шагу). Очевидно также, что необходимость проведения в рамках динамической процедуры целого ряда нетривиальных вычислительных операций, требующих весомых

дополнительных временных затрат уменьшает привлекательность данного подхода по сравнению с классическим способом, предполагающим “статическое” задание значения C_s .

Модели близких масштабов и смешанные модели

Модели “близких масштабов” (Scale Similarity Models, SSM) разрабатываются с целью более полного учета вклада в τ_{ij} эффектов, связанных с энергетическим взаимодействием разрешаемых и неразрешаемых масштабов течения [Piomelli, 1998]. В их основу кладется гипотеза о том, что в спектральном смысле наиболее энергетически активные подсеточные масштабы располагаются близко к волновому числу раздела (отделяющему разрешаемое движение от неразрешаемого), а масштабы, с которыми они сильнее всего взаимодействуют - справа от них [Bardina, 1980]. В связи с этим предполагается, что неразрешаемые вихри в целом схожи по своей структуре с наименьшими разрешаемыми вихрями.

Наиболее крупные из подсеточных масштабов могут быть выделены посредством применения операции фильтрации к SGS скорости $u_i' = u_i - \bar{u}_i$, что дает связь: $\overline{u_i'} = \bar{u}_i - \bar{u}_i$ (при использовании фильтра Фурье \bar{u}_i заменяется на \hat{u}_i , где $\hat{\Delta} > \bar{\Delta}$, поскольку $\bar{u} = \hat{u}$). Подставляя это разложение в $\tau_{ij} = \overline{u_i' u_j'} - \bar{u}_i \bar{u}_j$, и полагая $\overline{u_i' u_j'} \approx \overline{u_i' u_j'}$, $\overline{u_i' u_j'} \approx \overline{u_i' u_j'}$, можно записать $\tau_{ij}^a = L_{ij}^{m,a}$ (индекс a означает симметричную часть тензора), где

$$L_{ij}^m = \overline{u_i' u_j'} - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

В исходной формулировке модели типа SSM признаются недостаточно диссипативными, вследствие чего на практике они зачастую комбинируются с моделями вихревой вязкости типа Смагоринского [Zang, 1993; Horiuty, 1997]. При этом используется следующая форма записи тензора SGS напряжений [Frohlich, 2000]

$$\tau_{ij}^a = C_L L_{ij}^{m,a} + C_B L_{ij}^{R,a} - 2C_v \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}$$

где $L_{ij}^R = \overline{u_i' u_j'} - \bar{u}_i \bar{u}_j$. Следующий шаг состоит в комбинировании с динамической процедурой для определения постоянных модели. При этом известны следующие варианты (знак “?” указывает на постоянные, требующие определения):

1. (а) $C_L = 1$, $C_B = 0$, $C_v = ?$ [Zang, 1993];
2. (б) $C_B = 0$, $C_L = ?$, $C_v = ?$ [Salvetti, 1995];
3. (в) $C_L = 1$, $C_B = ?$, $C_v = ?$ [Horiuty, 1997].

Модели с одним дифференциальным уравнением

Другое направление по учету влияния подсеточных эффектов на разрешаемое движение в рамках LES связано с использованием дифференциальных моделей, основанных на решении уравнения переноса для кинетической энергии неразрешаемого движения $k_{sgs} = 1/2 \tau_{kk}$. По форме это уравнение аналогично RANS моделям с одним дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \cdot \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + 2\nu_t \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} - C_\varepsilon \frac{k^{3/2}}{l},$$

если за масштаб длины l принять ширину фильтра $\bar{\Delta}$ [Yoshizawa, 1982]. Величина SGS вязкости определяется следующим образом:

$$\nu_t = C_k k_{sgs}^{1/2} \bar{\Delta}.$$

Входящие в уравнение для кинетической энергии постоянные либо задаются (их базовые значения проистекают из требования воспроизведения закономерностей однородной изотропной турбулентности [Lilly, 1967; Yoshizawa, 1982]), либо определяются непосредственно в процессе расчетов с использованием динамических подходов [Davidson, 1997; Sohankar, 1999]. В первом варианте обычно полагают $C_k \approx 0.12$, $C_\varepsilon \approx 0.7$. При этом в пристенной области вихревую вязкость уменьшают посредством привлечения демпфирующих множителей типа множителя Ван-Дрифта. Во втором случае величину C_k в выражении для коэффициента диффузии определяют по аналогии с алгоритмом, развитым для определения константы C_s в динамических моделях [Davidson, 1997].

Модели с одним уравнением позволяют на локальном уровне учесть конвективный и диффузионный транспорт энергии как от разрешаемых масштабов к неразрешаемым, так и в обратном направлении, а также нестационарность указанных процессов. Кроме того, независимое определение масштаба скорости в моделях рассматриваемого класса способствует более аккуратному предсказанию временных масштабов неразрешаемого движения в сравнении с алгебраическими моделями. В последних в качестве временного масштаба неразрешаемого движения используется величина $|\bar{S}|^{-1}$, являющаяся характеристикой скоростного поля разрешаемых крупных вихрей с масштабами, нехарактерными для представляемого моделями подсеточного движения. Объективным же недостатком моделей с одним уравнением является некоторое увеличение времени расчетов, связанное с необходимостью решения дополнительного уравнения переноса.

В последнее время, в связи с развитием гибридных методов (о которых несколько позже) появилось значительное количество подсеточных моделей, созданных на основе популярных дифференциальных RANS моделей. В частности, существуют подсеточные версии моделей Спаларта-Алммереса, Ментера, Wilcox, $k-\varepsilon$ и явных алгебраических моделей Рейнольдсовых напряжений. Эти модели редко используются в "чистых" LES расчетах, обычно они являются составной частью гибридных методов.

