МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Институт прикладной математики и механики
Кафедра гидроаэродинамики

Диссертация допущена к защите
Зав. кафедрой, проф., д.ф.-м.н.
______________ Смирнов Е.М.
"____"_____________ 2014 г.

Исследование возможностей метода частично осреднённых уравнений Навье-Стокса (PANS) для расчета турбулентных течений

Диссертация на соискание ученой степени магистра
по направлению 010900 – Прикладные математика и физика
Магистерская программа: Модели и высокопроизводительные вычисления в физической гидрогазодинамике

Выполнил студент гр. 63603/1 Гусева Е.К.

Руководитель, к.ф.-м.н., доцент Гарбарук А.В.

Санкт-Петербург
2014

Оглавление

1. Введение

Несмотря на достаточно высокий уровень развития компьютерных технологий, достигнутый в настоящее время, проблема численного моделирования турбулентных течений по-прежнему остается одной из наиболее сложных и до конца нерешенных проблем механики жидкости и газа. Оптимальная стратегия расчета турбулентных течений зависит от сложности течения и требуемой для решения задачи точности. Во многих случаях методы, основанные на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (Reynolds-Averaged Navier-Stokes, RANS), позволяют предсказать средние характеристики течений с пригодной для инженерного проектирования точностью (пограничные слои с нулевым градиентом давления, течения в каналах, обтекание крылового профиля при небольших углах атаки и т. д.). Эти методы не требуют больших вычислительных затрат, допускают упрощение решаемых систем уравнений для двумерных или стационарных задач. Однако точность этого подхода недостаточна для течений, содержащих крупномасштабную неустойчивость, когда когерентные структуры играют критическую роль в формировании течения. Такие течения характеризуются сильными нелокальными эффектами, и модели с одноточечным замыканием, каковыми и являются RANS модели, по своей природе не способны точно предсказывать эти эффекты.

Для расчета таких течений может с успехом использоваться метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES), в рамках которого разрешаются все динамически важные масштабы течения и значительная часть инерционных масштабов, а моделированию подлежит относительно однородная и изотропная мелкомасштабная турбулентность, описание характеристик которой при помощи подсеточной модели оказывается гораздо более точным, чем моделирование всего спектра турбулентных пульсаций. Однако этот метод, как правило, требует чрезмерно больших вычислительных ресурсов, причем наиболее остро эта проблема проявляется при расчете пристеночных течений с высокими числами Рейнольдса, так как при этом основные вычислительные затраты (порядка 90%) приходятся именно на расчет пристенных областей потока.

Таким образом, очевидна необходимость развития методов, сочетающих в себе лучшие свойства обоих подходов. Широко признано, что гибридные RANS-LES подходы к моделированию турбулентных течений обеспечивают разумный компромисс между точностью расчета и вычислительными затратами [1]. В то время как одни подходы, такие как DES [2] и SAS [3], к настоящему времени хорошо изучены и широко распространены, другие пока остаются в тени. К последним относится, в частности, метод частичного осреднения уравнений Навье-Стокса (Partially-Averaged Navier-Stokes, PANS), впервые предложенный Girimaji [4].

В рамках данного метода турбулентные пульсации разделены на разрешенную и моделируемую части, однако, в отличие от LES подходов, это разделение не определяется шагом сетки, а задается управляющими параметрами метода – отношением моделируемой и полной кинетических энергий турбулентности $f_k = K_u / K$ и диссипаций $f_\varepsilon = \varepsilon_u / \varepsilon$. Следуя этому принципу, авторы разработали методику получения уравнений переноса моделируемых параметров потока на базе произвольной полуэмпирической модели турбулентности, включающей уравнение переноса кинетической энергии турбулентности.

Авторы приводят несколько потенциальных преимуществ предлагаемого метода [4]. В первую очередь, это физическая обоснованность и строгость математического вывода основных уравнений PANS, что выделяет этот подход среди многих существующих гибридных методов. Во многом это действительно так, однако некоторые предположения, используемые авторами в процессе вывода основных уравнений, являются не вполне обоснованными. В частности, это предположение о справедливости гипотезы Буссинеска для моделируемых турбулентных напряжений и формулы Колмогорова с константой $C_\mu = 0.09$ для определения турбулентной вязкости.

Другим важным достоинством PANS является простота реализации: поскольку основные уравнения метода отличаются от базовой модели только модификацией коэффициентов, PANS легко может быть имплементирован в любой вычислительный код, в котором реализованы соответствующие полуэмпирические модели турбулентности.

В зависимости от величины управляющих параметров основные уравнения метода PANS обеспечивают плавный переход от RANS ($f_k = 1$, $f_\varepsilon = 1$) к DNS ($f_k \to 0$, $f_\varepsilon \to 0$). Однако, в отличие от многих существующих подсеточных моделей LES, формулировка уравнений PANS не включает в себя линейный масштаб, основанный на шаге сетки, определение которого является нетривиальной задачей в областях с сильно анизотропными ячейками. Поэтому в качестве еще одного из преимуществ PANS авторы отмечают отсутствие необходимости определения подсеточных масштабов и, как следствие, возможность достижения сеточно-независимого решения при фиксированном значении управляющих параметров. Эти преимущества являются довольно спорными, поскольку отсутствие зависимости фильтрационных параметров от шага сетки в оригинальной модели не доказано, а результаты некоторых исследований (например [5]) свидетельствуют о наличии этой связи.

Таким образом, основная сложность практического применения PANS состоит именно в неопределенности выбора управляющих параметров метода f_k и f_ε, который не может быть случайным и должен зависеть от используемой сетки, схемы дискретизации и т. д. Для выяснения этой зависимость и оценки пригодности метода PANS для практического применения необходимо проведение дополнительных исследований.

Целью настоящей работы является исследование возможностей метода PANS для расчета турбулентных течений и анализ влияния параметров метода на примере канонических задач: вырождения однородной изотропной турбулентности и установившегося течения в плоском канале.

