Министерство образования Российской Федерации

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет

Физико - Механический Факультет

Кафедра гидроаэродинамики

Магистерская диссертация

по специальности

“Прикладная математика и физика”

Численное исследование обтекания крылового профиля при режиме близком к срыву потока

Зав. кафедрой, д. ф.-м. н., проф.	Ю. В. Лапин
Руководитель, к. ф.-м. н., доц.	А. В. Гарбарук
Консультант по охране труда, к. т. н., доц.	В. В. Монашков
Соискатель	Д. Р. Магидов

Санкт-Петербург

2003

Содержание

Введение

Решение задач механики жидкости и газа в наше время необходимо для развития самых разных областей промышленности, что обуславливает потребность в постоянных исследованиях в области гидроаэродинамики. Эффективность таких исследований зависит от совместных результатов систематических разработок в двух направлениях, а именно, в области экспериментальных исследований и измерений и в области численного моделирования.

В условиях постоянного роста производительности компьютеров, когда доступными становятся значительные вычислительные мощности, именно вычислительная гидроаэродинамика становится все более эффективным инструментом для изучения характеристик различных течений жидкости и газа, представляющих интерес как для научных так и для промышленных разработок. Применение вычислительной гидроаэродинамики может способствовать существенной экономии времени и материальных ресурсов по сравнению с проведением экспериментальных исследований и, более того, делает возможным исследование течений в тех случаях, когда прямые измерения неосуществимы. Кроме того, к настоящему времени разработан ряд весьма совершенных вычислительных алгоритмов, характеризующихся высоким уровнем точности и устойчивости. Однако, качество результатов численных исследований зависит не только от точности вычислительного алгоритма, но, прежде всего, от обоснованности применяемых математических моделей реальных физических процессов.

Турбулентность является одним из наиболее сложных физических явлений, рассматриваемых в рамках механики жидкости и газа, будучи при этом крайне существенным фактором, определяющим характеристики вязких течений. Именно поэтому численное моделирование турбулентных течений является одной из самых актуальных и, вместе с тем, трудноразрешимых проблем, стоящих перед вычислительной гидроаэродинамикой на протяжении всего времени ее существования как науки. При этом решение большинства проблем, представляющих практический интерес, требует качественного описания различных характеристик сложных турбулентных течений. Вместе с тем, сложная и недостаточно изученная природа турбулентности не позволяет, на данный момент, найти универсальный путь решения проблемы их расчета.

Наиболее распространенным и широко используемым уже несколько десятилетий подходом является применение полуэмпирических моделей турбулентности, используемых для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes). Преимуществом этого подхода является сочетание относительной простоты реализации и эффективности. Кроме того, огромный опыт использования полуэмпирических моделей приводит к их постоянному совершенствованию и универсализации.

Тем не менее, опыт многочисленных исследований с использованием самых разных моделей турбулентности показывает, что даже весьма совершенные модели, будучи основанными на эмпирических данных, обладают ограниченной областью применения. Именно поэтому для проведения эффективных практических расчетов с использованием полуэмпирических моделей турбулентности необходимым является наличие надежной информации о границах применимости различных моделей и об их эффективности при решении какого-либо класса задач. Наличие такой информации позволит выбрать оптимальную модель для расчета того или иного турбулентного течения. Между тем, многие важные практические расчеты проводятся с использованием устаревших, или плохо подходящих для данного класса течений моделей, только потому что эти модели хорошо изучены и проверены долгим опытом, тогда как более совершенные модели не используются из-за ограниченности информации о них.

Чтобы сделать применение полуэмпирических моделей более надежным инструментом расчета турбулентных течений, с 60-х годов проводится все больше исследований, посвященных комплексному тестированию моделей турбулентности. В них изучаются как возможности отдельных моделей при расчетах разных классов течений, так и сравнительные возможности различных моделей при решении тестовых задач.

При проведении такого рода исследований очень важен выбор тестовых задач. Такие задачи должны отвечать нескольким критериям: прежде всего, тестовые задачи должны принадлежать к классу течений, представляющему существенный практический интерес, далее, рассматриваемые течения должны обладать рядом особенностей, связанных непосредственно с турбулентностью, кроме того, для них должен быть доступен максимально полный набор экспериментальных данных и, наконец, для корректного сравнения результатов эксперимента и расчета в последнем должны максимально точно воспроизводиться физические условия проведения эксперимента.

Особые требования при проведении расчетов, связанных с тестированием моделей турбулентности предъявляются к точности численного решения, поскольку привнесенные при разностной аппроксимации уравнений ошибки не должны приводить к неверной оценке свойств тестируемых моделей.

Кроме того, большинство расчетов при тестировании моделей турбулентности являются двумерными, в то время как течения, исследуемые в эксперименте, очевидно, всегда являются трехмерными. При проведении экспериментов обычно предпринимаются специальные усилия для обеспечения двумерности течения, однако в каждом конкретном случае необходимо проводить оценку эффективности таких усилий.

В настоящей работе рассматривается стационарное дозвуковое обтекание крылового А-профиля (Aerospatiale A-airfoil) сжимаемым газом с числом Маха $M = 0.15$ при угле атаки $\alpha = 13.3$ градуса и числе Рейнольдса $Re = 2\times10^6$. Экспериментальное исследование этого течения было проведено в [1,2]. Обтекание А-профиля использовалось в качестве тестового течения в работах [3-6]. Это течение было выбрано для исследования по следующим соображениям. Во-первых, как показано в работе [6] результаты расчетов существенно зависят от используемой сетки. Во-вторых, не до конца ясно, насколько существенным является влияние пограничных слоев на боковых стенках рабочей секции закрытой аэродинамической трубы, в которой проводилось экспериментальное исследование, на течение в центральной части трубы, где проводились измерения. Кроме того, по результатам [3-6] видно, что ни при использованиии различных моделей турбулентности, ни при использовании метода моделирования крупных вихрей не удалось добиться хорошего согласования расчета и эксперимента.

Основными целями работы являются:

1. Исследование зависимости результатов решения двумерной задачи от используемой расчетной сетки и построение сетки, достаточной для получения сошедшегося по сетке решения.

2. Исследование влияния трехмерных эффектов (пограничных слоев на боковых стенках рабочей секции аэродинамической трубы) на течение в плоскости симметрии профиля.

Данная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Первая глава посвящена постановке задачи, описанию системы уравнений, модели турбулентности, а также численных методов, использовавшихся при выполнении работы.

Во второй главе описываются расчетные сетки, использовавшиеся при проведении расчетов, а также методы их построения.

Третья глава посвящена исследованиям зависимости результатов решения от используемой расчетной сетки.

В четвертой главе исследуется влияние трехмерных эффектов на рассматриваемое течение.

В заключении сформулированы основные выводы.

Глава 1. Постановка задачи и метод расчета

1.1. Система уравнений Рейнольдса

Осредненные по Рейнольдсу уравнения движения вязкого сжимаемого газа в декартовой системе координат с учетом гипотезы Морковина о пренебрежимой малости пульсаций плотности [7], могут быть представлены в следующей форме:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = \frac{\partial R_j}{\partial x_j}, \tag{1.1.1}$$

где Q – вектор консервативных переменных, F_j и R_j – соответственно векторы конвективных (“невязких”) и “вязких” (включая турбулентные составляющие) потоков массы, импульса и энергии, определяемые следующим образом:

$$Q = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho E \end{Bmatrix}, \qquad F_j = \begin{Bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + p\delta_{ij} \\ \rho u_j H \end{Bmatrix},$$
$$R_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\tau}^l_{ji} + \tau^t_{ji} \\ u_i(\bar{\tau}^l_{ij} + \tau^t_{ij}) - q^l_j - q^t_j \end{Bmatrix}. \tag{1.1.2}$$

Компоненты тензора напряжений τ^l_{ij}, вектора плотности теплового потока q^l_j, а также тензора рейнольдсовых напряжений τ^t_{ij} и вектора плотности турбулентного потока тепла q^t_j определяются соотношениями:

$$\tau^l_{ij} = \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right],$$
$$q^l_j = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{1.1.3}$$
$$\tau^t_{ij} = -\rho\overline{u_i' u_j'},$$
$$q^t_j = \rho\overline{u_j' h'}.$$

В (1.1.1) – (1.1.3) приняты следующие обозначения для осредненных величин: ρ – плотность, p – давление, T – температура, E – полная энергия $(E = C_V T + (u_i \cdot u_i)/2)$, H – полная энтальпия $(H = E + p/\rho)$, u_i – проекции вектора скорости на оси декартовых координат, μ, λ – коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности, а C_V – коэффициент удельной теплоемкости при постоянном объеме; u', h' – пульсационные составляющие соответственно компонент скорости и энтальпии ($h = C_V T + p/\rho = C_p T$).

Для замыкания системы (1.1.1) используется уравнение состояния совершенного газа $p = \rho RT/m$ (m – молярная масса газа), зависимости коэффициентов молекулярной вязкости и теплопроводности от температуры (удельная теплоемкость C_V предполагается постоянной), а также гипотеза Буссинеска:

$$-\rho\overline{u_i'u_j'} = \mu_t\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\cdot\delta_{ij}\right]. \qquad (1.1.4)$$

и аналогия Рейнольдса:

$$q_j^t = \rho\overline{u_j'h'} = -\frac{\mu_t C_p}{Pr_t}\frac{\partial T}{\partial x_j}, \qquad (1.1.5)$$

где Pr_t – турбулентный аналог числа Прандтля, значение которого при расчете дозвуковых течений, как правило, принимают постоянным и равным 0.9 [7].

Окончательно, если ввести коэффициент турбулентной теплопроводности:

$$\lambda_t = \frac{C_p\mu_t}{Pr_t} \qquad (1.1.6)$$

и эффективные коэффициенты переноса

$$\begin{aligned} \mu_э &= \mu + \mu_t, \\ \lambda_э &= \lambda + \lambda_t, \end{aligned} \qquad (1.1.7)$$

то можно переписать выражения (1.1.2) в виде:

$$Q = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho E \end{Bmatrix}, \quad F_j = \begin{Bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + p\delta_{ij} \\ \rho u_j H \end{Bmatrix}, \qquad (1.1.8)$$
$$R_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{ji} \\ u_i\tau_{ji} - q_j \end{Bmatrix},$$

где

$$\tau_{ij} = \mu_э \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right],$$
$$q_{ij} = -\lambda_э \frac{\partial T}{\partial x_j}. \qquad (1.1.9)$$

1.2. Модель турбулентности Спаларта-Аллмареса

Модель Спаларта-Аллмареса содержит только одно уравнение переноса, которое формулируется не непосредственно для турбулентной вязкости ν_t, а для величины $\tilde{\nu}$, связанной с ней соотношением:

$$\nu_t = f_{v1} \tilde{\nu},$$
$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \qquad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}. \qquad (1.2.1)$$

Собственно уравнение переноса для $\tilde{\nu}$ имеет следующий вид:

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = \frac{1}{\sigma} \left(\left[\nabla \cdot \left((\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu} \right) \right] + C_{b2} \left[(\nabla \tilde{\nu}) \cdot (\nabla \tilde{\nu}) \right] \right) +$$
$$+ C_{b1} f_{r1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} - \left(C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + f_{t1} \Delta U^2. \qquad (1.2.2)$$

В этом уравнении:

$$\tilde{S} = \Omega + f_{v2} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2}, \qquad f_{v2} = \left(1 + \frac{\chi}{C_{v2}} \right)^{-3}, \qquad (1.2.3)$$

где Ω – модуль завихренности, а d означает расстояние до ближайшей стенки.

Функция f_w определяется следующим выражением:

$$f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \text{ где } g = r + C_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}. \qquad (1.2.4)$$

Функции f_{t1} и f_{t2} введены в модель для инициализации искусственного перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения в заданной точке обтекаемой поверхности и имеют вид:

$$f_{t1} = C_{t1} g_t \exp \left(- C_{t2} \frac{\omega_t^2}{\Delta U^2} \left(d^2 + g_t^2 d_t^2 \right) \right), \quad f_{t2} = C_{t3} \cdot \exp \left(- C_{t4} \chi^2 \right), \qquad (1.2.5)$$

где d_t – расстояние от рассматриваемой точки потока до точки на обтекаемой поверхности, в которой предписывается переход, ω_t – модуль завихренности в точке перехода, ΔU – модуль разности между скоростями в рассматриваемой точке и в точке перехода, а

$$g_t = \min\left(0.1,\ \Delta U/(\omega_t \Delta x)\right), \tag{1.2.6}$$

где Δx_t – шаг сетки в направлении вдоль стенки в точке перехода.

Модель Спаларта-Аллмареса содержит 12 эмпирических констант:

$$\begin{aligned}
&\sigma = 2/3,\ \ \kappa = 0.41,\ \ C_{b1} = 0.1355,\ \ C_{b2} = 0.622,\\
&C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{\left(1 + C_{b2}\right)}{\sigma},\ \ C_{w2} = 0.3,\ \ C_{w3} = 2.0,\ \ C_{v1} = 7.1,\\
&C_{t1} = 1.0,\ \ C_{t2} = 2.0,\ \ C_{t3} = 1.2,\ \ C_{t4} = 0.5.
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

1.3. Численный метод

В качестве метода численного решения системы уравнений Рейнольдса (1.1.1) был выбран метод Роу [8], который относится к широкому классу эффективных современных противопоточных схем, основанных на приближенном решении задачи Римана о распаде разрыва, предложенном Роу. Метод Роу реализует противопоточное конечно-разностное представление производных по пространственным координатам от векторов невязких потоков в консервативной форме записи уравнений Рейнольдса (1.1.1).