Тестирование SGS моделей

Результаты экспериментов, а также высокоточные данные DNS могут быть использованы на этапе апробации и тестирования моделей подсеточных напряжений. Подобный "априорный" метод анализа "пригодности" SGS моделей, впервые использованный в работах [McMilan, 1979; Clark, 1979] на основе результатов расчетов по методу DNS и в работе [Liu, 1994] – на основе данных экспериментов, состоит в следующем. К экспериментально или численно полученным полям скорости и температуры применяется операция пространственной фильтрации, затем по данным двух уровней разрешения вычисляются подсеточные напряжения и тепловые потоки. После этого производится их сравнение с SGS напряжениями и тепловыми потоками, рассчитанными на основе тестируемой модели.

Следует отметить, однако, что на пути применения указанной процедуры существуют объективные трудности.

Подход с использованием данных DNS имеет очевидные ограничения, поскольку такие точные численные эксперименты покрывают лишь режимы, характеризующиеся относительно невысокими числами Рейнольдса (Релея). Эксперименты же далеко не всегда позволяют получить достаточно информации для проведения тестирования подобного рода.

Кроме того, при применении процедуры фильтрации около стенки возникают сложности с интегрированием, поскольку ячейки сильно вытянуты, а стенки попадают в область интегрирования.

Альтернативным (и общепринятым в последнее время) методом тестирования и калибровки констант подсеточных моделей является расчет вырождения однородной изотропной турбулентности. В ходе этого теста в кубической расчетной области генерируется поле однородной изотропной турбулентности с энергетическим спектром, соответствующим экспериментальному. Далее производится расчет вырождения этой турбулентности, при этом используются периодические граничные условия. Сравнение расчетных и экспериментальных энергетических спектров позволяет оценить качество подсеточной модели. Следует отметить, что в ходе этого теста проверяется не только подсеточная модель, но и диссипативные свойства разностной схемы.

Моделирование пристенных областей в методе LES

Одна из принципиальных проблем, встающих при расчетах на основе метода LES турбулентных течений в присутствии твердых границ, связана с необходимостью достаточно аккуратного описания пристенных областей. Воздействие твердых границ на моделируемое SGS движение выражается, в частности, в подавлении пульсаций вблизи стенок и в изменении механизмов обмена энергией между разрешаемыми и неразрешаемыми масштабами [Piomelli, 1999]. Для получения приемлемых характеристик течения в пристенных областях необходимо в рамках “чистого” LES достаточно точно разрешать в них основные энергонесущие структуры.

В режимах развитой турбулентности размеры динамически важных для потока вихревых структур (“крупных” вихрей в терминах LES) вблизи стенок становятся пропорциональными расстоянию до стенки и уменьшаются вплоть до вязких (колмогоровских) масштабов турбулентного спектра. Концептуально обоснованное требование их точного разрешения сопряжено с необходимостью использования весьма подробных расчетных сеток в пристенных областях [Cabot, 1999]. Важно иметь в виду, что измельчение расчетных сеток в этих областях следует производить не только в поперечном, нормальном к стенке, но и в продольных сеточных направлениях. При этом типичные значения удлинений ближайших к стенкам ячеек не должны превышать 20 - 30. Понятно, что для разрешения временной эволюции близких к стенке вихрей шаг по времени следует выбирать достаточно малым, согласованно с размерами наименьших ячеек вблизи стенок.

Сформулированные требования по сеточному разрешению пристенных областей в методе LES приближаются к налагаемым в расчетах по методу DNS [Balaras, 1996; Cabot, 1999], поэтому возможности практического применения “чистого” LES на сегодняшний

день ограничиваются задачами при относительно невысоких значениях числа Рейнольдса. Рассмотренный подход, в котором вдали от стенок “работает” SGS модель, а генерируемые моделью значения относительной вихревой вязкости (ν_t/ν) вблизи стенок пренебрежимо малы (в силу использования подробных расчетных сеток), принято называть квази-прямым численным моделированием (Quasi DNS, QDNS) [Spalart, 2000].

Альтернативный путь предполагает привлечение для описания пристенных областей весьма приближенных подходов, ориентированных на использование расчетных сеток, имеющих приемлемые размерности и в случае больших значений числа Рейнольдса. На этом пути на стенках используются аппроксимирующие граничные условия, эквивалентные пристенным функциям, широко применяющимся в высокорейнольдсовых моделях метода RANS. Основополагающее предположение в таких подходах основывается на факте слабого взаимодействия между моделируемым пристенным слоем и разрешаемой внешней областью. При построении аппроксимирующих моделей принимается, что динамика пристенного слоя универсальна и для его описания может быть использован так называемый обобщенный “закон стенки”, основанный на логарифмическом профиле скоростей. Моделирующие соотношения связывают скорость внешнего потока с напряжением на стенке, что дает потенциальную возможность отвечать различным условиям во внешнем потоке. При этом ближайший к стенке узел расчетной сетки может располагаться в логарифмической области, что приводит к резкому сокращению числа узлов сетки в этих областях.

Менее распространенный на практике класс аппроксимирующих граничных условий основан на использовании “линейной стохастической оценки” (Linear Stochastic Estimation, LSE) для определения напряжения трения на стенке. Данный метод позволяет аккуратно предсказать статистические характеристики течений в плоских каналах [Bagwell, 1993], но требует априорного задания тензора полных двухточечных корреляций (например, по данным DNS или эксперимента). В таких условиях существенно сужается класс задач, для которых метод LSE может быть использован - это течения в простой геометрии при невысоких Re.