2. Метод частично осредненных уравнений Навье-Стокса

В оригинальной статье [4] уравнения PANS выведены на основе уравнений Навье-Стокса и процедуры фильтрации, которая отфильтровывает заданную параметром f_k часть кинетической энергии турбулентности. Замыкающие соотношения метода выводятся с использованием «стандартной» высокорейнольдсовой k-ε модели турбулентности [6] и ряда предположений, в частности:

1. на операцию фильтрации/осреднения накладываются требования коммутативности с операциями дифференцирования по пространству и времени;
2. для моделируемых напряжений справедлива гипотеза Буссинеска;
3. моделируемая турбулентная вязкость связана с моделируемой кинетической энергией K_u и моделируемой диссипацией ε_u формулой Колмогорова $\nu_u=C_{\mu u}K_u^2/\varepsilon_u$;
4. константа $C_{\mu u} = C_\mu = 0.09$ (не модифицируется).

Использование этих предположений позволяет получить уравнения движения, идентичные уравнениям Рейнольдса, и систему уравнений для моделируемых характеристик турбулентности:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial K_u}{\partial t} + U_j \frac{\partial K_u}{\partial x_j} = P_u - \varepsilon_u + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_u}{\sigma_{ku}}\frac{\partial K_u}{\partial x_j}\right) \\
&\frac{\partial \varepsilon_u}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial x_j} = C_{e1}\frac{P_u\varepsilon_u}{K_u} - C_{e2}^*\frac{\varepsilon_u^2}{K_u} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_u}{\sigma_{\varepsilon u}}\frac{\partial \varepsilon_u}{\partial x_j}\right)
\end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $P_u = \left(\nu_u\left(\partial U_i/\partial x_j + \partial U_j/\partial x_i\right) - \frac{2}{3}k_u\delta_{i,j}\right)\partial U_i/\partial x_j$ - генерация моделируемой кинетической энергии K_u, $\nu_u = C_\mu K_u^2/\varepsilon_u$ - турбулентная вязкость, σ_{ku}, $\sigma_{\varepsilon u}$ - коэффициенты диффузии, $C_{e2}^* = C_{e1} + \frac{f_k}{f_\varepsilon}\left(C_{e2} - C_{e1}\right)$.

Константы модели равны $C_\mu = 0.09$, $C_{e1} = 1.44$, $C_{e2} = 1.92$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$.

Заметим, что нет никаких гарантий, что полученная в результате решения системы (1) моделируемая кинетическая энергия будет связана с полной кинетической энергией соотношением $K_u = f_k K$, а кинетическая энергия разрешенных пульсаций будет равна $K_{res} = K - K_u$ или $K_{res} = (1-f_k)\cdot K$.

Система (1) отличается от уравнений «стандартной» высокорейнольдсовой k-ε модели турбулентности только модификацией коэффициентов диффузии и коэффициента C^*_{e2}. Именно модификация коэффициента C^*_{e2} является ключевой в методе PANS, она оказывает существенное влияние на уровень моделируемой турбулентной вязкости.

При достаточно высоких числах Рейнольдса предполагается, что диссипативные масштабы находятся в моделируемой части спектра, поэтому $f_\varepsilon = 1$.

В ходе вывода уравнений авторы [4] используют предположение о том, что разрешенные пульсации не вносят вклад в перенос моделируемой энергии турбулентности, что приводит к модификации коэффициентов диффузии: $\sigma_{ku} = \sigma_k f_k^2, \sigma_{\varepsilon u} = \sigma_\varepsilon f_k^2$. Такое приближение авторы рекомендуют использовать при высоких числах Рейнольдса.

Основная сложность при использовании метода PANS заключается в неопределенности выбора параметра f_k. Его значение должно быть выбрано таким образом, чтобы энергия разрешенных пульсаций составляла $K_{res} = K - K_u$. Отметим, что наличие разрешенных пульсаций зависит от многих факторов, в том числе и от факторов, не зависящих напрямую от уравнений PANS, таких как расчетная сетка, схема дискретизации и т. д. Эти обстоятельства определили основной вектор развития метода PANS, а именно – способ определения f_k.

2.1. Выбор параметра f_k

Среди используемых способов задания параметра f_k можно выделить два основных: постоянное значение во всей области и переменное значение, зависящее от локальных шагов сетки и решения.

Авторы оригинальной статьи [4] представили результаты расчетов течения в каверне и трехмерного обтекания круглого и квадратного цилиндров при постоянном значении параметра f_k. Показано, что с уменьшением f_k турбулентная вязкость падает, больше вихревых структур разрешается, а решение приближается к представленным экспериментальным данным. Для задач о течении в каверне и об обтекании квадратного цилиндра результаты расчетов при значении параметра f_k от 0.2 до 0.5 близки к экспериментальным данным на сетках, недостаточных для проведения качественного LES расчета. Следует отметить, что в задаче об обтекании круглого цилиндра при числе Рейнольдса Re = 140 000 результаты расчетов с использованием метода PANS неудовлетворительны (даже при минимальном использованном значении f_k = 0.5). В работе [4] упоминается, что модель для замыкания PANS наследует свойства модели, на основе которой она была выведена. Неудовлетворительные результаты расчета обтекания круглого цилиндра могут быть связаны, таким образом, с недостатками «стандартной» k-ε модели, требующей использования пристенных функций.

Как уже было сказано, выбор параметра f_k должен обеспечить выполнение правильного соотношения между разрешенной и моделируемой кинетической энергиями турбулентности: $K_{res} = (K - K_u)$, хотя формально в методе PANS фильтрационные параметры никак не связаны с шагом сетки. С момента выхода оригинальной статьи было предложено несколько стратегий выбора переменного в пространстве и/или во времени параметра f_k, соответствующего используемой сетке. Все эти стратегии основаны на сравнении шага сетки и линейного масштаба турбулентности рассматриваемого течения, который не известен до проведения расчета, что усложняет процедуру выбора f_k.

Первая стратегия определения f_k (так называемый «одностадийный» подход) основана на использовании $\lambda_u = l_u/\Delta$ - отношения масштаба турбулентности, построенного на основе характеристик моделируемой турбулентности, и масштаба турбулентности, разрешаемой на используемой сетке (шага сетки). Следует отметить, что эта стратегия не требует дополнительных расчетов или осреднений в процессе расчета, что делает ее удобным и простым инструментом для определения f_k, однако моделируемые характеристики турбулентности не несут никакой информации о линейном масштабе турбулентности, поэтому точность результатов применения остается под вопросом.