1.3.1. Схемы расщепления разностей потоков

Метод Роу является одной из форм реализации схем расщепления разностей потоков, которые, в свою очередь, базируются на методе расщепления векторов потоков, предложенном Стегером и Уормингом [9]. Этот метод основан на следующих важных свойствах невязких потоков в уравнениях Рейнольдса:

1. поток F является однородной функцией первого порядка от вектора консервативных переменных Q, то есть:

$$F = \frac{\partial F}{\partial Q} \cdot Q = A \cdot Q \tag{1.3.1}$$

2. Якобиан A в (1.3.1) обладает набором действительных собственных чисел и поэтому представим в виде:

$$A = R \cdot (\Lambda^+ + \Lambda^-) \cdot L = A^+ + A^-,\ \ A^+ = R \cdot \Lambda^+ \cdot L,\ \ A^- = R \cdot \Lambda^- \cdot L, \tag{1.3.2}$$

где $\Lambda = diag\{\lambda_i\}$, $\Lambda^+ = 0.5(\Lambda + |\Lambda|)$, $\Lambda^- = 0.5(\Lambda - |\Lambda|)$, $|\Lambda| = diag\{|\lambda_i|\}$

Используя приведенные выше соотношения, поток F можно представить в виде:

$$F = F^+ + F^-, \tag{1.3.3}$$

где $F^+ = A^+ \cdot Q$, $F^- = A^- \cdot Q$.

В результате производная потока по пространству может быть записана в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F^+}{\partial x} + \frac{\partial F^-}{\partial x}, \tag{1.3.4}$$

имеющем следующее противопоточное конечно-разностное представление:

$$\frac{\delta^- F^+}{\delta x} + \frac{\delta^+ F^-}{\delta x}. \tag{1.3.5}$$

Если использовать направленные разности первого порядка, то выражение (1.3.5) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{\delta x}(F_i^+ - F_{i-1}^+ + F_{i+1}^- - F_i^-) \tag{1.3.6}$$

или в эквивалентной форме

$$\frac{1}{\delta x}(\hat{F}_{i+1/2} - \hat{F}_{i-1/2}), \tag{1.3.7}$$

где

$$\hat{F}_{i+1/2} = F_{i+1}^- + F_i^+, \quad \hat{F}_{i-1/2} = F_i^- + F_{i-1}^+ \tag{1.3.8}$$

– потоки на гранях ячейки.

Используя соотношение (1.3.3), поток на грани ячейки можно записать в следующей форме:

$$\hat{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_{i+1} + F_i) - \frac{1}{2}(F_{i+1}^+ - F_i^+) + \frac{1}{2}(F_{i+1}^- - F_i^-). \tag{1.3.9}$$

При этом выражение для потока на грани ячейки с произвольным порядком аппроксимации может быть представлено в виде

$$\hat{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_{i+1} + F_i) - \frac{1}{2}(\delta F_{i+1/2}^+ - \delta F_{i+1/2}^-), \tag{1.3.10}$$

причем порядок аппроксимации определяется конкретной формой расщепленных разностей потоков $\delta F_{i+1/2}^{\pm}$.

1.3.2. Схема Роу

Эта схема использует приближенное решение Роу [8] задачи Римана о распаде произвольного разрыва, основанное на локальной линеаризации потока на границе ячеек.

Пусть Q^+ и Q^- – значения вектора консервативных переменных соответственно справа и слева от грани ячейки. Выражение (1.3.10) для потока на грани ячейки может быть представлено в виде:

$$\hat{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F(Q^+) + F(Q^-)) - \frac{1}{2}\left|\overline{A}(Q^+, Q^-)\right| \cdot (Q^+ - Q^-), \qquad (1.3.11)$$

где $|A| = A^+ - A^-$.

Матрица $\overline{A}$ должна удовлетворять следующим требованиям:

1. для любых Q^+ и Q^- должно выполняться равенство:
$$F(Q^+) - F(Q^-) = \overline{A} \cdot (Q^+ - Q^-) \qquad (1.3.12)$$
2. при $Q^+ = Q^- = Q$ должно выполняться равенство:
$$\overline{A}(Q^+, Q^-) = A(Q), \text{ где } A = \partial F / \partial Q \qquad (1.3.13)$$
3. матрица $\overline{A}$ должна иметь действительные собственные числа и линейно независимые собственные вектора.

Роу показал, что перечисленным требованиям удовлетворяет якобиан вектора потока F при условии, что его компоненты вычисляются с использованием определенным образом осредненного набора переменных $\bar{z} = \{\overline{\rho}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{H}\}$, а именно:

$$\begin{gathered} \overline{\rho}_{i+1/2} = \sqrt{\rho^+} \cdot \sqrt{\rho^-}, \\ \overline{y}_{i+1/2} = \frac{y^+\sqrt{\rho^+} + y^-\sqrt{\rho^-}}{\sqrt{\rho^+} + \sqrt{\rho^-}}, \text{ где } y^\pm = \{u^\pm, v^\pm, w^\pm, H^\pm\}. \end{gathered} \qquad (1.3.14)$$

Данная схема реализует конкретное представление разностей потоков, используя специальную процедуру интерполяции основных переменных на границу ячейки – так называемое “осреднение по Роу”.

В данной работе использовалась противопоточная аппроксимация третьего порядка точности для невязких потоков (в ряде расчетов для сглаживания нефизических колебаний решения локально вводились противопоточные разности первого порядка) и симметричные разности второго порядка – для вязких потоков в уравнении движения.

1.3.3. Реализация неявного этапа

Линеаризация системы (1.1.1) и использование разложения в ряд Тейлора по времени позволяет записать неявную линеаризованную схему для интегрирования (1.1.1) в виде:

$$\left(\frac{I}{\Delta t}+\frac{1}{\delta x}\left(\delta_x^- A^+ + \delta_x^+ A^-\right)+\frac{1}{\delta y}\left(\delta_y^- B^+ + \delta_y^+ B^-\right)+\frac{1}{\delta z}\left(\delta_z^- C^+ + \delta_z^+ C^-\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\delta_x T_x}{\delta x}+\frac{\delta_y T_y}{\delta y}+\frac{\delta_z T_z}{\delta z}\right)\right)\cdot \Delta Q = RHS, \qquad (1.3.15)$$

где $A^{\pm}, B^{\pm}$ и $C^{\pm}$ – Якобианы невязких потоков, T_x, T_y и T_z – Якобианы вязких потоков, I – единичная матрица, ΔQ – приращение вектора консервативных переменных (при переходе с одного временного слоя на другой), Δt – шаг интегрирования по времени, а RHS – конечно-разностный аналог членов системы (1.1.1), не содержащих частных производных по времени. Через $\delta^{\pm}_{x,y,z}$ обозначены направленные пространственные разностные операторы, а через $\delta_{x,y,z}$ –симметричные пространственные разностные операторы.

Для решения разностных уравнений (1.3.15) использовался метод релаксации Гаусса-Зейделя [10]. Преимуществами метода Гаусса-Зейделя являются отсутствие ошибки факторизации, высокая устойчивость, хорошая сходимость, а также возможность получения систем линейных уравнений с блочно-трехдиагональными матрицами. Недостатком метода является необходимость отдельного расчета правых частей уравнений для каждого этапа решения.

1.3.4. Алгоритм численного решения уравнения переноса в модели Спаларта-Аллмареса

Уравнение (1.2.2) переноса величины $\tilde{\nu}$ может быть записано в следующей условной форме:

$$\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + Conv = Diff + Source + Trip, \qquad (1.3.16)$$

где $Source = P_{\tilde{\nu}} - D_{\tilde{\nu}}$ – члены уравнения, отвечающие за генерацию и диссипацию, *Conv* – конвективные члены, *Diff* – диффузионные члены, а *Trip* – члены, отвечающие за инициализацию перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения.

В соответствии с рекомендациями [11] конвективные члены уравнения аппроксимируются противопоточными разностями первого порядка точности, например:

$$Conv_u = u^+ \cdot \frac{(\tilde{\nu}_i - \tilde{\nu}_{i-1})}{\Delta x} + u^- \cdot \frac{(\tilde{\nu}_{i+1} - \tilde{\nu}_i)}{\Delta x}, \qquad (1.3.17)$$

где $u^+ = \frac{1}{2} \cdot \left(u + |u|\right), \quad u^- = \frac{1}{2} \cdot \left(u - |u|\right).$

Диффузионные члены аппроксимируются центральными разностями второго порядка точности, например:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((\nu + \tilde{\nu}) \cdot \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x}\right) \approx \frac{1}{\Delta x} \cdot \left((\nu + \tilde{\nu})_{i+1/2} \cdot \left(\frac{\tilde{\nu}_{i+1} - \tilde{\nu}_i}{\Delta x}\right) - (\nu + \tilde{\nu})_{i-1/2} \cdot \left(\frac{\tilde{\nu}_i - \tilde{\nu}_{i-1}}{\Delta x}\right)\right). \qquad (1.3.18)$$

Остальные члены уравнения (*Source* и *Trip*) аппроксимируются также как и диффузионные члены.

Что касается неявной части схемы, то для конвективных и диффузионных членов она не вызывает каких-либо затруднений. Некоторые особенности имеет лишь аппроксимация *Source*-членов.

Source-члены, согласно рекомендациям [11], могут быть преобразованы к виду:

$$Source = (P - D) \cdot \tilde{\nu}, \text{ где } P = P_\nu / \tilde{\nu}, \; D = D_\nu / \tilde{\nu}. \qquad (1.3.19)$$

Тогда Якобиан *Source*-членов может быть записан в форме:

$$Source' = \frac{\partial Source}{\partial \tilde{\nu}} = D - P + \left(D' - P'\right) \cdot \tilde{\nu}. \qquad (1.3.20)$$

Для обеспечения диагонального преобладания при построении стабилизирующего оператора выражение (1.3.20) заменяется другим:

$$Source' = pos(D - P) + pos(D' - P') \cdot \tilde{\nu}, \qquad (1.3.21)$$

где $pos(x) = max(x,\, 0)$.

Полученное в результате разностное уравнение решается также, как и уравнения Рейнольдса, с использованием метода релаксации Гаусса-Зейделя [10].

В настоящей работе в уравнении переноса $\tilde{\nu}$ конвективные члены аппроксимировались направленными разностями первого порядка, а для аппроксимации диффузионных членов, как и в уравнении движения использовались центральные разности второго порядка.

1.4. Расчетная область и граничные условия

Численное исследование рассматриваемого течения проводилось в расчетной области, представленной на рис. 1.1, при этом растояние от профиля до внешней границы расчетной области составляло примерно 20 длин хорды профиля.

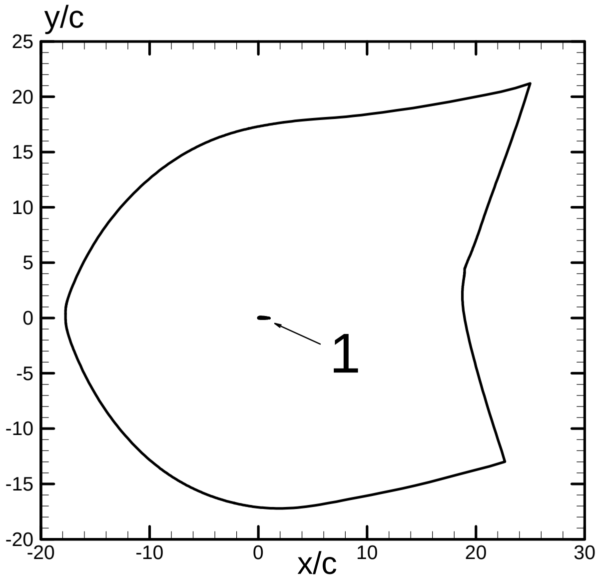


Рис.1.1. Расчетная область. 1 – профиль.

На поверхности профиля для всех расчетов задавались следующие граничные условия: условия непроницаемости и прилипания для скорости, условие равенства нулю теплового потока для температуры, а также вычислительное граничное условие равенства нулю проекции градиента давления на нормаль к стенке $(\partial p/\partial n)_w = 0$. Кроме того задавалось равенство нулю на стенке турбулентной вязкости (и, соответственно, величины $\tilde{\nu}$) для модели турбулентности Спаларта-Аллмареса.