Несмотря на практические успехи, достигнутые при использовании основанных на законе стенки моделей пристенных областей применительно к некоторым классам течений, введение сильного эмпиризма не позволяет рассматривать такой подход в качестве универсального, и достаточно надежного [Balaras, 1996; Piomelli, 2002]. В частности, такие модели обнаруживают существенную ограниченность при попытках описать с их помощью существенно неравновесные потоки, а также течения с обширными областями отрыва потока [Cabot, 1999].

Заключительные замечания относительно метода LES

Судя по литературе [Ferziger, 1996; Piomelli, 1999; Moin, 2002] в последние годы существенно расширился круг как фундаментальных, так и прикладных, инженерных задач, для численного описания которых был использован метод LES. На специализированных конференциях в достаточно большом объеме представляются имеющие хорошее качество результаты LES развитых турбулентных течений. Значительные усилия исследователей направлены также на улучшение SGS моделей, описывающих подсеточные масштабы движения [Davidson, 1997; Kimmel, 2000]. В связи с

этим следует отметить, что степень влияния моделируемых эффектов на получаемое решение в конкретной задаче растет с уменьшением размерности сеток или с увеличением числа Рейнольдса (Релея), поскольку при этом расширяется требующий модельного представления диапазон масштабов турбулентности.

На практике реализуются два способа улучшения результатов расчетов по методу LES. Первый из них основан на использовании в расчетах все более подробных расчетных сеток с привлечением для описания эффектов, связанных с неразрешаемыми масштабами, простых SGS моделей. Такой способ в пределе сводится к прямому численному моделированию турбулентности. Альтернативный способ связан с разработкой новых и улучшением имеющихся моделей подсеточных масштабов при сохранении умеренных размерностей расчетных сеток. В качестве предельного случая здесь выступает метод VLES (URANS). Однако чрезмерное увлечение модификациями, которые обычно сопровождаются увеличением доли эмпиризма, закладываемого в модель, противоречит основной концепции самого метода LES, призванного описывать близкое к универсализму мелкомасштабное движение в режимах развитой турбулентности. По-видимому, наиболее целесообразно придерживаться разумного компромисса между указанными способами.

Что касается вычислительной эффективности SGS моделей. Так, использование модели Смагоринского увеличивает затраты по сравнению с решением уравнений Навье-Стокса примерно на 7%, а использование динамических моделей еще на 7-10%. Можно с высокой долей уверенности прогнозировать рост временных затрат примерно на 15 - 20% при использовании моделей с одним уравнением, требующих решения дополнительного уравнения переноса. Вместе с тем, приведенные цифры относятся к чисто гидродинамическим задачам без учета тепломассопереноса. В последнем случае, за счет роста общего числа численно интегрируемых уравнений, вклад затрат на расчет подсеточных напряжений в требуемое общее время расчета уменьшается.

Немаловажным вопросом при использовании метода LES является вопрос о диссипативных свойствах разностной схемы. Традиционные для RANS противопоточные схемы, как правило, слишком диссипативны. Их использование приводит к слишком быстрому разрушению мелких вихрей, что в конечном итоге может привести к заметной ошибке в описании турбулентного переноса. Поэтому в LES обычно используются центрально-разностные схемы высокого порядка точности.

Однако даже при использовании таких схем в случае расчета на недостаточно мелкой сетке численная диссипация оказывается сравнимой с диссипацией, обеспечиваемой подсеточной моделью. Поэтому иногда на грубых сетках используется LES без подсеточной модели (формально решаются те же уравнения, что и в случае DNS). Такой подход носит название MILES (Monotone Integrated Large Eddy Simulation). Этот подход следует использовать очень аккуратно, поскольку в этом случае невозможно контролировать точность моделирования подсеточных напряжений.

Метод моделирования отсоединенных вихрей.

Введение

Наряду с кратко рассмотренными выше тремя основными современными подходами к моделированию турбулентных течений (RANS, LES, DNS), в настоящее время разрабатывается ряд промежуточных подходов, сочетающих в себе те или иные элементы RANS, LES и DNS. Среди них следует отметить предложенный в 1997 г. метод Моделирования Отсоединенных Вихрей (Detached Eddy Simulation – DES). Несмотря на свою относительную “молодость”, этот метод уже достиг определенной степени зрелости и представляется исключительно многообещающим, поскольку в нем удачно сочетаются сильные стороны RANS (экономичность и надежность расчета безотрывных течений) с возможностью расчета течений с обширными зонами отрыва, обеспечиваемой LES. В результате с его помощью уже сегодня удается с высокой степенью точности удалось впервые рассчитать весьма сложные отрывные течения), численное моделирование которых в рамках LES пока невозможно из-за ограниченных возможностей вычислительной техники.

Идея метода DES очень проста и состоит в использовании уравнений Рейнольдса только в тех областях потока, где локальный размер используемой вычислительной сетки Δ недостаточен для разрешения турбулентных структур с линейными масштабами порядка l_{turb} (характерный локальный масштаб турбулентности) и в использовании метода LES в остальной области потока, где $\Delta < l_{turb}$.

Модели турбулентности для DES

Конкретная реализация этой идеи зависит от используемой модели турбулентности.