Типичным примером применения этого подхода является работа [7], в которой расчет значения f_k производился по следующей формуле:

$$f_k = \{1 + \tanh[2\pi(\Lambda - 0.5)]\}/2, \qquad (2)$$

где $\Lambda = \frac{1}{1+\lambda_u^{4/3}}$, $\lambda_u = l_u/\Delta$ $l_u = K_u^{3/2}/\varepsilon_u$ - характерный масштаб моделируемой турбулентности.

Вторая стратегия определения f_k основана на использовании $\lambda_t = l_t/\Delta$ - отношения масштаба турбулентности, построенного на основе полных кинетической энергии и диссипации, к масштабу разрешаемой турбулентности. Определение линейного масштаба турбулентности $l_t = K^{3/2}/\varepsilon$ сопряжено с трудностями, поскольку в рамках PANS полная кинетическая энергия неизвестна. Для ее определения могут быть использованы данные предварительного RANS расчета («двухстадийный» подход, впервые предложен в [5]) или более сложные процедуры, такие как осреднение в процессе расчета [8].

Параметр f_k при этом обычно определяют по формуле:

$$f_k = C_h \left[\frac{1}{\lambda_t}\right]^{2/3}, \qquad (3)$$

где C_h – константа. Отметим, что, если предположить разрешение турбулентных масштабов вплоть размера Δ, то, в соответствии с законом «-5/3», доля неразрешенной энергии $\sim \Delta^{2/3}$. Таким образом, формула (3) правильно отражает зависимость доли неразрешенных структур от размера фильтра, поэтому она является достаточно обоснованной.

При использовании обеих стратегий необходимо определить линейный масштаб, соответствующий шагу сетки Δ, что не составляет труда в случае равномерных сеток. Однако на неравномерной сетке определение такого масштаба не столь тривиально. Поскольку величина Δ должна отражать характерный размер разрешаемых структур, наиболее логичным является использование максимального шага сетки по всем направлениям $\Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$. Однако в работах, посвященных PANS, встречаются также другие определения масштаба, такие как $\Delta = \min(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ и $\Delta = (\mathrm{Vol})^{1/3}$. Стоит отметить, что использование двух последних определений шага сетки кажется необоснованным, поскольку эти величины не могут отражать масштабы разрешаемых структур в областях с сильно вытянутыми ячейками.

Поскольку в оригинальной статье основные уравнения были выведены в предположении постоянного значения f_k, использование этих уравнений в случае резких изменений значения фильтрационного параметра во времени или пространстве приведет к ошибкам. Wallin в [9] предложил способ учета изменений параметра f_k путем введения дополнительной «коммутационной» вязкости $\nu_{Tr} = P_{Tr}/S^2$ (где $S^2 \equiv \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$, а $P_{Tr} = \frac{K_u}{f_k}\frac{Df_k}{Dt}$) в уравнение движения и дополнительного генерационного слагаемого P_{Tr}, связанного с изменением f_k, в уравнение для моделируемой кинетической энергии турбулентности. На примере задачи о вырождении однородной изотропной турбулентности авторы показали, что при изменении фильтрационного параметра в процессе расчета предложенный способ учета коммутационной ошибки существенно улучшает согласование задаваемого параметра f_k с реальным отношением моделируемой к полной кинетической энергии K_u/K (рисунок 1). Без предложенной модификации модель практически не «чувствует» изменения параметра, что ставит под сомнение рациональность использования переменного f_k без учета изменения этого параметра в уравнениях, однако, следует отметить, что предложенный метод пока не нашел широкого применения.

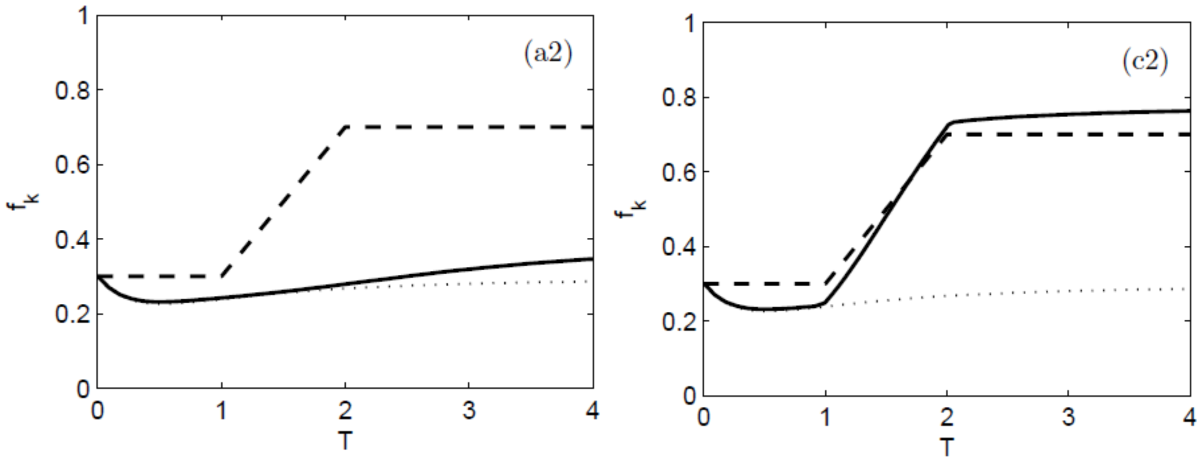


Рисунок 1. (из работы [9]). Отношение моделируемой кинетической энергии к полной без применения модификации (a2) и с ее применением (c2). Сплошная линия - отношение моделируемой кинетической энергии к полной при переменном f_k, штриховая линия – задаваемое f_k, точки - отношение моделируемой кинетической энергии к полной при задании постоянного $f_k = 0.3$.

Систематических исследований влияния способа определения параметра f_k на получаемое решение не проводилось, однако некоторые работы позволяют провести сравнительный анализ различных подходов для определения f_k.

Сравнение «двухстадийного» подхода определения параметра f_k с «одностадийным» на примере обтекания круглого цилиндра при числе Рейнольдса Re = 50 000 проведено в работе [5]. Из рисунка 2 видно, что уровень f_k, задаваемый формулой (3) (при значении константы $C_h = 1.0$) оказывается заметно ниже среднего f_k, задаваемого формулой (2) (в обоих случаях в качестве шага сетки был выбран $\Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$).