Граничные условия для газодинамических переменных на внешней границе расчетной области задаются, исходя из одномерной теории характеристик. Поскольку течение является дозвуковым, то в соответствии с этой теорией на входных участках внешней границы задаются значения первого, третьего и четвертого инвариантов Римана:

$$\begin{aligned} &I_1 = V_n + \frac{2a}{(\gamma - 1)}, \\ &I_3 = V_\tau, \\ &I_4 = \frac{p}{\rho^\gamma}, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

а на выходных участках внешней границы заданным считается второй инвариант:

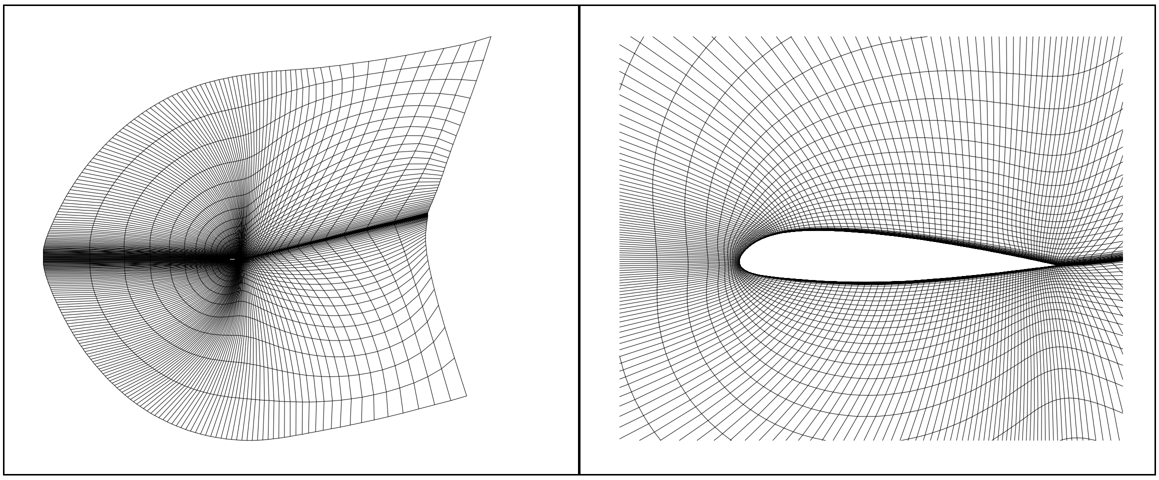
$$I_2 = V_n - \frac{2a}{(\gamma - 1)}, \tag{1.4.2}$$

где a – скорость звука, γ – показатель адиабаты, V_n – проекция вектора скорости на нормаль к границе, V_τ – касательная к границе составляющая вектора скорости. При этом значения инварианта I_2 на входных участках внешней границы и значения инвариантов I_1, I_3 и I_4 на выходных участках определяются путем линейной экстраполяции.

Поскольку в экспериментах [1, 2] обеспечивался очень низкий уровень турбулентности в набегающем потоке, то для моделирования этих условий на внешней границе задавалось низкая (практически нулевая) турбулентная вязкость $\nu_t = 10^{-3}\nu$.

Глава 2. Построение расчетных сеток

В качестве базовой сетки в настоящей работе использовалась одноблочная сетка *C*-типа 1025×257 узлов (рис. 2.1), любезно предоставленная нам доктором Вернером Хаасе. Следует подчеркнуть, что несмотря на внушительный размер этой сетки, даже на ней в работе [6] не удалось получить сошедшееся по сетке решение рассматриваемой задачи. Именно это обстоятельство послужило стимулом для проведения исследований, направленных на выяснение конкретных причин такой аномально высокой чувствительности результатов к расчетной сетке в рассматриваемом течении.



(а) **(б)**

Рис. 2.1. Конфигурация базовой сетки (а) и увеличенный фрагмент сетки вблизи профиля (б). Изображена каждая четвертая линия.

Наряду с этой базовой сеткой, был рассмотрен ряд других сеток, которые получались из нее путем применения комбинации двух типов преобразований.

Первый из них очень прост и состоит в загрублении сетки путем исключения из нее каждой второй линии, а второй – в перераспределении узлов на линиях сетки. Оба преобразования проводились как для линий, огибающих профиль (в дальнейшем – *i*-линий), так и для линий сетки, идущих от профиля к внешней границе расчетной области (в дальнейшем *j*-линиях).

Первое преобразование реализуется очень просто. В выбранном семействе линий оставляется каждая 2-я линия, начиная с первой – то есть линии с номерами 1, 3, 5 и т.д., остальные линии исключаются. Чтобы при таком преобразовании не претерпела изменений расчетная область, изначальное количество линий для этого семейства должно быть равно (2×n+1). Поскольку базовая сетка имеет размер 1025×257, то есть (2^{10}+1)×(2^8+1), вышеописанная процедура может быть применена к ней несколько раз. Отметим однако, что при каждом загрублении сетки вдоль линии j вышеописанным способом величина пристенного шага сетки увеличивается не менее, чем в два раза.

Остановимся далее более подробно на втором способе модификации базовой сетки.

Общий принцип перераспределения узлов вдоль сеточной линии одинаков для i-линий и для j-линий сетки.

Рассмотрим какую-либо линию сетки. Не умаляя общности, допустим, что это i-линия. Для каждого узла на этой линии находится значение криволинейной координаты s, вычисляемое следующим образом:

$$\begin{aligned} &s_1 = 0, \\ &s_{i+1} = s_i + \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \;\; i = 2,...,n, \end{aligned} \qquad (2.1)$$

где n – количество узлов сетки на линии. Введем обозначения: $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$ – размер i-го шага сетки внутри линии, $L = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta s_i = s_n$ – длина линии, а $\kappa = max\left(\Delta s_i / \Delta s_{i-1}, \Delta s_{i-1} / \Delta s_i\right)$ – приведенное отношение шагов сетки.

Всем новым узлам присваиваются значения криволиненой координаты s'_i, $i = 1,...,m$, где m – новое количество узлов в линии данного семейства. При этом должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} &s'_1 = s_1 = 0, \\ &s'_m = s_n = L, \\ &s'_i > s'_{i-1}, \;\; i = 2,...,m. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Конкретный способ определения криволинейной координаты s’ зависит как от типа линии, так и от ряда других обстоятельств и будет описан ниже.

На основе криволинейной координаты s’ определяются декартовы координаты узлов новой сетки. Для этого для каждого узла новой сетки вводятся параметры интерполяции I_i и w_i.

Первый из них определяет номер промежутка между узлами старой сетки, в который попадает узел новой сетки.

$$s_{I_i} \le s'_i < s_{I_i+1}, \quad i = 1,...,m, \qquad (2.3)$$

Второй параметр – это относительное положение узла новой сетки на этом промежутке.

$$w_i = \frac{s'_i - s_{I_i}}{\Delta s_{I_i}}. \qquad (2.4)$$

Определение координат новой сетки производится путем интерполяции по дугам окружностей, которая будет описана ниже.

Перераспределение узлов на *i*-линиях. В первую очередь следует отметить, что при перераспределении узлов на *i*-линиях структура сетки сохраняется, т.е. интерполяционные коэффициенты одинаковы для каждой *i*-линии. Таким образом, задача перераспределения узлов на *i*-линиях сводится к перераспределению узлов на одной *i*-линии. В нашем случае была выбрана первая линия, совпадающая с поверхностью профиля.

При перераспределении узлов линия делилась на участки, и на каждом участке производилось локальное преобразование – измельчение либо загрубление сетки в целое количество раз. Загрубление производилось также, как описано выше, – при помощи исключения узлов. При измельчении каждый шаг сетки на соответствующем участке дробился на равные части, между которыми добавлялись новые узлы. При этом между участками с более грубой и более мелкой сеткой создавались “буферные зоны” – участки сетки с плавным изменением величины шага сетки, предназначенные для того, чтобы ограничить на всей линии величину приведенного отношения шагов κ. Следует отметить, что в данной работе приведенное отношение шагов κ на первой линии не превышало 1.2.

Поскольку сетка в дальнейшем разбивалась на два блока (см. далее), важным требованием к перераспределению узлов на *i*-линии является согласованность в области внутренней границы *C*-сетки за профилем.

Перераспределение узлов на *j*-линиях. При перераспределении узлов на *j*-линиях узлы на них распределялись в геометрической прогрессии. Кроме того, в некоторых случаях максимальный шаг сетки был ограничен сверху.

Особого внимания заслуживает выбор пристенного шага сетки, т.к. от его величины в значительной степени зависит качество результатов при проведении расчетов.

На рис. 2.2 представлена кусочно-линейная зависимость пристенного шага базовой сетки от x (x – координата, идущая вдоль хорды профиля).

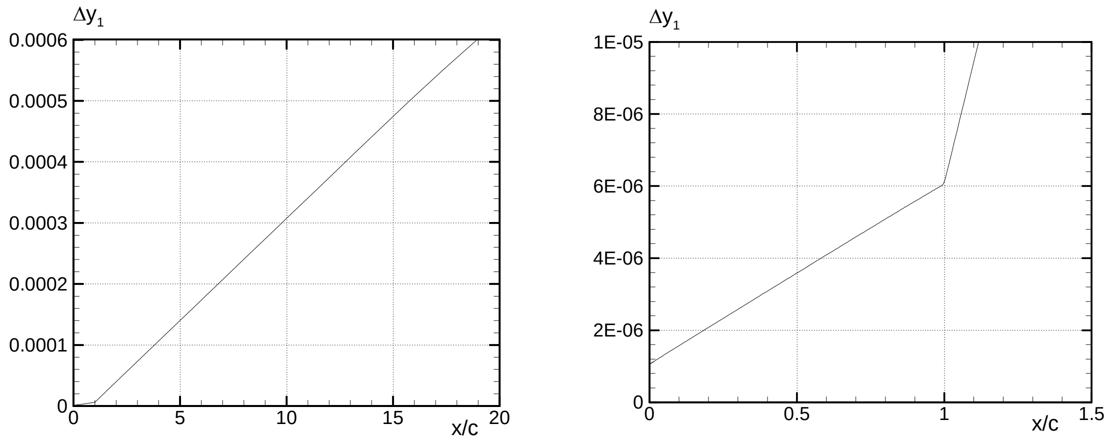
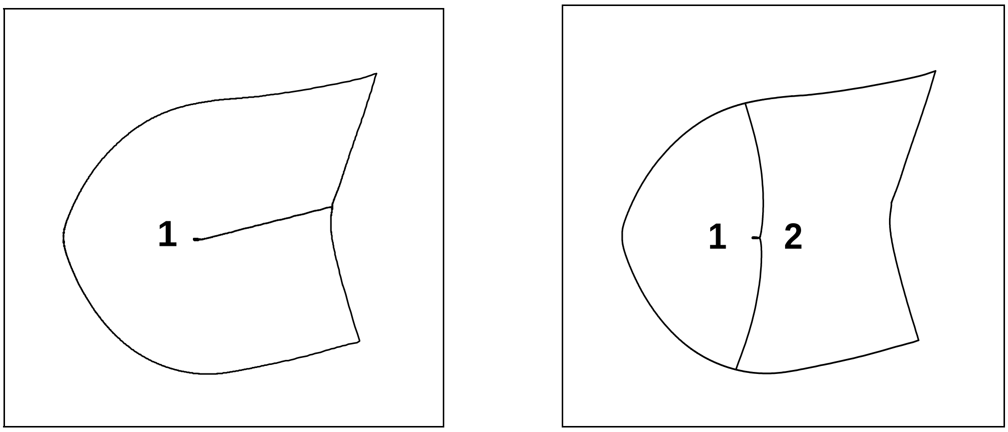


Рис. 2.2. Распределение величины пристенного шага вдоль *i*-линии для базовой сетки.

Для всех сеток, использовавшихся в данной работе структура распределения пристенного шага по x сохранялась. При исследовании чувствительности решения к величине пристенного шага последний выбирался пропорциональным шагу базовой сетки в соответствующей координате x. При этом коэффициент пропорциональности менялся в пределах от 0.25 до 2.0.

В заключение отметим, что использование сетки *C*-типа при расчете обтекания крылового профиля предполагает наличие внутренней границы сетки в области следа. Это может существенно ухудшить сходимость итерационного процесса. Поэтому, наряду с описанными выше преобразованиями, проводилось разбиение сетки на два блока таким образом, чтобы один блок *C*-типа огибал профиль, а второй блок содержал область следа (см. рис. 2.3).



(а) **(б)**

Рис. 2.3. Границы расчетной области для базовой сетки (а) и после разбиения на два блока (б). Цифрами обозначены номера блоков.

Интерполяция координат узлов сетки. Поскольку процедура интерполяции является одинаковой и для *i*-линий и для *j*-линий, не умаляя общности, будем рассматривать перестроение *i*-линии. В этом случае задачу можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим какой-либо узел новой сетки, лежащий на выбранной линии *i* и имеющий параметры интерполяции *I* и *w* (см. (2.3), (2.4)). Требуется определить декартовы координаты *x'* и *y'* для этого узла.

Самым простым способом определения координат узла сетки является линейная интерполяция:

$$\begin{aligned} x' &= x_I + w\cdot(x_{I+1} - x_I), \\ y' &= y_I + w\cdot(y_{I+1} - y_I). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Однако, при значительных сгущениях сетки такая процедура обладает существенным недостатком. Если между двумя узлами исходной сетки находятся несколько узлов новой сетки, то при применении линейной интерполяции они оказываются на одной прямой. В результате, линия сетки (в том числе и *i*-линия, образующая поверхность профиля) получается ломаной, что приводит к появлению неприемлемых осцилляций в распределениях коэффициентов давления и трения.

Для того, чтобы избежать вышеописанных проблем необходимо использовать интерполяцию, обеспечивающую гладкость новой сетки. Поскольку в общем случае невозможно описать линию сетки при помощи однозначной функции вида $y = f(x)$, в данном случае использовалась процедура интерполяции по дугам окружности.

Прежде всего, по трем узлам с индексами (I-1), I и ($I+1$) определялись координаты вспомогательной точки (x_1', y_1'), которая лежит на окружности, проходящей через эти три узла и делит дугу между точками (x_I, y_I) и (x_{I+1}, y_{I+1}) в соотношении w к (1-w). Аналогичным образом по узлам с индексами I, (I+1) и ($I+2$) находилась точка (x_2', y_2'). Следует отметить, что в случае, когда три точки лежат на одной прямой, окружность вырождается в эту прямую.