Так, в оригинальной работе была использована модель турбулентной вязкости Спаларта-Алларамаса. В частности, фигурирующее в диссипативном члене этой модели в качестве линейного масштаба турбулентности расстояние до стенки d

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \frac{1}{\sigma} \left([\nabla \cdot ((v + \bar{v})\nabla\bar{v})] + C_{b2} [(\nabla\bar{v}) \cdot (\nabla\bar{v})] \right) + \\ + C_{b1} (1 - f_{t2}) \bar{S}\bar{v} - \left(C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\bar{v}}{d} \right)^2 + f_{t1} \Delta U^2$$

предлагается заменить на величину, определяемую соотношением:

$$\tilde{d} = \min \{d, C_{DES} \Delta\}$$

где C_{DES} – единственная новая константа модели DES, а размер сетки Δ определяется как максимальный из трех ее шагов Δx , Δy и Δz в рассматриваемой точке потока.

Применительно к пристенным отрывным течениям такое определение \tilde{d} приводит к тому, что в населенной мелкими турбулентными вихрями области присоединенного пограничного слоя с характерной для нее сильно анизотропной сеткой ($\Delta x \approx \Delta z \gg \Delta y$) выполняется неравенство $\tilde{d} < C_{DES} \Delta$, и в качестве масштаба используется истинное расстояние до стенки d , то есть реализуется стандартный подход, основанный на уравнениях Рейнольдса, замкнутых с помощью модели турбулентности Спаларта-

Аллмараса. В отрывной области, населенной сравнительно крупномасштабными ("отсоединенными") вихрями, имеет место обратная ситуация ($d > C_{DES}\Delta$), в результате чего в качестве масштаба турбулентности в диссипативном члене SA модели используется величина $C_{DES}\Delta$. Как показано в, в этом случае данная модель переходит в дифференциальную подсеточную модель турбулентности, которая в равновесии ("диссипация равна генерации") аналогична классической алгебраической подсеточной модели Смагоринского.

Таким образом, гибридный характер метода DES вытекает непосредственно из его формулировки: в области присоединенного пограничного слоя метод функционирует в режиме уравнений Рейнольдса, а в области отрыва ("отсоединенных» вихрей") – автоматически переходит в LES. При этом достигается органичное сочетание лучших качеств обоих подходов, а именно, высокая точность и экономичность уравнений Рейнольдса в области присоединенного пограничного слоя и универсальность LES в отрывной области потока. Кроме того, хотя DES, как и LES, в отличие от уравнений Рейнольдса, является принципиально трехмерным нестационарным подходом, необходимые для его реализации сетки в пристенной области совпадают с сетками, необходимыми для решения уравнений Рейнольдса, то есть являются на много порядков меньшими, чем соответствующие сетки, требуемые для разрешения мелких пристенных вихрей в рамках LES.

Существует еще одна проблема: модель SA содержит низкорейнольдсовые функции дополнительно подавляющие турбулентную вязкость в окрестности стенки. Аргументом этих функции является величина $\tilde{\nu}/\nu$, таким образом, при измельчении сетки в LES области происходит дополнительное нефизическое подавление подсеточной вязкости. Для преодоления этого недостатка константа C_{DES} должна зависеть от вышеупомянутых демпфирующих функций (т.е. от $\tilde{\nu}/\nu$) так, чтобы поведение модели при измельчении сетки было подобным поведению модели Смагоринского. Выражение для зависимости C_{DES} от $\tilde{\nu}/\nu$ может быть получено приближенно при рассмотрении равновесного решения уравнения в модели SA.

Таким образом, итоговое выражение для линейного масштаба может быть записано следующим образом.

$$\tilde{d} = \min\{d, C_{DES} \Psi \Delta\}$$

$$\Psi^2 = \frac{1 - c_{b1}[f_{t2} + (1 - f_{t2})f_{v2}]/(c_{w1} \kappa^2 f_w^*)}{(1 - f_{t2})f_{v1}}; \quad f_w^* = 0.4241$$

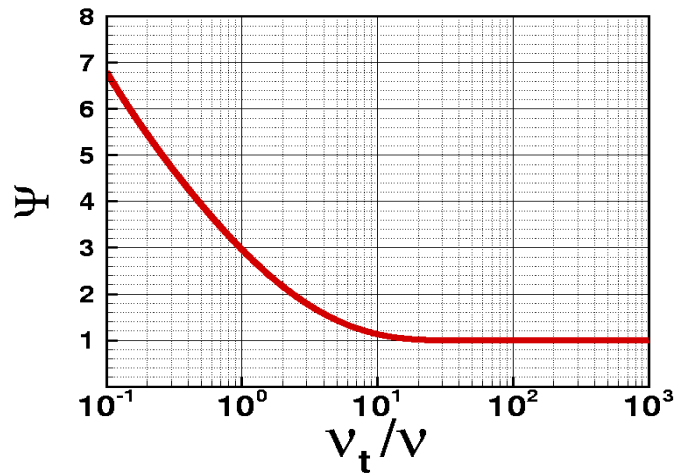


Рис. 30.

В принципе, модель SA может быть заменена на любую другую модель турбулентности.

Так, для модели Ментера изменения касаются только уравнения для кинетической энергии турбулентности

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu_T) \nabla k) + P_k - \rho \beta^* \omega k$$

В этом случае линейным масштабом турбулентности является величина

$$l_{RANS} = k^{1/2} / (\beta^* \omega)$$

Диссипативное слагаемое в правой части может быть представлено в следующей форме

$$D_{RANS}^k = \beta^* \rho \omega k = \rho k^{3/2} / l_{RANS}.$$

Соответственно в DES это слагаемое заменяется на

$$D_{DES}^k = \rho k^{3/2} / l_{DES},$$

В случае, когда DES работает в LES моде, это слагаемое превращается в:

$$(D_{DES}^k) = \rho k^{3/2} / (C_{DES} \Delta).$$

Очевидно, что с уменьшением шага в LES области это слагаемое увеличивается и приводит к уменьшению подсеточной вязкости.