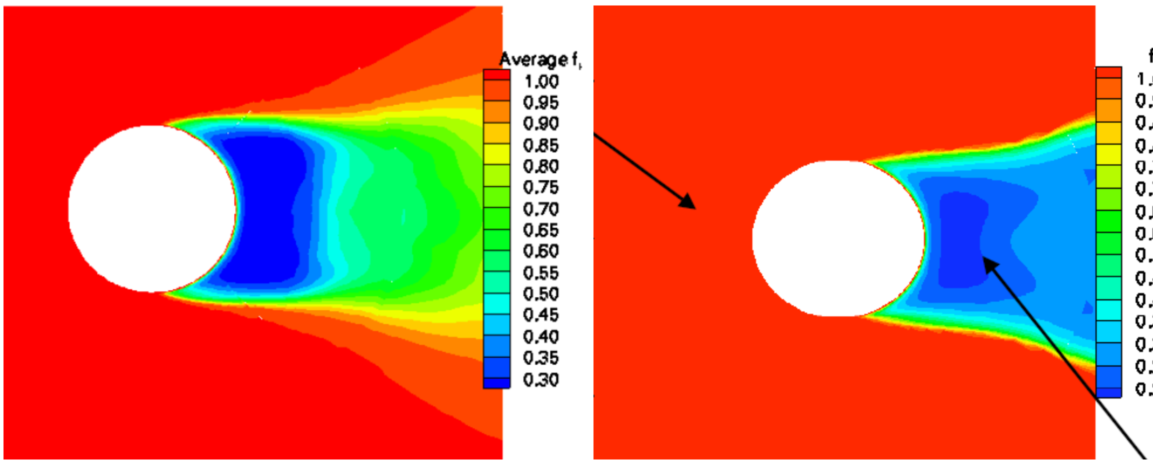


Рисунок 2. (из работы [5]). Поле среднего значения параметра f_k, рассчитанного по формуле (2) (слева) и поле параметра f_k, рассчитанного по формуле (3) (справа)

Показано, что расчеты коэффициента давления PANS методом с обеими вышеописанными методиками выбора f_k хорошо согласуются с экспериментальными данными (рисунок 3). Представленные значения средних характеристик, полученных обоими способами довольно близки, однако коэффициент сопротивления, полученный при двухступенчатом подходе, несколько ближе к экспериментальному значению.

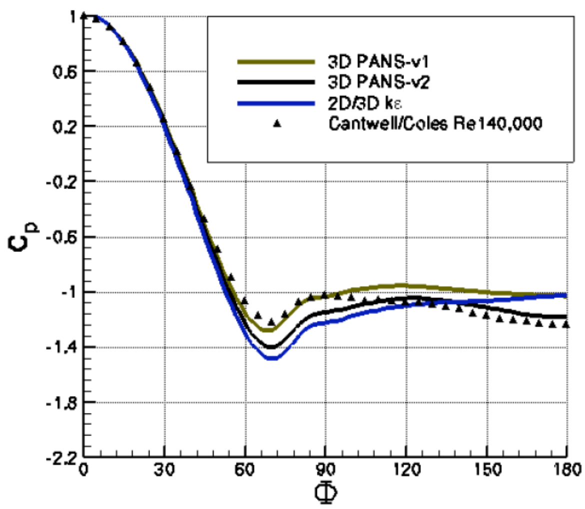
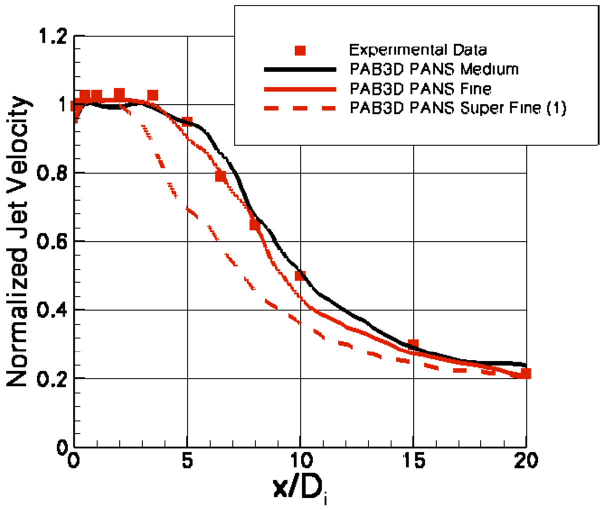


Рисунок 3. (из работы [5]). Распределение коэффициента давления по поверхности цилиндра. Сравнение результатов при двух подходах расчета параметра f_k (3D PANS-v1 – формула (2), 3D PANS-v2 – формула (3)) с RANS и экспериментом

В работах [10], [11] представлены результаты применения метода PANS с использованием «двухстадийного» подхода определения f_k для расчета дозвуковых струйных течений с числом Маха M = 0.55. В этих расчетах авторы использовали разные значения константы C_h и определения шага сетки в формуле (3): в работе [10] $C_h = 1.05$, $\Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$, а в [11] - $C_h = 1/(C_\mu)^{0.5}$, $\Delta = \min(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$. Напомним, что использование в качестве определения шага сетки $\Delta = \min(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ кажется необоснованным, поскольку эта величина может не отражать характерный размер разрешаемых структур.

На рисунке 4 представлены графики изменения средней скорости на оси струи, представленные в работах [10] и [11]. На средней сетке расчетные и экспериментальные данные хорошо согласуются в обеих работах, однако измельчение сетки по разному влияет на полученный результат, что объясняется различиями в способах определения f_k.