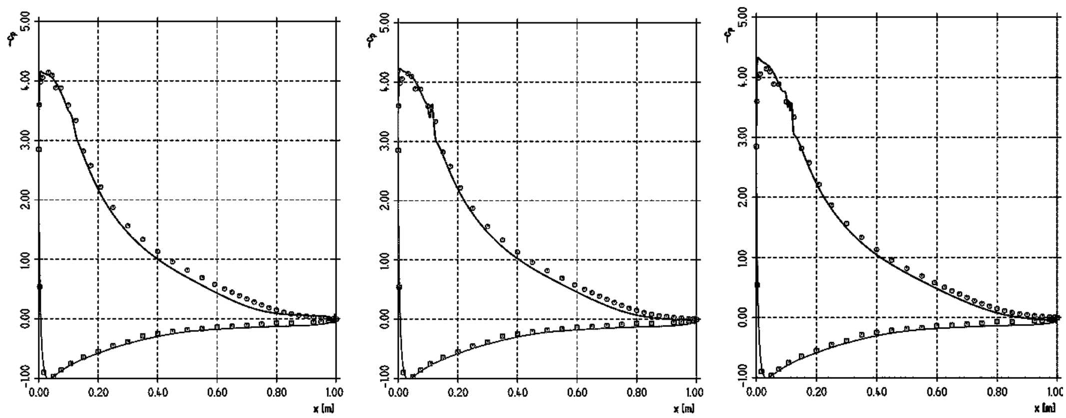
Окончательно, координаты узла новой сетки (x', y') определялись с помощью линейной интерполяции координат вспомогательных точек (x_1', y_1') и (x_2', y_2'):

$$\begin{aligned} x' &= x_1' + w \cdot (x_2' - x_1'), \\ y' &= y_1' + w \cdot (y_2' - y_1'). \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Поскольку приведенный выше метод интерполяции использует четыре узла исходной сетки, его нельзя применять для интерполяции узлов на первый и последний шаг линии исходной сетки, поэтому в этом случае в данной работе использовалась линейная интерполяция.

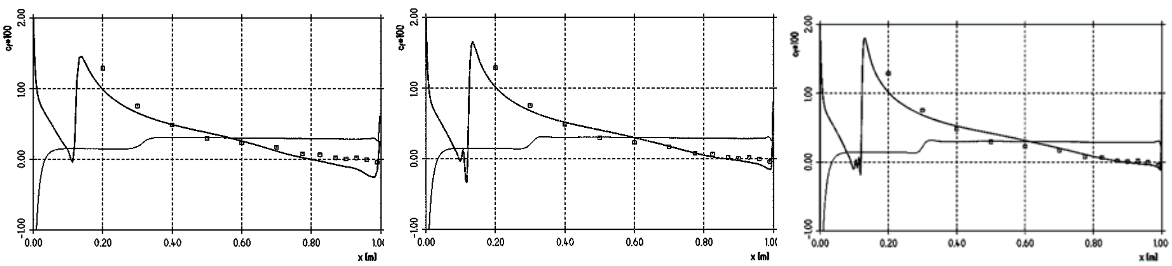
Глава 3. Исследование влияния сетки на результаты расчетов

Как уже говорилось во введении, одной из основных целей данной работы является исследование влияния сетки на результаты расчетов рассматриваемого течения. Поводом для проведения подобного исследования послужили результаты, полученные в работе [6], в которой производился расчет обтекания А-профиля на базовой (1024×257) сетке и на двух сетках, построенных на основе базовой при помощи загрубления (см. п. 2.1.) в 2 и в 4 раза (513×129 и 257×65 узлов соответственно). Результаты расчетов показали отсутствие сходимости по сетке, как для распределения коэффициентов давления и трения C_p и C_f вдоль поверхности профиля, так и для интегральных силовых коэффициентов – коэффициента сопротивления C_D и коэффициента подъемной силы C_L (см. рис. 3.1 и 3.2 и таблицу 3.1). При этом не было до конца ясно, связано ли отсутствие сходимости по сетке с какими-либо объективными причинами или является следствием недостатков конкретного вычислительного алгоритма и модели турбулентности.



(а) (б) (в)

Рис. 3.1. Распределение коэффициента давления вдоль профиля, полученное в работе [6], **(а)** – для сетки 257×65, **(б)** – для сетки 513×129, **(в)** – для базовой сетки (1025×257).



(а) **(б)** **(в)**

Рис. 3.2. Распределение коэффициента трения вдоль профиля, полученное в работе [6], **(а)** – для сетки 257×65, **(б)** – для сетки 513×129, **(в)** – для базовой сетки (1025×257).

Размер сетки	257×65	513×129	1025×257
C_D	0.02457	0.02098	0.01879
C_L	1.5269	1.5424	1.5694
Положение отрыва на задней кромке	0.7996	0.8619	0.8929

Таблица 3.1. Параметры решений, полученных в работе [6].

Видно, что даже между двумя наиболее мелкими сетками различия для интегральных параметров достигают 10%. Это различие кажется очень большим, учитывая то, что базовая сетка состоит почти из 300000 узлов.

3.1. Результаты предварительных расчетов

Прежде всего, чтобы получить ответ на вопрос не является ли обнаруженная в работе [6] аномальная чувствительность решения к расчетной сетке следствием использовавшихся в ней вычислительного алгоритма и модели турбулентности, в рамках данной работы были повторены расчеты работы [6] с использованием численного метода, описанного в главе 1 и модели турбулентности Спаларта-Аллмареса. (в работе [6] использовалась модель Джонсона-Кинга [12]). При этом, как и в работе [6], положение точки перехода на верхней поверхности профиля задавалось в сечении x/c = 0.12, а на нижней – при x/c = 0.3.

Проведенная серия расчетов показала, что решения полученные в данной работе на сетках 513×129 и 1025×257, различаются меньше, чем решения, полученные на этих же сетках в работе [6]. Тем не менее, чувствительность решения к сетке остается весьма высокой (см. рис. 3.3 и 3.4 и таблицу 3.2).

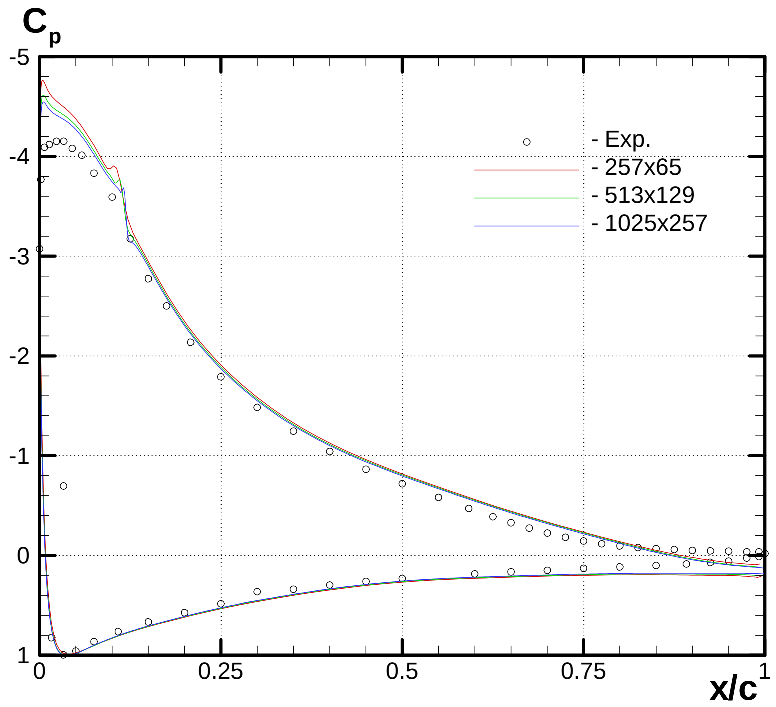


Рис. 3.3. Распределения коэффициента давления, полученные в данной работе на сетках из работы [6].

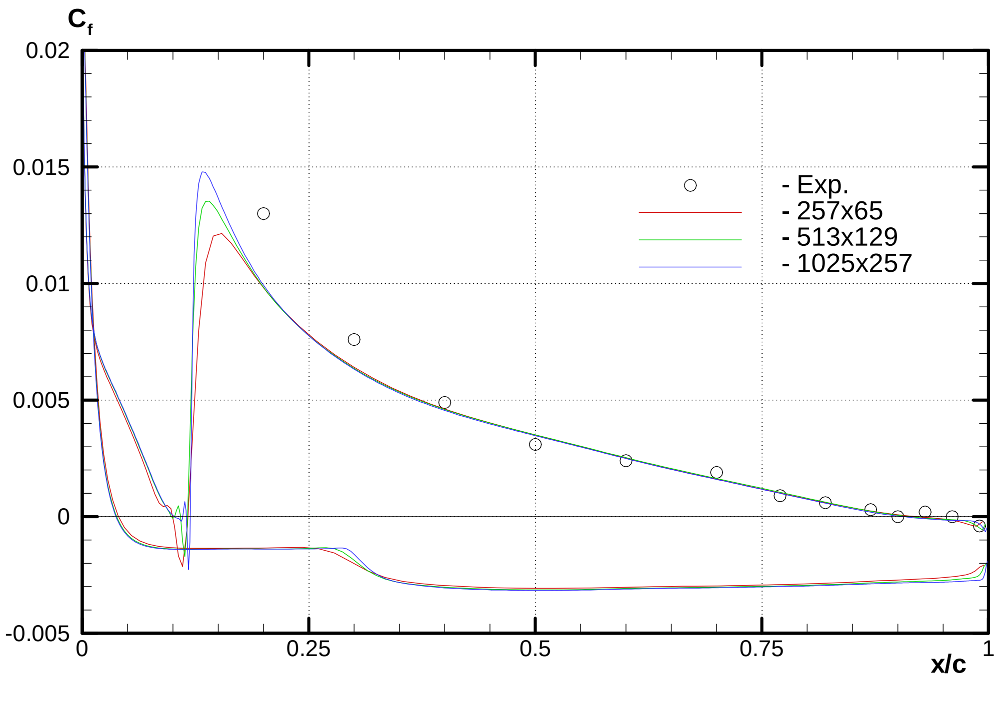


Рис. 3.4. Распределения коэффициента трения, полученные в данной работе на сетках из работы [6].

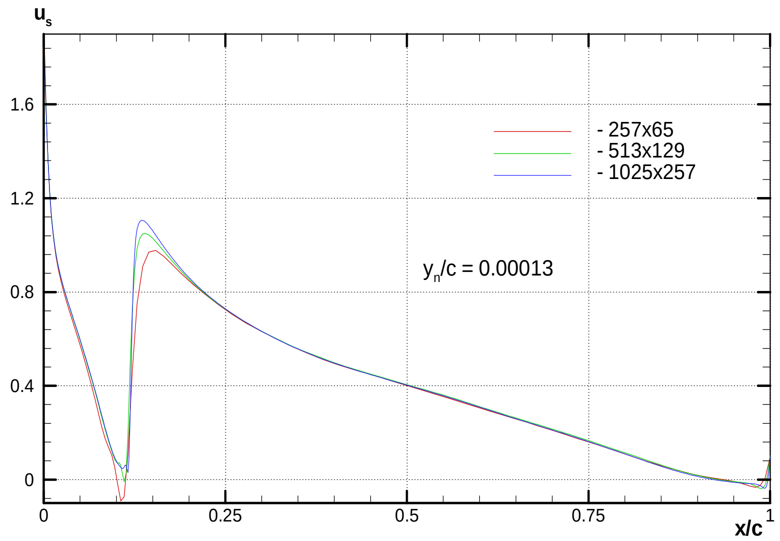
Размер сетки	257×65	513×129	1025×257
C_D	0.01342	0.01948	0.02019
C_L	1.707	1.680	1.659
Положение отрыва на задней кромке	0.9206	0.9137	0.9060

Таблица 3.2. Параметры решений, полученных в данной работе на сетках из работы [6].

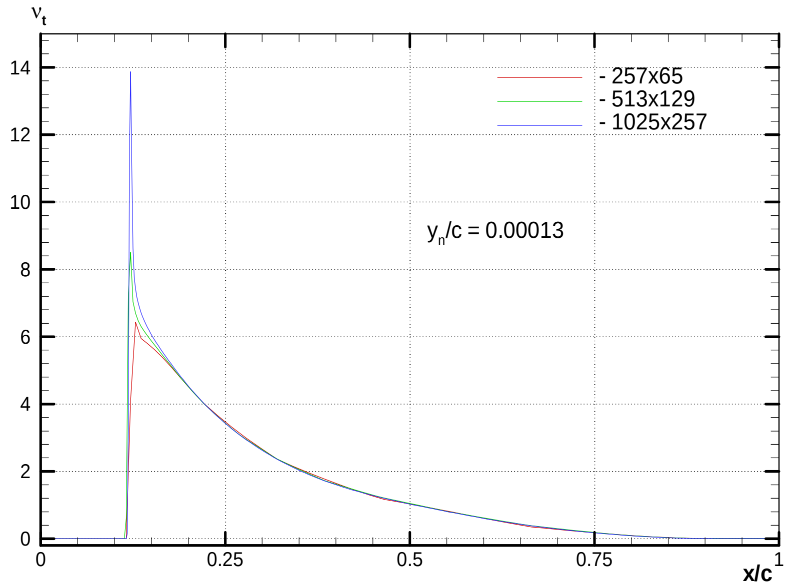
При этом наибольшие различия в распределениях коэффициента давления для разных сеток, как и в работе [6], имеют место в лобовой области профиля (то есть в области максимума абсолютной величины коэффициента давления), а наибольшие различия в распределениях коэффициента трения для разных сеток имеют место в области перехода на верхней поверхности. С другой стороны, в данной работе максимум абсолютной величины коэффициента давления оказывается тем меньше, чем мельче сетка, тогда как в [6], с измельчением сетки его значение возрастает.