Следует также отметить, что модель Ментера содержит 2 набора констант (для k - ω и k - ϵ версий). Соответственно для каждого набора необходимо подбирать свою константу, а переключение между ними производить так же, как это делается для остальных констант.

$$\psi = F_1 \psi_1 + (1 - F_1) \psi_2$$

Для некоторых моделей, содержащих напрямую низкорейнольдсовы поправки, формулировка DES оказывается несколько сложнее. Рассмотрим, например, низкорейнольдсовую модель Wilcox.

Тогда линейный масштаб DES имеет смысл определить в следующем виде

$$l_{DES} = \min\{l_{RANS}, (C_{DES} \Psi) \Delta\},$$

где $\Psi = \Psi(Re_\tau)$ функция турбулентного числа Рейнольдса $Re_\tau = k / (\omega \nu)$.

Эта функция должна удовлетворять следующим критериям.

1. Она должна равняться 1 при высоких значениях турбулентного числа Рейнольдса
2. В равновесии подсеточная модель должна соответствовать высокорейнольдсовой версии, поскольку константа в модели Смагоринского не зависит от турбулентного числа Рейнольдса.

Как и в модели Ментера, изменения касаются только диссипативного члена в уравнении для k .

$$D_{RANS}^k = \beta^* \rho \omega k = \frac{\beta^*}{C_\mu} \rho k^{3/2} / l_{RANS} \Rightarrow D_{DES}^k = \frac{\beta^*}{C_\mu} \rho k^{3/2} / l_{DES}$$

все эти соображения приводят к следующему виду этой функции

$$\Psi(\text{Re}_t) = \frac{\beta^*}{C_\mu} \left(\frac{2\alpha}{\alpha^*} \right)^{3/4},$$

где входящие в это выражение величины являются функциями и константами модели

$$\alpha^* = \frac{\alpha_0^* + \text{Re}_t / R_k}{1 + \text{Re}_t / R_k}, \quad \alpha = \frac{1}{2\alpha^*} \frac{\alpha_0 + \text{Re}_t / R_\omega}{1 + \text{Re}_t / R_\omega}, \quad \beta^* = C_\mu \frac{5/18 + (\text{Re}_t / R_\beta)^4}{1 + (\text{Re}_t / R_\beta)^4}$$

$$\beta = 0.075, \quad \alpha_0^* = \beta/3, \quad \alpha_0 = 0.1,$$

$$C_\mu = 0.09, \quad R_\beta = 8, \quad R_k = 6, \quad R_\omega = 2.2.$$

Для всех моделей константа C_{DES} калибруется по закону $-5/3$ на основе решения задачи о вырождении однородной изотропной турбулентности. Эта константа, как и всякая LES константа откалиброванная таким образом, зависит от используемой схемы.

Так, например, для центрально-разностной схемы четвертого порядка (конкретной) эти константы соответственно равны

	SA DES	MSST DES		Wilcox DES
		$k-\omega$	$k-\epsilon$	
C_{DES}	0.65	0.78	0.61	0.72

Схема

При использовании гибридных методов возникают проблемы с выбором расчетной схемы. Так, для LES областей традиционные для RANS противоточные схемы оказываются слишком диссипативными, а в RANS области центрально-разностные схемы, используемые в LES, малоустойчивыми. Наиболее удачным решением этой проблемы является использование гибридных схем, остающихся противоточными в RANS областях и центрально-разностными в LES.

Один из возможных вариантов такой гибридной функции представлен ниже

$$F_{inv} = (1 - \sigma)F_{ctr} + \sigma F_{upw},$$

$$\sigma = \sigma_{\max} \cdot \tanh(A^{C_{H1}}),$$

$$A = C_{H2} \max \{ [(C_{DES} \Delta / l_t) / g - 0.5], 0 \},$$

где линейный масштаб турбулентности l_t определяется через турбулентную вязкость и комбинацию сдвига S и завихренности Ω

$$l_t = [(v_t + \nu)/(C_\mu^{3/2} K)]^{1/2},$$

$$K = \max \{[(S^2 + \Omega^2)/2]^{1/2}, 0.1\tau_0^{-1}\},$$

$\tau_0 = L_0 / U_0$ - характерное конвективное время, а параметр g введен для того, чтобы в безвихревых областях ($\Omega \ll 1$, а S - конечное) использовалась противопоточная схема:

$$g = \tanh(B^4),$$

$$B = C_{H3} \Omega \max \{S, \Omega\} / \max \{(S^2 + \Omega^2)/2, \Omega_{\min}^2\}, \quad \Omega_{\min} = 10^{-3} \tau_0^{-1}.$$

$$\sigma_{\max} = 1.0, \quad C_{H1} = 3.0, \quad C_{H2} = 1.0, \quad C_{H3} = 2.0.$$

Сетка

Для того, чтобы реализовать потенциальные преимущества DES необходимо использовать соответствующую сетку. Эта сетка, с одной стороны, должна быть достаточной для получения качественного решения в LES областях, с другой стороны, она должна содержать существенно меньше узлов, чем LES сетка для той же задачи.

Принципиальная разница между RANS и LES сетками состоит в том, что RANS сетка должна быть достаточной для получения осредненного решения, а на LES сетке должны разрешаться соответствующие вихревые структуры вплоть до инерционного интервала.

При решении задач в рамках DES можно выделить 4 характерные области.