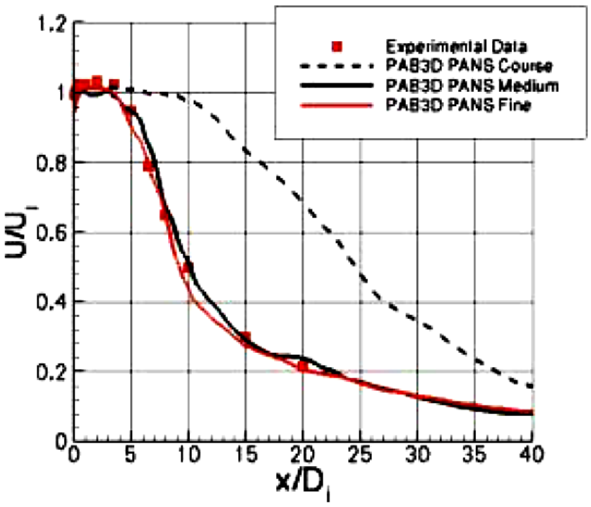


Рисунок 4. (из работ [10], [11]). Средняя скорость на оси струи. Слева: $C_h = 1.05$, $\Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$, число ячеек сетки “Medium” - N = 10^6, “Fine” - N = $2x10^6$, “Super Fine (1)” - N = $4x10^6$. Справа: $C_h = 1/(C_\mu)^{0.5}$, $\Delta = \min(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$, число ячеек сетки “Coarse” - N = $0.5x10^6$, “Medium” - N = $2x10^6$, “Fine” - N = $4x10^6$

В работе [8] была предложена динамическая процедура расчета f_k, основанная на использовании формулы

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} \left[\frac{1}{\lambda} \right]^{2/3}, \tag{4}$$

где $\lambda_t = l_t/\Delta$, $l_t = K^{3/2}/\varepsilon$, $\Delta = \min(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$, и обновлении параметра f_k в конце каждого временного шага в каждой точке пространства. Результаты расчетов обтекания «тела Ахмеда» (классическая задача автомобильной аэродинамики) методом PANS с применением динамической процедуры расчета f_k несколько хуже, чем результаты LES, но в целом довольно близки к эксперименту.

Что касается выбора параметра f_ε, то авторы оригинальной статьи [4] рекомендуют задавать его исходя из величины числа Рейнольдса исследуемого течения. Величина f_ε определяется долей разрешаемых диссипативных масштабов. Поскольку диссипативные масштабы сравнимы с Колмогоровскими масштабами турбулентности, для разрешения даже части диссипативных масштабов необходимо использование сеток, сравнимых с сетками для DNS расчетов. Таким образом, при высоких числах Рейнольдса и использовании разумных сеток все диссипативные масштабы должны быть промоделированы, а значит параметр $f_\varepsilon = 1$.

В работе [12] проводилось исследование влияния параметра f_ε на решение. На примере течения за обратным уступом (число Рейнольдса, построенное по высоте ступеньки $\mathrm{Re_h} = 37\,500$) при постоянном значении $f_k = 0.2$ авторами было показано, что с уменьшением f_ε диапазон масштабов разрешаемых структур уменьшается (рисунок 5). Такой результат ожидаем, поскольку уменьшение параметра f_ε приводит к уменьшению диссипации, а значит к увеличению моделируемой кинетической энергии и турбулентной вязкости.

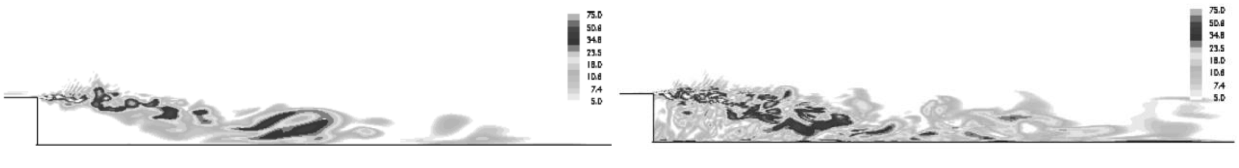


Рисунок 5. (из работы [12]). Мгновенное поле завихренности в среднем сечении при $f_\varepsilon = 0.5$ (слева) и $f_\varepsilon = 1.0$ (справа)

Кроме того, авторы показали, что при расчете данного течения оптимальное соотношение фильтрационных параметров - $f_k/f_\varepsilon = 0.3$, результаты применения этих параметров на использованной сетке несколько ближе к эксперименту, чем результаты URANS и DES (рисунок 6). Поскольку в работе не представлено результатов аналогичных исследований на другой сетке и при других значениях параметра f_k, универсальность этого соотношения остается под вопросом.

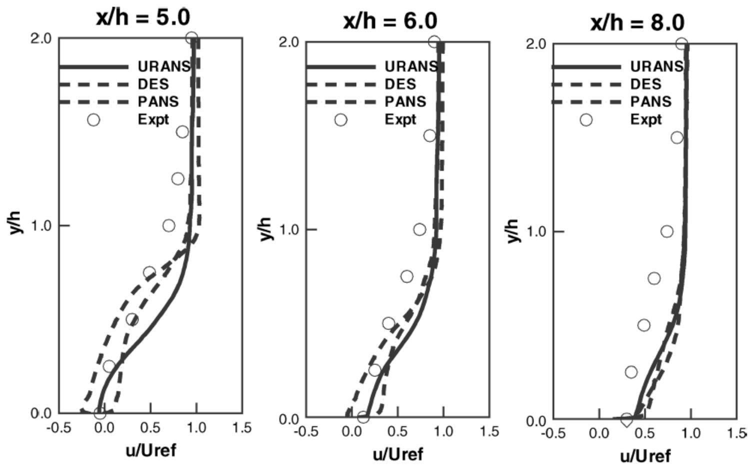


Рисунок 6. (из работы [12]). Профили средней скорости в трех сечениях. Сравнение результатов PANS при $f_\varepsilon = 0.667$ с результатами URANS, DES и экспериментальными данными

Наряду с вышеперечисленными вариантами задания f_k, в последние годы стали развиваться зонные PANS подходы, в основе которых лежит следующий принцип: в RANS зоне (вблизи стенок) параметр $f_k = 1.0$, а в LES – $f_k < 1.0$. Преимущества этого подхода продемонстрированы в работе [13] на примере установившегося течения в плоском канале и обтекания выпуклости. Кроме того, в работе сравнивались два варианта задания f_k в LES области – постоянный и переменный, по формуле (3), в которой в качестве шага была использована величина $\Delta = (Vol)^3$, а значение константы $C_h = 1/(C_\mu)^{0.5}$. Показано, что на различных сетках при задании одного и того же постоянного значения $f_k = 0.4$ турбулентная вязкость почти не отличается, в то время как использование переменного f_k на грубой сетке приводит к чрезмерному ее завышению и значительному ухудшению результатов (рисунок 7). Авторы делают вывод, что предложенный вариант формулы (3) не гарантирует корректную оценку параметра f_k на заданной сетке.