Таким образом, можно заключить, что хотя численный метод и, возможно, используемая модель турбулентности накладывают определенный отпечаток на получаемые результаты расчетов, сильная чувствительность решения рассматриваемой задачи к сетке не зависит от указанных факторов и является объективным “свойством” исследуемого течения.

Заметим, что при проведении описанных расчетов с использованием подробных сеток возникли серьезные трудности с итерационной сходимостью задачи в рамках метода установления: для достижения сходимости итераций с требуемой точностью пришлось решать задачу в нестационарной постановке, что существенно увеличило вычислительные затраты. Анализ результатов показал, что проблемы со сходимостью связаны с наличием переходного отрывного пузыря на верхней поверхности профиля. В конце этого пузыря, при присоединении потока, возникают большие градиенты газодинамических величин (рис. 3.5), которые приводят к нарушению монотонности решения при использовании схемы третьего порядка (рис. 3.6), что, по-видимому, и является причиной проблем со сходимостью итераций.



(а)



(б)

Рис. 3.5. Распределение касательной к профилю составляющей скорости (а) и турбулентной вязкости (б) вдоль верхней поверхности профиля на расстоянии 0.00013 по нормали к профилю.

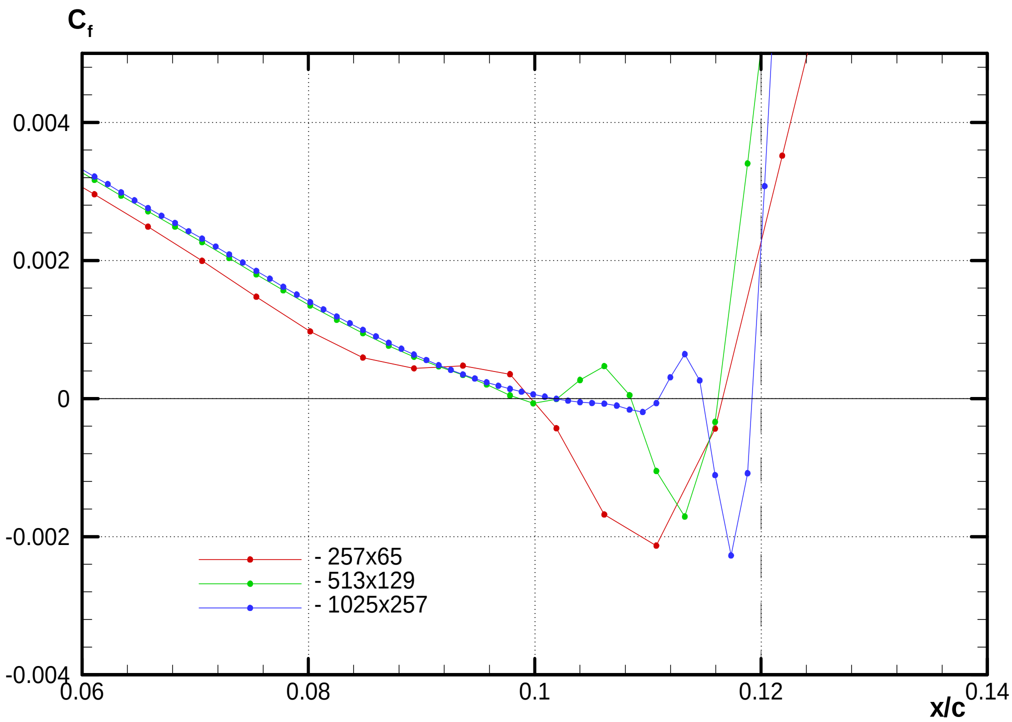


Рис. 3.6. Распределение коэффициента трения в области ламинарного отрыва и перехода на верхней поверхности (пунктиром отмечено положение точки инициализации предписанного перехода).

К сожалению, попытки устранения данной проблемы путем использования так называемого подхода с естественным переходом [13] вместо задания положения точки перехода, а также локального понижения порядка аппроксимации схемы до первого в области немонотонности решения и использования ограничителей, применямых для борьбы с немонотонностью решения при расчете течений с ударными волнами [10], не принесли положительных результатов. Поэтому при проведении дальнейших исследований, направленных на решение основной задачи настоящей работы (ответ на вопрос о причинах необычно сильной чувствительности решения к размеру используемой сетки), было принято решение изменить координату задаваемой в расчете точки перехода на верхней поверхности таким образом, чтобы исключить образование отрывного пузыря, а именно задать ее равной x/c = 0.08. В этом случае переходный пузырь не образуется, что в значительной мере решает описанные выше вычислительные проблемы. В то же время, указанное изменение не оказывает какого-либо существенного влияния на решение (табл. 3.3), что неудивительно, учитывая малые размеры отрывного пузыря (2% от длины хорды профиля, см. рис.3.6).

	C_D	C_L	Положение отрыва на задней кромке
Переход в $x/c = 0.12$	0.02019	1.659	0.906
Переход в $x/c = 0.08$	0.02169	1.636	0.894

Таблица 3.3. Параметры решений, полученных на базовой сетке с различным положением точки предписанного перехода на верхней поверхности.

3.2. Исследование влияния структуры и размера сетки на результаты расчетов

Прежде всего было проведено два расчета, в которых сетка поочередно загрублялась относительно базовой путем исключения линий семейства i или j соответственно. Первая сетка состояла из 524×257 узлов (отметим, что в области точки перехода на верхней поверхности она совпадала с базовой), а вторая – из 1025×129 узлов.

Из результатов расчетов, представленных на рис. 3.7 и в таблице 3.4, видна заметная разница как в распределении коэффициента давления, так и в значениях интегральных коэффициентов сопротивления и подъемной силы (различия в последних достигают 15%). Таким образом, очевидно, что простое загрубление базовой сетки по какому-либо из двух направлений необосновано и для получения удовлетворительных по точности результатов на сетках меньшего размера необходимо изменение ее структуры, а именно, перераспределение узлов на линиях обоих семейств.

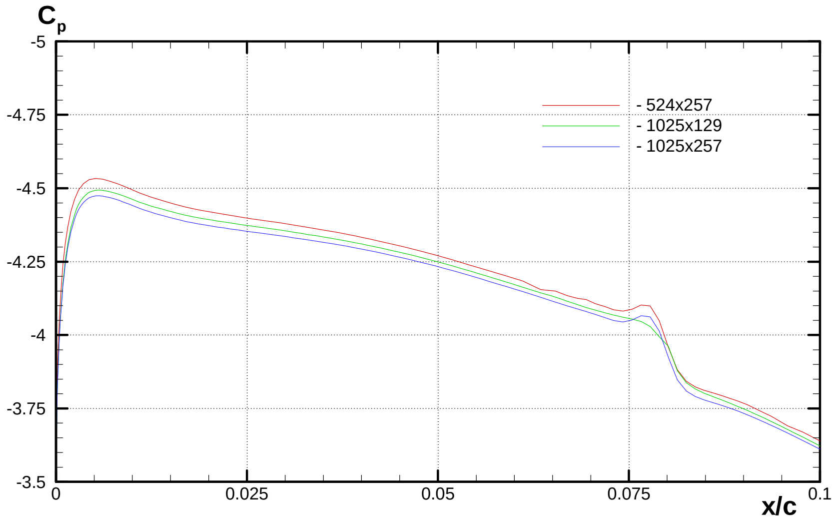


Рис. 3.7. Распределение коэффициента давления на верхней поверхности в лобовой области профиля.

	C_D	C_L	Положение отрыва на задней кромке
1025×257	0.02169	1.636	0.894
524×257	0.02183	1.657	0.891
1025×129	0.02504	1.651	0.898

Таблица 3.4. Параметры решений, полученных для разных сеток, с предписанным переходом на верхней поверхности в точке x/c = 0.08.

3.2.1. Влияние распределеня узлов вдоль *i*-линий

Для выяснения вопроса о том, каким именно образом следует перераспределить узлы сетки вдоль *i*-линий расчетная область разбивалась на подобласти, включающие те или иные особенности течения (рис. 3.8), и проводились расчеты, в которых последовательно варьировались параметры сетки в отдельных подобластях.

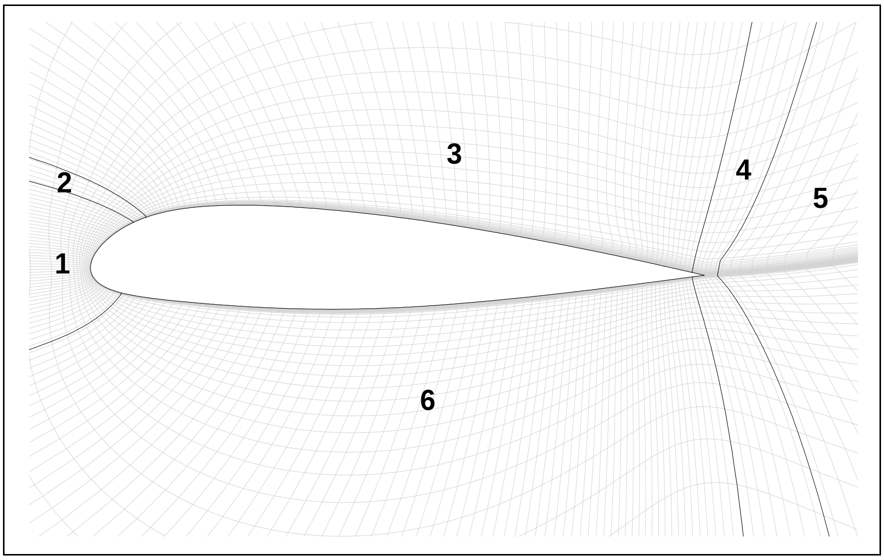


Рис. 3.8. Подобласти, в которых исследовались требования к распределению узлов вдоль *i*-линий. 1 – ламинарное течение в окрестности критической точки, 2 – область перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения на верхней поверхности профиля, 3 – область турбулентного течения на верхней поверхности, 4 – область в окрестности острой задней кромки профиля, 5 – область следа, 6 – область течения на нижней поверхности.

В первую очередь, следует отметить, что решение уравнения переноса в модели турбулентности Спаларта-Аллмареса в области инициализации искусственного перехода от ламинарного к турбулентному режиму (2 – на рис. 3.8) всегда зависит от сетки, поскольку член уравнения, отвечающий за переход зависит от шага сетки вдоль стенки в точке перехода (см. формулы (1.2.5), (1.2.6)). При этом влияние этой зависимости на характеристики решения, прежде всего на интегральные коэффициенты несущественно, поэтому сетка по i в этой области (при $0.07 \le x/c \le 0.09$) в процессе расчетов не изменялась.

Эксперименты с различными сетками в остальных областях потока показали, что наиболее сильное влияние на результаты расчетов оказывает сетка в окрестности задней кромки профиля (область 4 на рис. 3.8). Это объясняется тем, что в этой области имеет место очень резкое изменение давления, связанное с выравниванием давлений над и под профилем, которое происходит на расстоянии порядка 1% хорды профиля. При этом, погрешность расчета оказывается не локальной, а сказывается на распределении давления на всем профиле вплоть до лобовой точки, что наглядно иллюстрирует рис. 3.9. В связи с этим загрубление сетки в области $0.98 \le x/c \le 1.02$ недопустимо (как показали расчеты, сохранение мелкой сетки в более широкой области не имеет смысла, так как это практически не влияет на решение (рис. 3.10)).

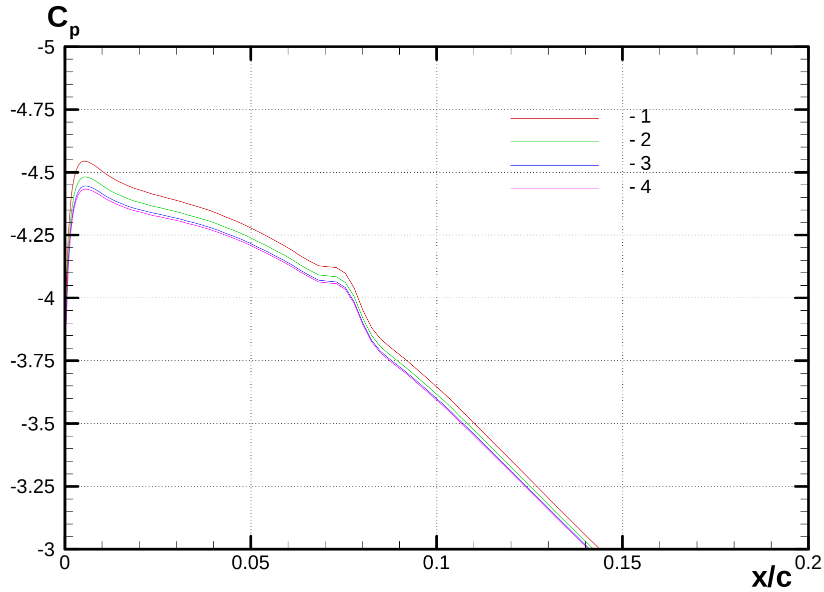


Рис. 3.9. Влияние продольной сетки в окрестности задней кромки на **р**аспределение коэффициента давления в окрестности критической точки и в области перехода на верхней поверхности профиля. 1 – сетка, загрубленная в два раза относительно базовой, 2 – сетка, совпадающая с базовой, 3 – сетка, измельченная в два раза, 4 – сетка, измельченная в три раза.