Для внешних задач характерна область ER (Euler region). Это практически невозмущенная (по крайней мере, невязкая) область потока, в которой нет турбулентных пульсаций. Сетка в этой области может быть достаточно грубой, поскольку газодинамические параметры в этой области изменяются достаточно медленно.

Непосредственно вблизи стенок находится RR (RANS region). Поскольку DES в этой области работает как RANS, в этой области можно использовать RANS сетку.

В непосредственной окрестности обтекаемого тела находится FR (focus region). Это LES область, непосредственно влияющая на течение в окрестности тела. Это наиболее важная область, для которой требуется качественная сетка. Ячейки сетки в этой области по возможности должны быть наиболее близки к кубическим. Размер шага сетки должен быть достаточен для разрешения наиболее энергонесущих вихрей.

В следе располагается DR (departure region). Течение в этой области слабо влияет на обтекание тела, через эту область происходит «вынос» сформировавшихся структур. Сетка в этой области может быть довольно грубой, но она не должна приводить к искажению решения в FR.

Существует еще так называемая «серая область», находящаяся на границе RANS и LES областей. Эта область является одним из наиболее уязвимых мест DES (как, впрочем, и других гибридных методов). В этой области часто происходит существенное искажение напряжений, поскольку вязкость в этой области уже слишком мала для того, чтобы правильно моделировать напряжения, и еще слишком велика, чтобы развились турбулентные пульсации достаточной амплитуды. Если важные с точки зрения обтекания области (области, величина касательных напряжений в которых определяет характер обтекания) попадают в «серую область», то полученное решение может в значительной степени не соответствовать истине.

Область применимости DES.

Как следует из названия метода DES, он создавался для расчета отрывных течений. Именно такие течения лучше других подходят для этого метода. Во-первых, наличие массивованного отрыва в большинстве случаев приводит к его пульсациям, как следствие этого, к возникновению автоколебательного течения с крупными когерентными структурами. Во-вторых, наличие отрывной зоны позволяет обойти проблему инициализации, т.е. создания турбулентных пульсаций на входе в LES области. Несколько позже мы рассмотрим примеры использования DES в различных приложениях.

Гибридные методы.

WMLES

Еще в 70-е годы появились попытки приспособить LES для расчета течений при высоких числах Рейнольдса. Ограниченность ресурсов вычислительной техники привела к созданию подхода, называемого WMLES. В этом подходе в непосредственной окрестности стенки (где используемая сетка недостаточна для качественно разрешенного LES) используется модель турбулентности. При этом значительная часть пограничного слоя оказывается в LES области. Практическая необходимость в использовании этого подхода возникает в тех задачах, в которых информация о нестационарных характеристиках в пограничном слое является существенной (задачи управления потоком, аэроакустика и аэроупругость).

Принципиальное отличие WMLES и DES состоит в том, что при использовании последнего предполагается, что весь пограничный слой (или его большая часть) лежат в RANS области, а источником турбулентных структур в LES области является неустойчивость слоев смещения и крупных отрывных вихрей. При использовании WMLES значительная часть пограничного слоя оказывается в LES области, в ней, соответственно, должны разрешаться турбулентные структуры.

Одной из основных проблем, возникающих при использовании WMLES, является так называемый «log-layer mismatch», который проявляется в некотором сдвиге логарифмического профиля на границе RANS-LES. Причиной такого сдвига является то, что в окрестности этой границы в LES области, с одной стороны, турбулентная вязкость уже низкая (что приводит к уменьшению моделируемых напряжений), с другой стороны близость стационарного пристенного потока не дает в полной мере развиться разрешенным турбулентным пульсациям. В итоге суммарное касательное напряжение в этой области потока существенно недооценивается.

Указанная проблема является очень сложной, в настоящий момент нет надежного и универсального способа ее решения. Можно выделить два основных подхода, использующихся разными группами исследователей.

Первый подход состоит в организации «передачи информации» между моделируемыми и разрешенными напряжениями на границе RANS-LES. Упрощенно этот подход реализуется следующим образом. Для RANS области на ее внешней границе в качестве граничного условия для скорости берется осредненная скорость из решения в LES области. Для LES области по вычисленным в RANS области напряжениям восстанавливаются локальные пульсации скорости, таким образом, граничные условия

для LES делаются нестационарными. Этот подход имеет много дефектов. Во-первых, довольно трудно проводить представительное осреднение, поскольку в этой ситуации применить осреднение по времени невозможно. Для простых задач (канал) используют осреднение по пространству между точками, лежащими на одинаковом расстоянии до стенки. В некотором смысле, это можно назвать осреднением по ансамблю. Однако такой подход годится только для установившегося течения в канале, даже для пограничного слое его применение весьма затруднительно (в силу того, что осреднение будет проводиться по малому количеству точек и не будет представительным). Во-вторых, совершенно неочевидно, как по заданным напряжениям восстанавливать пульсации, что является очень важным моментом, поскольку неправильные пульсации на границе LES области могут привести к искажению турбулентных структур во всей LES области.

Другой подход состоит в некоторой «подстройке» турбулентной вязкости в окрестности границы RANS-LES. Необходимо сделать так, чтобы разрешенные пульсации достигли необходимого уровня в LES области непосредственно около границы. Для этого необходимо там несколько уменьшить подсеточную вязкость. Кроме того, выявляется еще несколько проблем технического характера. Так RANS область, благодаря соседству с сильно нестационарной LES областью также в заметной степени нестационарна. Кроме того, при расчете по дифференциальным моделям происходит занижение турбулентной вязкости в RANS области из-за ее диффузии в LES область. Нельзя забывать и о том, что граница RANS-LES может оказываться при различных y^+ . Все эти соображения чрезвычайно усложняют решение данной проблемы.