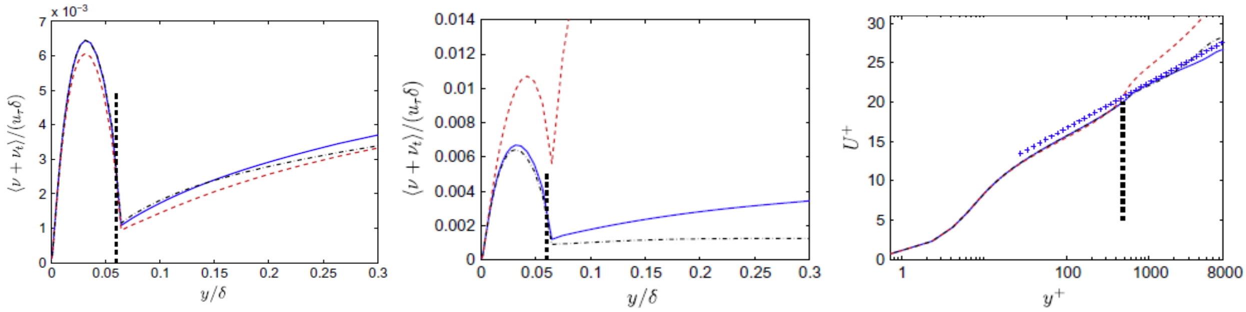


Рисунок 7. (из работы [13]). а) полная (турбулентная и кинематическая) вязкость при f_k = 0.4 на трех сетках; б) полная (турбулентная и кинематическая) вязкость при переменном f_k на трех сетках; в) профиль средней скорости на трех сетках. Штриховая линия – N = 32x94x32, сплошная линия – N = 64x94x64, штрихпунктирная линия – N = 128x94x128. (вертикальной линией отмечено положение интерфейса RANS и LES областей)

В целом можно сделать вывод, что не один из представленных методов расчета параметра f_k не является в достаточной мере обоснованным, и вопрос его выбора остается открытым и требует дополнительных исследований. Наиболее подходящей формулой для определения параметра f_k кажется формула (3), содержащая в себе зависимость $f_k \sim \Delta^{2/3}$, соответствующую закону «-5/3».

2.2. Выбор базовой модели

Как уже было сказано, модели для замыкания частично осреднённых уравнений Навье-Стокса в значительной мере наследуют свойства полуэмпирических моделей турбулентности, на основе которых они построены [4]. Непригодность модели, основанной на стандартной высокорейнольдсовой k-ε модели, при расчете пристенных течений была наглядно продемонстрирована в работе [14], где представлены результаты обтекания вертикального цилиндра конечной высоты, закрепленного на пластине. Это неудивительно, поскольку «стандартная» k-ε модель турбулентности в сочетании с пристенными функциями неудовлетворительно предсказывает характеристики течения при наличии неблагоприятного градиента давления, кривизны линий тока и т.д. Кроме того, не ясно, должны ли быть модифицированы пристенные функции в зависимости от значения параметра f_k в рамках метода PANS.

Несколько работ были посвящены преодолению этих трудностей и улучшению поведения PANS у стенок путем вывода моделей для замыкания PANS на основе других моделей.

Так в работе [15] в качестве основы была использована низкорейнольдсовая k-ε модель турбулентности, предложенная Abe [16]. Процедура получения уравнений для низкорейнольдсовой PANS модели (Low-Reynolds-Number, LRN PANS) аналогична изложенной в [4]. Результаты расчета развитого течения в плоском канале (число Рейнольдса, построенное по динамической скорости и половине высоты канала $Re_\tau = 950$) LRN PANS моделью значительно ближе к DNS данным, чем результаты, полученные с использованием стандартной версии PANS (рисунок 8). Следует отметить также, что отношение моделируемой кинетической энергии к полной ни в каком случае не равно величине задаваемого параметра $f_k = 0.4$ и заметно различается для двух моделей. В работе [15] представлены также результаты расчета обтекания периодических выпуклостей в плоском канале низкорейнольдсовой и оригинальной k-ε PANS моделями. Показано, что результаты обеих моделей при $f_k = 0.4$ близки друг к другу и к экспериментальным данным, превосходство LRN PANS незначительно. Отметим, что LRN PANS модель использовалась также в ряде работ, посвященных зонным версиям PANS ([13],[17],[18],[19]).

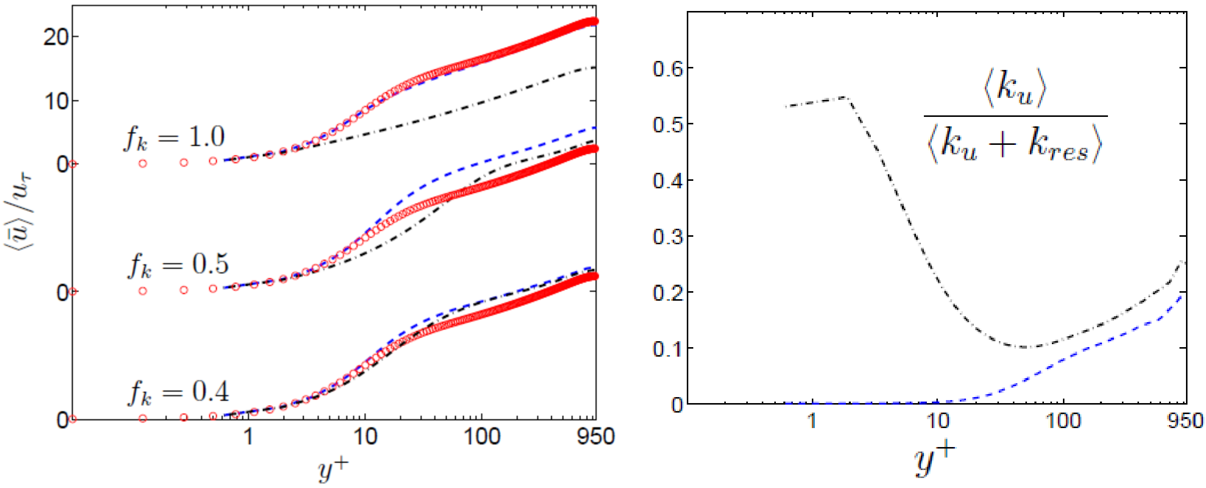


Рисунок 8. (из работы [15]). Профили средней скорости при различных f_k (слева) и отношение моделируемой кинетической энергии к полной при f_k = 0.4 (справа). Штриховая линия – LRN PANS, штрих-пунктир - *k-ε* PANS, символы – DNS данные

Кроме того, в работе [15] были протестированы два варианта приближения для коэффициентов диффузии, предложенных в [4]: при высоких числах Рейнольдса $\sigma_{ku} = \sigma_k f_k^2, \sigma_{\omega u} = \sigma_\omega f_k^2$, а при низких - коэффициенты не модифицируются. Показано, что при отсутствии модификации коэффициентов диффузии предсказываются несколько более высокие значения турбулентной вязкости и пики моделируемой кинетической энергии турбулентности, однако в целом результаты расчетов течения в канале моделью LRN PANS с модификацией и без модификации близки, а средние характеристики практически совпадают.