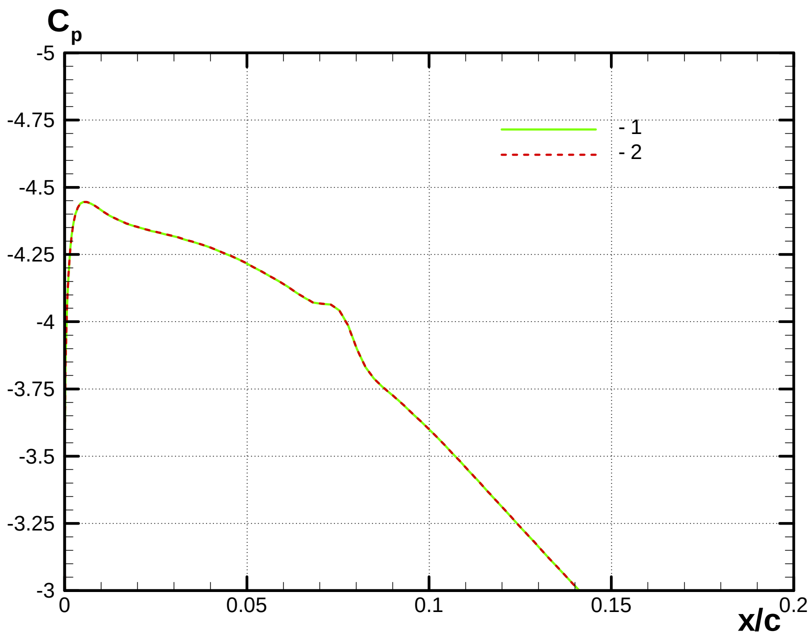


Рис 3.10. Распределение коэффициента давления в лобовой области на верхней поверхности профиля для сеток, измельченных в два раза в области задней кромки. 1 – сетка, измельченная в области $0.9 \le x/c \le 1.05$, 2 – сетка, измельченная в области $0.98 \le x/c \le 1.02$.

Аналогичные эксперименты с различными сетками в остальных областях потока (область ламинарного течения в окрестности критической точки, область турбулентного течения на верхней поверхности, область следа и область течения на нижней поверхности – области 1, 3, 5, 6 на рис. 3.8) показали, что в них сетка может быть загрублена в два раза относительно базовой без существенного влияния на решение: изменение интегральных сил составляет при этом менее 1%.

3.2.2. Влияние распределения узлов вдоль *j*-линий

Характерной особенностью распределения узлов вдоль *j*-линий базовой сетки является наличие двух зон (см. рис. 3.11). Хотя внутри каждой зоны шаги изменяются плавно, на границе зон (красная линия на рисунке) имеет место резкое изменение величины шага – соседние шаги сетки могут отличаться до двух раз, что очевидно может приводить к существенному ухудшению точности получаемых результатов. Кроме того, в некоторых сечениях профиля это приводит к недопустимо быстрому увеличению поперечного шага внутри пограничного слоя, что также негативно сказывается на точности решения.

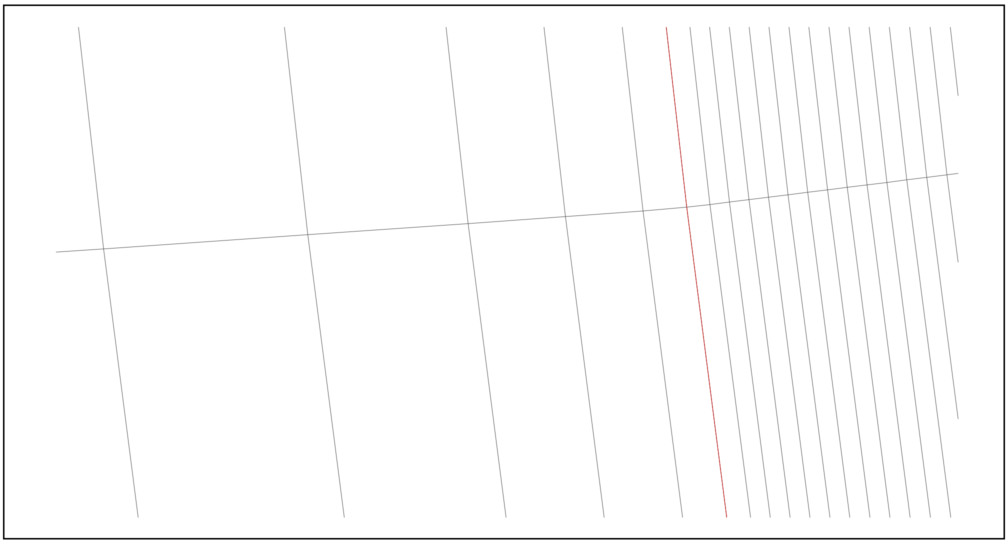


Рис. 3.11. Участок базовой сетки вблизи критической точки профиля. Красным цветом отмечена *i*-линия, ограничивающая пристенную зону на *j*-линиях.

Чтобы устранить этот недостаток, в данной работе была изменена структура распределения узлов вдоль *j*-линий, так, чтобы вдоль каждой линии шаги сетки составляли геометрическую прогрессию (при этом, как обычно, ограничивался максимально допустимый шаг сетки).

На сетке такой структуры было проведено исследование влияния величины пристенного шага при фиксированном количестве узлов на каждой *j*-линии. Результаты расчетов показали, что уменьшение величины пристенного шага по сравнению с базовой сеткой практически не сказывалось на решении (таблица 3.5).

	C_D	C_L	Положение отрыва на задней кромке
Пристенный шаг базовой сетки	0.02171	1.654	0.885
Пристенный шаг, уменьшенный в два раза	0.02161	1.653	0.884
Пристенный шаг, уменьшенный в четыре раза	0.02154	1.652	0.883

Таблица 3.5. Влияние пристенного шага для сетки с 129-ю узлами на каждой *j*-линии.

Кроме того, рассматривалось влияние на результаты расчетов величины отношения соседних шагов на *j*-линиях сетки (таблица 3.6). Видно, что для получения достаточно точного решения эта величина не должна превышать значение 1.1.

	C_D	C_L	Положение отрыва на задней кромке
Пристенный шаг, как в базовой сетке Максимальное отношение соседних шагов на *j*-линии: 1.07 Количество узлов на *j*-линии: 208	0.02159	1.637	0.883
Пристенный шаг, как в базовой сетке Максимальное отношение соседних шагов на *j*-линии: 1.125 Количество узлов на *j*-линии: 127	0.02119	1.632	0.879
Удвоенный пристенный шаг. Максимальное отношение соседних шагов на *j*-линии: 1.1 Количество узлов на *j*-линии: 139	0.02145	1.634	0.883

Таблица 3.6. Влияние величины отношения соседних шагов сетки на *j*-линии.

Наконец, эксперименты, направленные на оценку влияния величины максимального шага сетки, показали, что ее изменение в диапазоне от 0.5 до 1.0 практически не сказывается на распределении давления и интегральных характеристиках потока.

Сравнение сетки с описанным выше распределением узлов по j с базовой сеткой представлено на рис. 3.12, из которого, в частности, ясно виден упоминавшийся выше недостаток последней: шаг сетки на j-линии начинает резко возрастать еще внутри пограничного слоя.

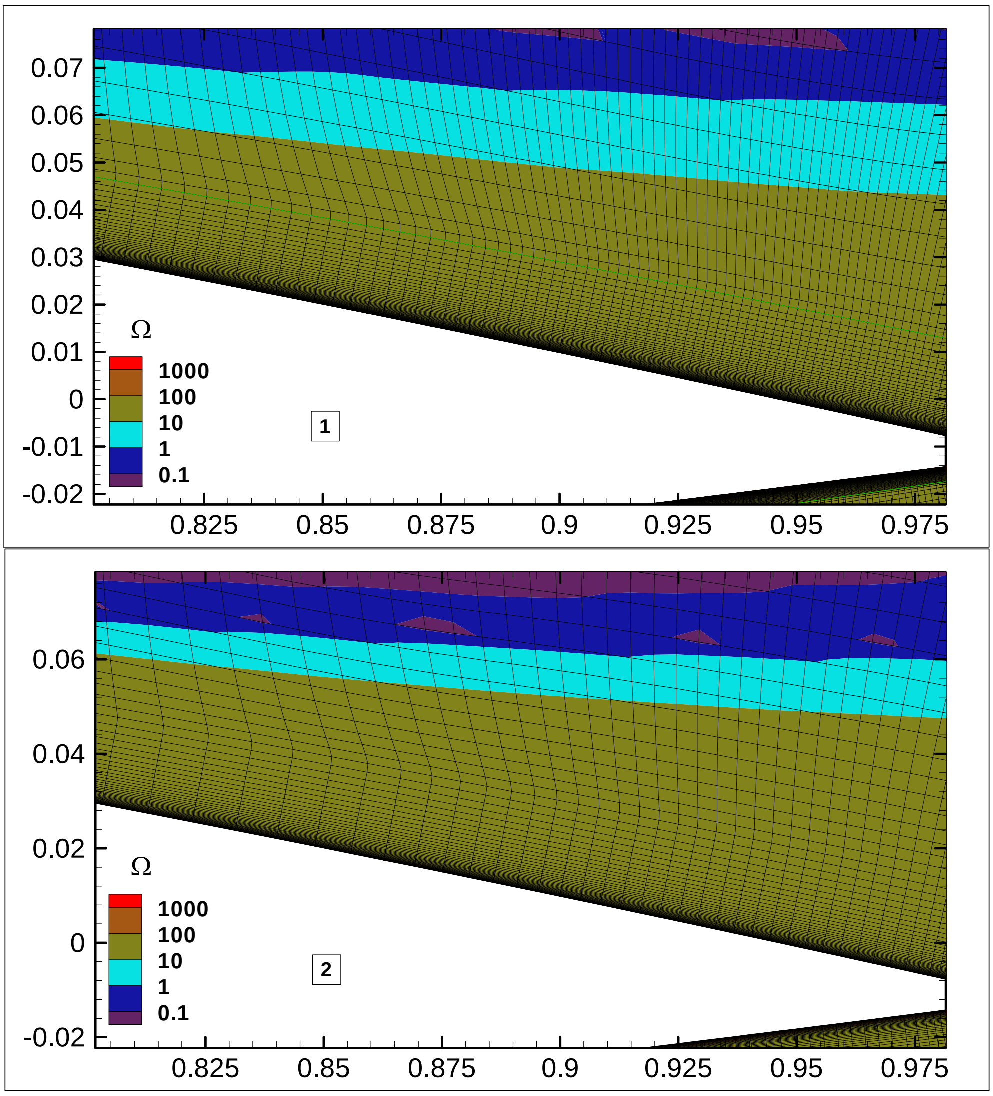


Рис. 3.12. Поле завихренности в области отрыва у задней кромки профиля. 1 – базовая сетка, загрубленная в два раза (зеленым цветом отмечена i-линия, ограничивающая пристенную зону; 2 – сетка с перераспределенными узлами вдоль j-линий.

3.2.3. Построение “оптимальной” сетки

Проведенные численные эксперименты позволяют построить для рассматриваемого течения сетку, которая не уступает базовой по точности, с одной стороны, и заметно меньше базовой по количеству

Вдоль *i*-линий в этой сетке в области перехода на верхней поверхности ($0.07 \le x/c \le 0.09$) и в области задней кромки ($0.98 \le x/c \le 1.02$) распределение узлов совпадает с базовым; в остальных областях распределение узлов задается таким, как в более грубой сетке 513×129.

Вдоль *j*-линий пристенный шаг задается в два раза большим, чем у базовой сетки (то есть примерно таким же, как в более грубой сетке 513×129), а максимальное отношение соседних шагов сетки вдоль *j*-линии – равным 1.1. Полученная таким образом сетка имеет размер 554×139 узлов.

Чтобы убедиться в том, что эта сетка действительно позволяет получить достаточно точное решение, был проведен контрольный расчет на существенно более подробной сетке 1262×208 узлов (измельченной примерно в два раза по *i* и в полтора раза по *j*) с аналогичной структурой.

Из рис. 3.13, 3.14 видно, что результаты расчетов на “оптимальной” и измельченной сетках практически идентичны. Кроме того, как видно из таблицы 3.7, разница в интегральных параметрах течения, рассчитанных с использованием этих двух сеток составляет менее одного процента.