DDES

Метод DES по замыслу авторов не должен был столкнуться с проблемами, характерными для WMLES. Действительно, предполагалось, нет причин в RANS области делать сетку в продольном направлении неоправданно мелкой (с шагом много меньше толщины пограничного слоя). Однако существуют задачи, в которых этого трудно избежать (например, обратная ступенька). При соответствующих условиях (неблагоприятный градиент давления в пограничном слое) MSD может привести к отрыву потока. Этот эффект получил название GIS (grid induced separation).

Было предложено несколько путей решения этой проблемы.

Deck предложил Zonal DES, сводящийся к блокировке LES в некоторых областях. Этот подход был успешно применен им для различных задач (в частности, для многоэлементного крылового профиля). Более того, такой подход позволяет рассчитывать некоторые области потока (ER) используя двумерные уравнения. Однако этот подход имеет существенный недостаток, связанный со сложностью его использования в областях сложной трехмерной геометрии. В этой связи более предпочтительной является автоматическая процедура блокировки LES.

Некоторые исследователи пытались определять принадлежность точки потока к пограничному слою по соотношению шагов сетки. Этот подход эффективен далеко не во всех ситуациях, поскольку причиной GIS является как раз то, что сетка в пограничном слое далека от традиционной для RANS. Кроме того, возможно ложное срабатывание «отключения LES» в «сеточном следе». Это может быть как слой смешения, так и просто сгущение сетки (например, в обратном уступе).

Одним из возможных путей решения проблемы является модификация выбора масштаба для DES. Так, например, Forsythe предложил вместо традиционной формулы для DES использовать $d_{DES} = \min\left(C_{DES} \max\left(\frac{n^2 C_{DES} \Delta^2}{d}, \Delta\right), d\right)$, $n = 3$. Этот подход, однако, тоже решает проблему лишь отчасти (для узкого класса задач).

Наиболее универсальным было предложение Менстера, суть которого сводится к определению положения точки в пограничном слое по функции F_2 (которая входит в модель Менстера).

$$\mu_r = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, F_2 = \tanh(\arg_2^2), \arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega d}, \frac{500\nu}{d^2\omega}\right)$$

Однако, в силу особенностей построения этой функции (она основана на величине $\frac{l_t}{d} = \frac{\sqrt{k}}{\omega d}$), использовать этот подход можно только для моделей с двумя уравнениями.

Недавно была предложена модификация DES, названная DDES в которой подход Менстера был обобщен на любые модели турбулентности. За основу был взят параметр $r = \left(\frac{l}{l_{mix}}\right)^2 = \frac{\nu_t}{Sk^2 d^2}$ из модели SA, который имеет тот же смысл, что и $\frac{l_t}{d} = \frac{\sqrt{k}}{\omega d}$.

На его основе был создан следующий критерий принадлежности точки потока пограничному слою $r_d = \frac{1}{\kappa^2 d_w^2} \cdot \frac{(\nu_t + \nu)}{\max\{[(\partial u_i / \partial x_j)(\partial u_i / \partial x_j)]^{1/2}, 10^{-10}\}}$. Эта величина равна бесконечности на стенке, 1 на логарифмическом участке профиля скорости пограничного слоя и $\sim 0.4-0.8$ во внешней области ПС.

На основе этого параметра была предложена следующая модифицированная формула линейного масштаба для DES.

$$l_{DES} = l_{RANS} - f_d \max\{l_{RANS} - C_{DES} \Delta, 0\},$$

$$f_d = 1 - \tanh[(8r_d)^3]$$

Константы в этой формуле подобраны таким образом, что функция f_d остается близкой к 0 внутри присоединенных пограничных слоев, соответственно $l_{DES} = l_{RANS}$. Это блокирует возможность «несанкционированного» переключения в LES режим внутри пограничного слоя.

Вне пограничного слоя $f_d \approx 1$, при этом линейный масштаб для DES превращается в $l_{DES} = l_{RANS} - \max\{l_{RANS} - C_{DES} \Delta, 0\}$, что идентично оригинальной формулировке DES $l_{DES} = \min\{l_{RANS}, C_{DES} \Delta\}$.

Другие гибридные методы

В 1997 году Speziale одним из первых предложил гибридный метод, названный им VLES (метод моделирования очень крупных вихрей). Следует отметить, что этот термин используется для наименования различных методов от URANS до LES. Основная его идея

состоит в модификации Рейнольдсовых напряжений при приближении шага сетки к размеру Колмогоровских вихрей $\eta = \left(\frac{v^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$:

$$\tau_{VLES} = \alpha \cdot \tau_{RANS}, \quad \alpha = \left(1 - \exp\left(-\frac{\beta\Delta}{\eta}\right)\right)^n,$$

где n и β - константы.

Аналогичный подход под названием FSM (Flow Simulation Methodology) был предложен Zhang(2000):

$$\alpha = \left(1 - \exp\left(-\frac{5 \max(0, \Delta - 2\eta)}{N\eta}\right)\right)^n,$$

где константа $n=1$, а значение N приблизительно соответствует отношению шага сетки к колмогоровскому масштабу (1000-2000 для пристенных струй исследовавшихся автором).