Другой вариант альтернативы «стандартной» *k-ε* PANS модели был предложен в работе [20]. В ней для улучшения поведения вблизи стенки были выведены уравнения PANS на основе модели *k-ε-ζ-f* [21], (вариант v^2-*f* модели Дурбина [22]). Для определения параметра f_k использовалась динамическая процедура, предложенная в [8], и формула (4) с той лишь разницей, что в качестве шага сетки выбирался корень кубический из объема ячейки. В работе проведено исследование результатов применения полученной модели для расчета обтекания вертикально ориентированного цилиндра конечной высоты, установленного на пластине (число Рейнольдса Re = $2 \cdot 10^4$). Для такого течения характерны три особенности: подковообразный вихрь у поверхности пластины перед цилиндром, дорожка Кармана в следе за цилиндром и сложное течение у свободного конца цилиндра. Разнообразие режимов и широкий диапазон масштабов делает моделирование такого течения сложной задачей. Результаты PANS на основе модели k-ε-ζ-f, в отличие от оригинальной версии, хорошо согласуются с экспериментальными данными (рисунок 9). Кроме того, эта модель была успешно применена к расчету развитого течения в плоском канале [23], обтекания периодических выпуклостей в плоском канале [24], течения в двигателе внутреннего сгорания, обтекания автомобилей, поперечного обтекания движущегося поезда [25], [26].

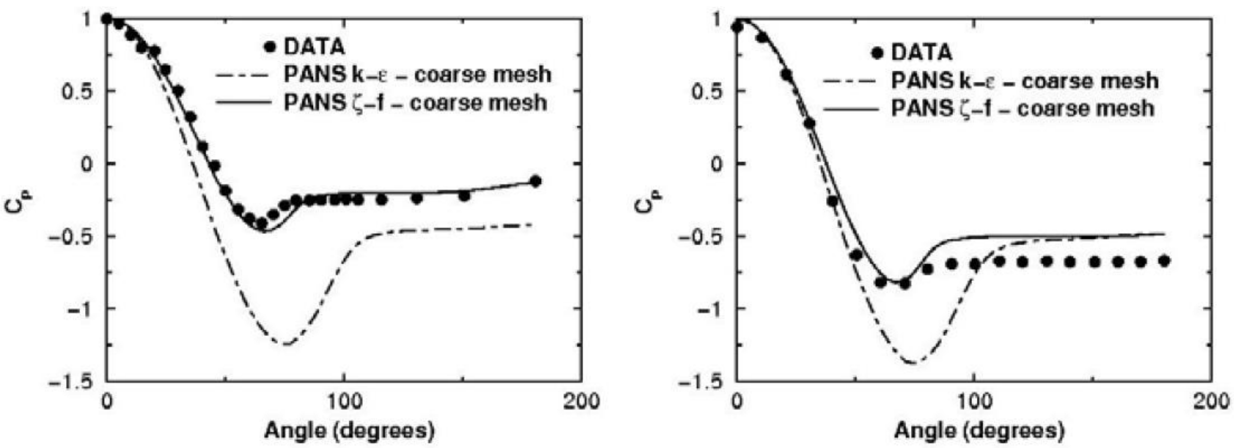


Рисунок 9. (из работы [20]). Распределение давления по поверхности цилиндра в двух сечениях: z/D = 0.05 (слева) и z/D = 0.5 (справа). Сравнение результатов *k*-*ε*-*ζ*-*f* PANS и *k*-*ε* PANS с экспериментальными данными

Другой альтернативой k-ε PANS, предложенной в [27], является модель, выведенная на основе k-ω модели турбулентности Wilcox [28]. Применение k-ω модели турбулентности для расчета пристенных течений является более оправданным, чем использование k-ε моделей по двум причинам. Во-первых, для нее не требуется использование демпфирующих функций в пристенных областях, а во-вторых, она существенно лучше описывает течения с неблагоприятным градиентом давления

Фильтрационные параметры k-ω PANS модели представляют собой долю моделируемой кинетической энергии $f_k = k_u / k$ и моделируемой удельной диссипации $f_\omega = \omega_u / \omega$. Заметим, что последняя величина может быть выражена через долю истинной диссипации f_ε следующим образом: $f_\omega = \omega_u / \omega = \left(\varepsilon_u /(\beta^* k_u)\right) / \left(\varepsilon /(\beta^* k)\right) = f_\varepsilon / f_k$.

В работе [27] представлено сравнение результатов применения k-ε и k-ω версий PANS с постоянными фильтрационными параметрами к расчету обтекания цилиндра при числе Рейнольдса Re = 1.4x10^5. Показано, что результаты обеих версий довольно близки к другу и удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Сравнение интегральных характеристик течения (таблица 1) показало, что угол отрыва течения предсказывается k-ω PANS моделью лучше, чем оригинальной моделью, однако коэффициент сопротивления оригинальная модель предсказывает значительно точнее.

Таблица 1. Средние интегральные характеристики обтекания круглого цилиндра

Метод	C_d	St	θ_{sep}
Эксперимент	1.237	0.179	77.0
PANS k-ω (fk = 0.5)	1.670	0.195	84.5
PANS k-ω (fk = 0.7)	1.540	0.200	89.9
PANS k-ε (fk = 0.5)	1.290	0.226	95.4

Расчет течения за обратным уступом при числе Рейнольдса Re = 37 500 показал превосходство k-ω PANS над оригинальной версией (рисунок 10).