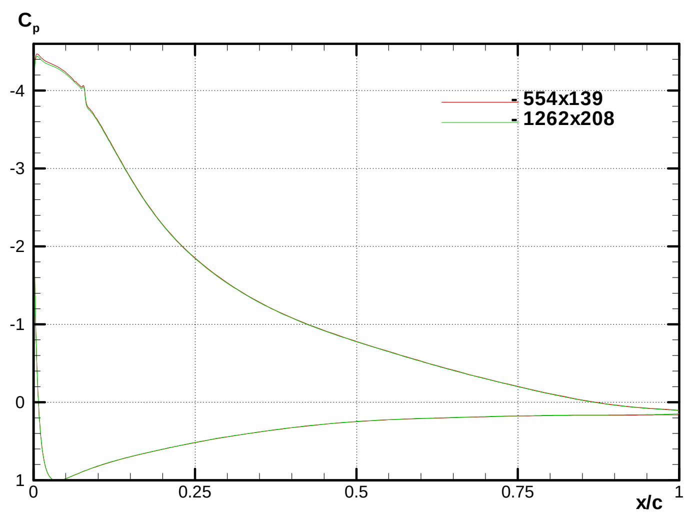


Рис. 3.13. Распределение коэффициента давления вдоль поверхности профиля для сеток 554×139 и 1262×208.

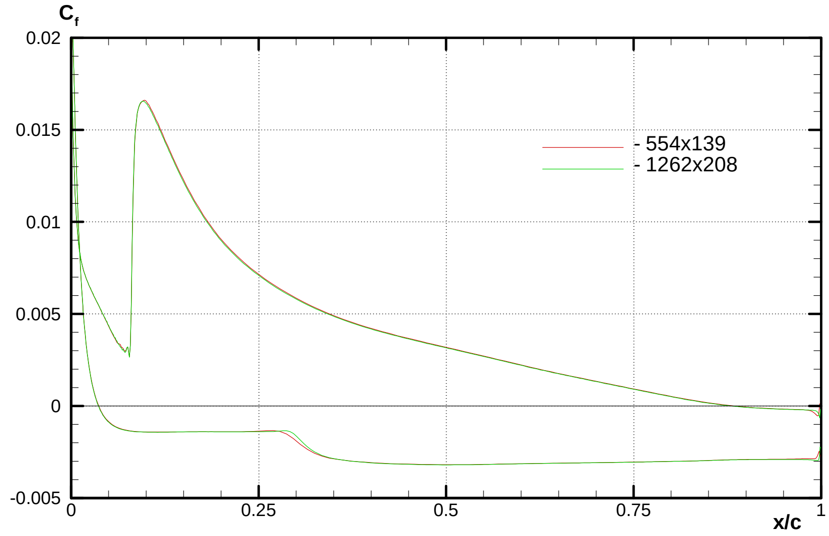


Рис. 3.14. Распределение коэффициента трения вдоль поверхности профиля для сеток 554×139 и 1262×208.

	C_D	C_L	Положение отрыва на задней кромке
554×139	0.02158	1.634	0.884
1262×208	0.02162	1.624	0.876

Таблица 3.7. Параметры решений, полученных на сетках 554×139 и 1262×208.

Глава 4. Исследование влияния трехмерных эффектов

4.1. Постановка задачи

Как уже говорилось во введении, одной из целей настоящей работы является оценка влияния боковых стенок экспериментальной секции аэродинамической трубы на рассматриваемое течение. Для этого был проведен трехмерный расчет данного течения с учетом вязких эффектов на этих стенках. При этом расчетная область в плоскости *XY* совпадала с расчетной областью для двумерной задачи (рис. 4.1), а размер области вдоль оси *z* выбирался, исходя из условий эксперимента [2], в котором размер экспериментальной секции был в три раза больше длины хорды профиля. Соответственно, размер расчетной области вдоль оси *z* от стенки до плоскости симметрии равняется 1.5*c* (*c* – длина хорды профиля).

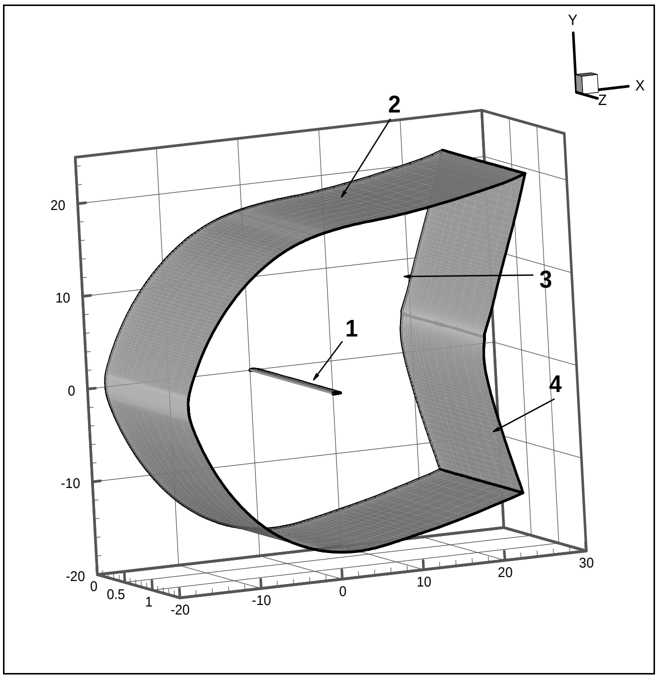


Рис. 4.1. Форма расчетной области. 1 – профиль, 2 – внешняя граница расчетной области, 3 – боковая стенка, 4 – плоскость симметрии.

В связи с переходом к трехмерной постановке задачи необходимо поставить граничные условия на дополнительных границах расчетной области. На границе $z/c = 1.5$ (плоскость симметрии, 4 – на рис. 4.1.) ставятся условия симметрии для всех переменных (w = 0 и нулевая производная по z для остальных переменных).

Боковая стенка (z/c = 0, 3 – на рис. 4.1). разбивается на две части (см. рис. 4.2). На внешней части этой плоскости ставятся граничные условия свободного скольжения ($w=0, \partial u/\partial z=0, \partial v/\partial z=0, \partial \nu_t/\partial z=0$), а на внутренней условия прилипания $w=0, u=0, v=0, \nu_t=0$. Это делается для того, чтобы обеспечить заданную толщину пограничного слоя в сечении $x=0$, где находится лобовая точка профиля. При этом для давления и температуры в обеих областях ставятся такие же условия, как и на поверхности профиля.

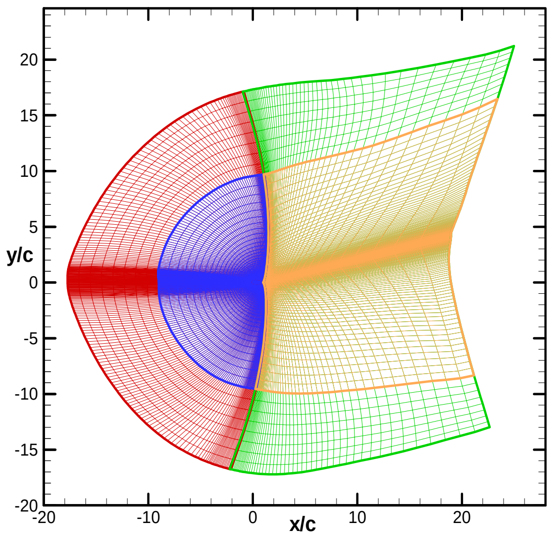


Рис. 4.2. Сечение расчетной сетки на боковой стенке. Красный – первый блок, условия проскальзывания. Синий – первый блок, условия прилипания. Зеленый – второй блок, условия проскальзывания. Оранжевый – второй блок, условия прилипания.

Кроме того, на входных участках внешней границы добавляется граничное условие для третьей компоненты скорости $w=0$, а на выходных – мягкое условие для той же компоненты скорости.

Наконец, для того, чтобы пограничный слой на боковой стенке был турбулентным, на входной границе расчетной области в профиль турбулентной вязкости вносилось возмущение вблизи боковой стенки толщиной порядка нескольких узлов сетки (рис. 4.3).

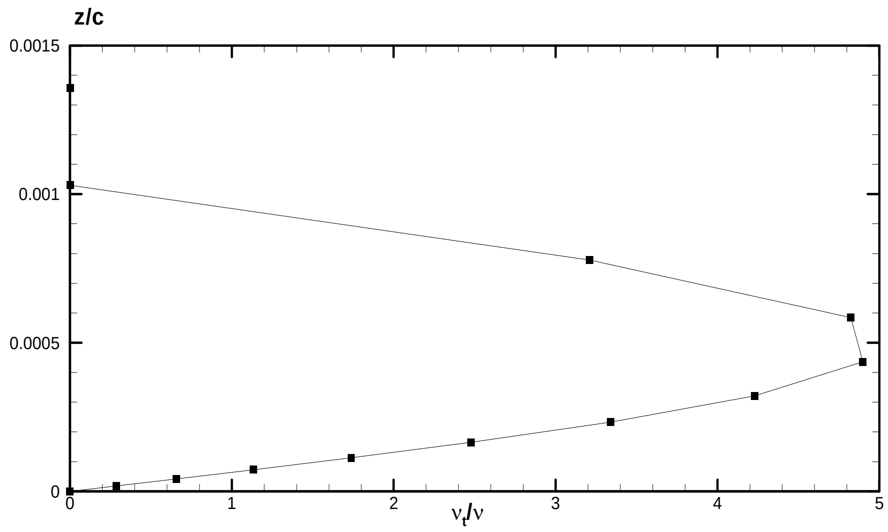


Рис. 4.3. Распределение турбулентной вязкости вдоль координаты *z* на входной границе.

4.2. Расчетная сетка

В данной работе трехмерная сетка строилась на основе соответствующей двумерной сетки таким образом, что каждое сечение трехмерной сетки в плоскости *XY* представляло собой точную копию двумерной сетки.

Чтобы уменьшить вычислительные затраты, двумерная сетка, на основе которой строилась трехмерная сетка, была несколько загрублена относительно “оптимальной” (385×119 вместо 554×139). Отличие результатов по интегральным характеристикам C_D и C_L, полученных на этой сетке, от результатов, полученных на заведомо мелкой сетке, не превышает 2%, что не играет особой роли, учитывая цели трехмерного расчета.

Для выбора параметров распределения узлов сетки вдоль поперечной координаты *z* и определения положения линии смены граничного условия на боковой стенке был проведен вспомогательный двумерный расчет течения в плоском канале при отсутствии профиля.

Построенная на основании этого расчета сетка по *z* имела следующие параметры: размер пристенного шага сетки равен 2×10^{-5} (что обеспечивало выполнение условия $\Delta z_1^+<1$), отношение соседних шагов сетки задавалось равным 1.3, а максимальный размер шага сетки ограничивался величиной 0.2.

Таким образом, каждая k-линия содержала 41 узел. Общее количество узлов в сетке для трехмерного расчета составляло примерно 1.9 миллиона.

Поскольку информация об экспериментальной толщине пограничного слоя, к сожалению, недоступна, толщина набегающего на профиль турбулентного пограничного слоя задавалась произвольно и составляла 5% ширины канала ($0.15c$). Для того, чтобы обеспечить такую толщину пограничного слоя расстояние от профиля до линии смены граничного условия на боковой стенке составляло примерно $10c$ (см. рис. 4.2)

4.3. Анализ результатов

Проведенный расчет показал, что рассматриваемое течение имеет существенно трехмерную структуру с практически полным отсутствием однородного двумерного ядра. Это видно как из распределений секционных коэффициентов сопротивления C_D (рис. 4.4) и подъемной силы C_L (рис. 4.5) по z, так и из распределений коэффициентов трения C_f (рис. 4.6) и давления C_p (рис. 4.7) по поверхности профиля. Кроме того, из представленных результатов видно, что сильные отклонения от двумерного характера течения наблюдаются вплоть до значений z/c=1.0, что почти в семь раз превышает толщину набегающего пограничного слоя ($0.15c$). Наконец, следует отметить сложную трехмерную отрывную структуру течения на профиле в этой области (рис. 4.6).

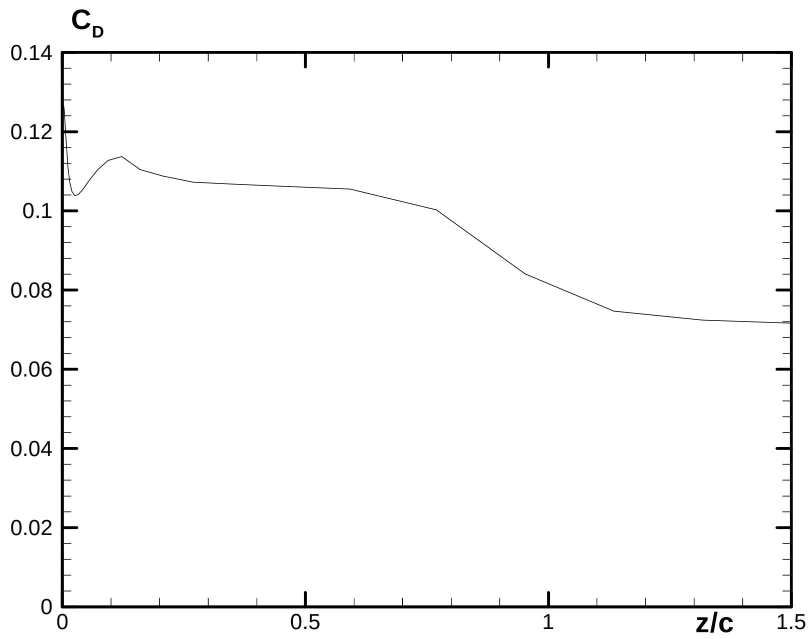


Рис. 4.4. Распределение коэффициента сопротивления в разных сечениях расчетной области.