Очевидно, что такой подход имеет два предела: при очень грубых сетках ($\Delta \gg \eta$) он переходит в RANS, а при соответствующем измельчении сетки ($\Delta < \eta$) в DNS. Однако у этого подхода есть два очевидных недостатка. Во-первых, нет никакой гарантии, что при промежуточных шагах сетки поведение этой модели будет соответствовать поведению LES. Во-вторых, при увеличении числа Рейнольдса, при стремлении Колмогоровского масштаба к 0 этот подход всегда обеспечивает RANS решение.

Magnient (2001) попытался исправить эти недостатки и обеспечить в промежутке между RANS и DNS решениями правильный LES. Он предложил модифицировать формулу Speziale следующим образом:

$$v_t = v_{t,RANS} \cdot f\left(\frac{\Delta}{L_{RANS}}\right) \cdot g\left(\frac{\Delta}{\eta}\right)$$

Считая, что в LES моде $\Delta \gg \eta$, можно считать $g = 1$.

Из анализа размерностей можно показать, что $f\left(\frac{\Delta}{L_{RANS}}\right) \sim \left(\frac{\Delta}{L_{RANS}}\right)^{4/3}$.

Таким образом $v_t \sim \frac{k^2}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\Delta}{L_{RANS}}\right)^{4/3} = \frac{k^2}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\Delta}{\left(k^{1.5}/\varepsilon\right)}\right)^{4/3} = \Delta^{4/3} \varepsilon^{1/3}$. Используя замыкающее

соотношение $v_t = C_e \Delta^{4/3} \varepsilon^{1/3}$, $C_e = 0.0966$ автор пришел к необходимости перекалибровки констант RANS модели. Следует отметить, что подобное часто происходит при попытках создания LES моделей на основе RANS моделей.

Еще одной модификацией идеи Speziale является LNS (Limited Numerical Scales), предложенный Button (2000). В этом подходе в качестве весовой функции используется величина

$$\alpha = \frac{\min[(LV)_{LES}, (LV)_{RANS}]}{(LV)_{RANS}}$$

При использовании гипотезы Буссинеска это приводит к

$$v_t = \alpha \cdot v_{t,RANS}$$

$$\alpha = \min \left\{ \frac{v_{t,LES}}{v_{t,RANS} + O(10^{-10})}, 1 \right\}.$$

Следует отметить, что данный подход не содержит ни одной дополнительной константы.

В случае использования, например, стандартной k - ε модели и модели Смагоринского этот подход приводит к

$$\alpha = \min \left\{ \frac{(C_s \Delta)^2 S}{C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} + O(10^{-10})}, 1 \right\}.$$

В качестве линейного размера фильтра Δ могут использоваться различные величины

Δ	Комментарии
$\sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}$	классический фильтр для LES
$\max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$	стандартный фильтр для гибридных методов
$2 \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$	обеспечивает разрешение наименьших масштабов при любой ориентации структур по отношению к сетке
$\max(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \bar{u} \Delta t)$	учитывает пространственную фильтрацию
$\max(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \bar{u} \Delta t, \sqrt{k} \Delta t)$	может приводить к RANS поведению при неудачном задании начального поля для k

Методы, основанные на взвешивании (*blending methods*)

По аналогии с принципами, заложенными в модель Ментера (взвешивание k - ε и k - ω моделей), были предприняты попытки создать гибридные методы взвешивая методы RANS и LES:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -[(1-\Gamma) \cdot v_{t,LES} + \Gamma \cdot v_{t,RANS}] \cdot S_{ij},$$

где Γ – весовая функция.

Fan (2001, 2002) реализовал этот подход на основе k - ω модели Ментера взвешивая как величину турбулентной вязкости, так и уравнение для кинетической энергии турбулентности. В результате была получена следующая модель

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu_T) \nabla k) + P_k - \rho \left[\Gamma \beta^* \omega k + (1-\Gamma) C_d \frac{k^{3/2}}{\Delta} \right]$$

$$v_t = \Gamma \frac{k}{\omega} + (1-\Gamma) C_s \sqrt{k} \Delta$$

где функция Γ выбиралась по аналогии с весовой функцией в модели Ментера

Завершая обзор гибридных методов, следует отметить подходы в которых объединяются предыдущие подходы для избежания ситуаций, в которых $v_{t,LES} > v_{t,RANS}$. Также существуют исследования в которых исследуются различные весовые функции, однако эти подходы пока не получили широкого распространения.

Рекомендуемая литература

Основная

1. Фрик П. Г., Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 1998.
2. М.Х. Стрелец, А.К.Травин, М.Л. Шур, Ф.Р. Спаларт. "Метод моделирования отсоединенных вихрей для расчета отрывных турбулентных течений: предпосылки, основная идея и примеры применения" //Научно технические ведомости 2'2004 стр. 22-33
3. Е.М. Смирнов, А.Г. Абрамов, Н.Г. Иванов, А.Б. Корсаков. "Прямое численное моделирование и метод моделирования крупных вихрей в нестационарных задачах турбулентной термоконвекции" //Научно технические ведомости 2'2004 стр. 33-47

Дополнительная

1. Шлихтинг Г. «Теория пограничного слоя». М.: Наука, 1974.
2. Ламли "Методы расчета турбулентных течений" (под ред. В.Колльмана). М.: Мир, 1984.
3. Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н. "К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости". Изв. АН СССР, 1993, МЖГ, No.4, с. 69.
4. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1982.
5. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989.
6. Абрамович Б.Н. Теория турбулентных струй. М. "Наука".1986.
7. Акатнов Н.И., Чумаков Ю.С. Теория струйных течений и ее применение в инженерных расчетах. Изд. ЛПИ. 1989.
8. Гиневский А.С. Теория турбулентных струй и следов. М. "Наука" 1969.