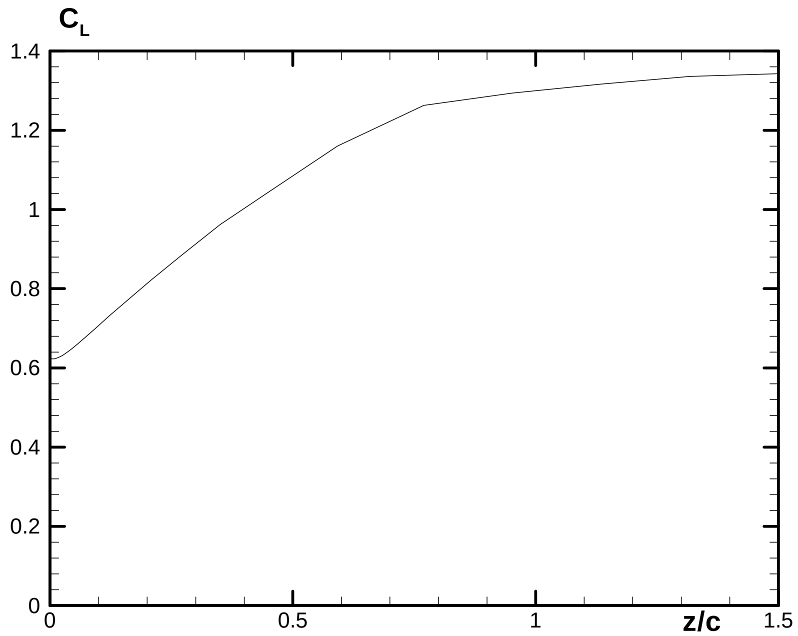


Рис. 4.5. Распределение коэффициента подъемной силы в разных сечениях расчетной области.

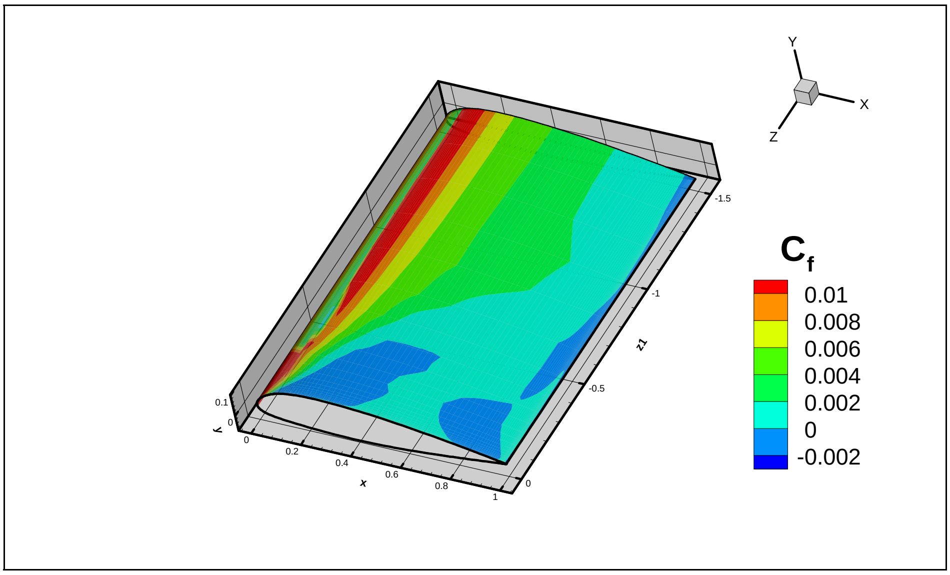


Рис. 4.6. Распределение коэффициента трения на верхней поверхности профиля (на переднем плане – боковая стенка,на заднем – плоскость симметрии).

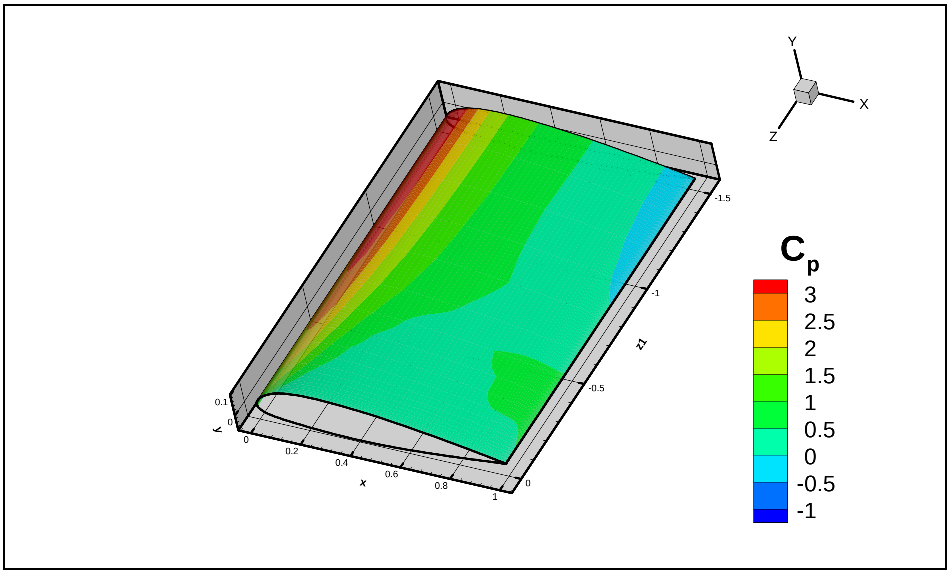


Рис. 4.7. Распределение коэффициента давления на верхней поверхности профиля (на переднем плане – боковая стенка, на заднем – плоскость симметрии).

С точки зрения целей данной работы, наибольший интерес представляет сравнение параметров в плоскости симметрии, рассчитанных в рамках трехмерной постановки задачи, с результатами двумерного расчета, выполненного на такой же сетке. На рис. 4.8-4.9 представлены зависимости C_p и C_f, а в таблице 4.1 приведены значения C_D и C_L для рассматриваемых двух случаев. Видно, что различия между двумерным и трехмерным расчетами оказались исключительно большими (например, коэффициент сопротивления отличается более чем в три раза).

	C_D	C_L	Положение отрыва на задней кромке
3D	0.07165	1.342	0.959
2D	0.02124	1.633	0.882

Таблица 4.1. Параметры решения трехмерной задачи (в плоскости симметрии) и двумерной задачи.

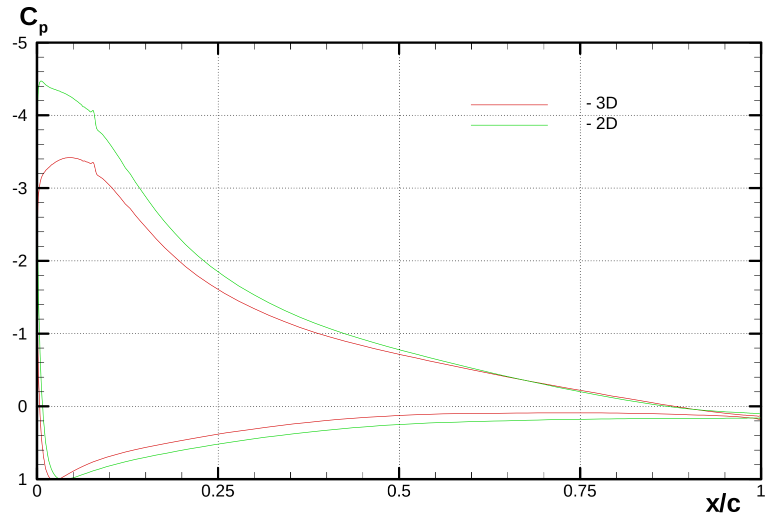


Рис. 4.8. Распределение коэффициента давления для трехмерного расчета (в плоскости симметрии) и для двумерного расчета.

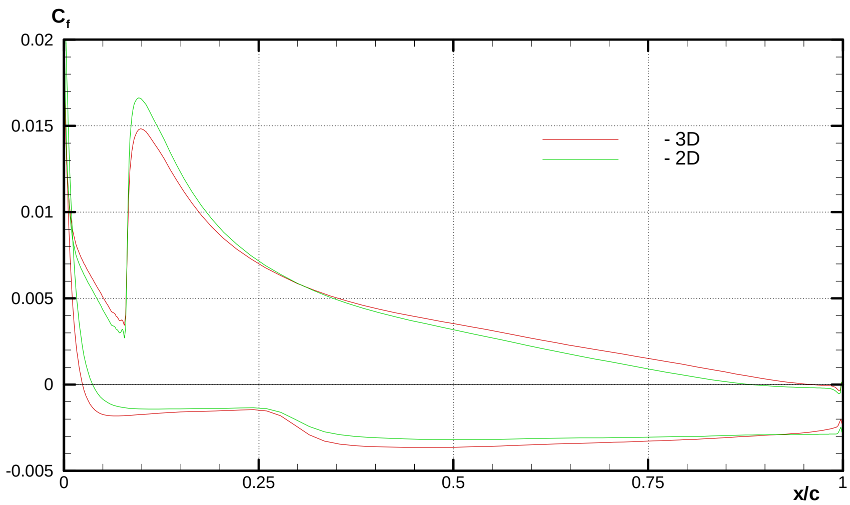


Рис. 4.9. Распределение коэффициента трения для трехмерного расчета (в плоскости симметрии) и для двумерного расчета.

Таким образом, результаты проведенных расчетов показывают, что наличие боковых стенок приводит к кардинальной перестройке течения и оказывает очень сильное влияние на его характеристики в плоскости симметрии профиля. Следует, однако, подчеркнуть, что выбор толщины набегающего на профиль пограничного слоя в данной работе был произвольным, и в экспериментах он, возможно, был значительно тоньше. Таким образом, для окончательного ответа на вопрос о роли трехмерных эффектов, необходимо уточнение параметров экспериментальной установки [2].

Заключение

В заключение сформулируем основные результаты данной работы.

1. Выявлены причины аномально сильной чувствительности решения к сетке, обнаруженной в работе [6], и показаны основные недостатки сеток, использовавшихся в этой работе.
2. Построена сетка размером 554×139, которая обеспечивает достаточно точное решение рассматриваемой задачи (интегральные характеристики течения, полученные с использованием этой сетки, отличаются от аналогичных характеристик, полученных на заведомо мелкой сетке не более чем на 1%) и почти в четыре раза меньше по количеству узлов, чем базовая сетка.
3. Проведен трехмерный расчет, в котором учитывалось влияние пограничных слоев на боковых стенках рабочей секции аэродинамической трубы. Показано, что течение в окрестности профиля имеет существенно трехмерную структуру без выраженного двумерного ядра. При этом характеристики трехмерного течения в плоскости симметрии сильно отличаются от соответсвующих характеристик, рассчитанных в рамках двумерной постановки задачи. Хотя это может объясняться некоторым произволом в задании толщины набегающего на профиль пограничного слоя, полученные результаты свидетельствуют о некорректности априорного (без специального предварительного анализа) пренебрежения трехмерными эффектами при тестровании моделей турбулентности на основе экспериментальных данных.

Список литературы

1. *Huddeville R., Piccin O., Cassoudesalle D.* Operation decrochage – mesurement de frottement sur profiles AS 239 et A 240 a la sufflerie F1 du CFM. ONERA, TR RT-OA 19/5025 (RT-DERAT 19/5025 DN). Paris, 1987.

2. *Gleyzes C.* Operation decrochage – resultats de la 2eme campagne d'essais a F2 – mesures de pression et velocimetrie laser. ONERA, TR RT-DERAT 55/5004. Paris, 1989.

3. *EUROVAL* – A European Initiative on Validation of CFD Codes. (Haase W., Brandsma F., Elsholz E., Leschziner M.A., Schwamborn D. (eds)). Notes on Numerical Fluid Mechanics (NNFM) Volume 42, 1993.

4. *ECARP* – European Computational Aerodynamics Research Project: Validation of CFD Codes and Assessment of Turbulence Models. (Haase W., Chaput E., Elsholz E., Leschziner M.A., Müller U.R. (eds.)). Notes on Numerical Fluid Mechanics (NNFM) Volume 58, 1997.

5. *Mellen C*., *Frohlich J., Rodi W.* Lessons from LESFOIL Project on Large-Eddy Simulation of Flow Around an Airfoil. AIAA Journal, Vol. 41, No. 4, 2003.

6. *Haase W*. Privat communication. 2003.

7. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. Griffin Printing, Glendale, California, 1993.

8. *Roe P. L.* Approximate Rieman Solvers, Parameters Vectors and Difference Schemes. Journal of Computations Phys., 1981, Vol. 43, pp. 357-378.

9. *Steger J. L., Warming R. F.* Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamics Equations with Application to Finite-difference Methods. J. Comput. Phys. 1981. V. 40. N2. pp. 263-293.

10. *Hirsch Ch.,* Numerical computation of internal & external flows.(Wiley series in numerical methods in engineering) 'A Waley-Interscince publication', 1988.

11. *Spalart P.R., Allmaras, S.R.* A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. AIAA Paper, 1992, AIAA-92-0439.

12. *Johnson D.A., King L.S.* A mathematically simple turbulence closure model of attached and separated turbulent boundary layers. AIAA Journal, V. 23, N. 11, 1985, P. 1684-1692.

13. *Травин А.К.* Численное моделирование турбулентного обтекания цилиндра при докритических числах Рейнольдса. Вестник Молодых Ученых (прикладная математика и механика), 1997, № 1, стр. 48-55.