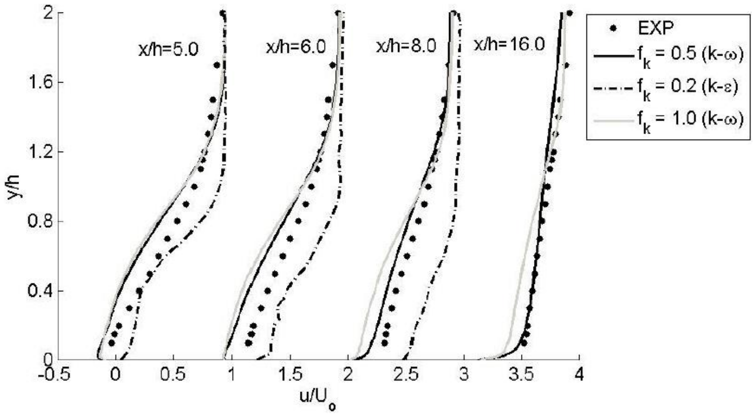


Рисунок 10. (из работы [27]). Средние профили скорости в различных сечениях. Сравнение результатов *k-ω* PANS, *k-ε* PANS и URANS (*k-ω* PANS при f_k = 1.0) с экспериментальными данными

Таким образом, хотя примеров применения *k-ω* PANS не очень много, их результаты превосходят результаты применения *k-ε* модели. Поскольку *k-ω* модели турбулентности внедрены в большую часть коммерческих кодов, широко используются в инженерной практике, хорошо изучены и протестированы на многих классах течений и не требуют использования пристенных функций, можно сделать вывод, что *k-ω* PANS является наиболее перспективной версией метода.

2.3. Выводы из анализа литературы

За 10 лет существования метода PANS было предложено множество его версий, однако систематического анализа влияния предложенных модификаций сделано не было. В связи с этим не было сформулировано «официальной» версии PANS. Тем не менее, представленный анализ литературы позволяет сделать следующие выводы:

1. *k-ω* версия PANS кажется наиболее перспективной;
2. параметр f_k должен быть связан с шагом сетки и масштабом турбулентности зависимостью $f_k = C(\Delta/L_t)^{2/3}$, которая согласуется с законом «-5/3»;

   2.1. в качестве шага сетки следует выбрать $\Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$, т. к. эта величина характеризует масштабы турбулентности, которые могут быть разрешены на заданной сетке;

2.2. масштаб турбулентности L_t должен определяться по полным кинетической энергии турбулентности и диссипации, поскольку моделируемые характеристики турбулентности не несут информации о линейном масштабе турбулентности;

2.2.1. для получения масштаба турбулентности следует использовать двухстадийный подход или метод скользящего осреднения;

2.3. константа C требует калибровки;

3. Для умеренных и высоких чисел Рейнольдса следует выбирать параметр $f_\varepsilon = 1$ и модифицировать коэффициенты диффузии следующим образом: $\sigma_{ku} = \sigma_k f_k^2$, $\sigma_{\omega u} = \sigma_\omega f_k^2$.

Именно этот вариант PANS метода был использован в настоящей работе.

2.4. Формулировка версии PANS, выбранной для исследований

На основе анализа литературы для проведения исследований была выбрана версия PANS, построенная на основе k-ω модели турбулентности Wilcox [28]. Как уже было сказано, фильтрационные параметры этой модели - доли моделируемой кинетической энергии $f_k = k_u / k$ и моделируемой удельной диссипации $f_\omega = \omega_u / \omega$, причем $f_\omega = f_\varepsilon / f_k$.

Уравнения для моделируемых характеристик турбулентности имеют вид:

$$\frac{\partial k_u}{\partial t} + U_j \frac{\partial k_u}{\partial x_j} = P_u - \beta^* k_u \omega_u + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_u}{\sigma_{ku}} \frac{\partial k_u}{\partial x_j} \right),$$

$$\frac{\partial \omega_u}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega_u}{\partial x_j} = \alpha \frac{P_u \omega_u}{k_u} - \beta' \omega_u^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_u}{\sigma_{\omega u}} \frac{\partial \omega_u}{\partial x_j} \right).$$

Здесь $P_u = \left(\nu_u \left(\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i\right) - \frac{2}{3} k_u \delta_{i,j}\right) \partial U_i / \partial x_j$ - генерация моделируемой кинетической энергии k_u, $\nu_u = k_u / \omega_u$ - турбулентная вязкость, $\omega_u = \varepsilon_u / \beta^* k_u$ - моделируемая удельная диссипация, $\beta' = \alpha\beta^* + \left(\beta - \alpha\beta^*\right) / f_\omega$, $\sigma_{ku} = \sigma_k f_k^2, \sigma_{\omega u} = \sigma_\omega f_k^2$ - коэффициенты диффузии.

Параметр $f_\varepsilon = 1$, что соответствует значению $f_\omega = 1 / f_k$.

Наконец, константы модели равны $\beta^* = 0.09$, $\alpha = 5/9$, $\beta = 0.075$, $\sigma_k = 2.0$, $\sigma_\omega = 2.0$.

Представленная модель была реализована в рамках NTS кода [29], предназначенного для расчета двумерных и трехмерных стационарных и нестационарных течений газа и несжимаемой жидкости на многоблочных перекрывающихся структурированных сетках методом конечных объемов с применением схем высокого порядка точности.

Все представленные ниже результаты были получены с использованием несжимаемой ветви NTS кода и схемы Rogers, Kwak [30]. Аппроксимация невязких потоков проводилась при помощи центрально-разностной схемы 4-го порядка, а для аппроксимации вязких потоков использовалась центрально-разностная схема 2-го порядка. В уравнениях переноса турбулентных характеристик используются схемы 1-ого порядка для невязких и 2-ого – для вязких потоков. Интегрирование по времени производилось с применением неявной схемы 2-го порядка точности. Для решения систем линейных уравнений использовалась приближенная факторизации с диагональным доминированием (DDADI).

3. Задача о вырождении однородной изотропной турбулентности

Вырождение однородной изотропной турбулентности (ВОИТ) – простейший вид турбулентного течения, исследование которого позволяет изучить ряд свойств, присущих всем турбулентным течениям. Эту задачу используют как для калибровки констант полуэмпирических моделей турбулентности для замыкания уравнений Рейнольдса и подсеточных моделей для LES, так и для исследования влияния численных схем на решение в вихреразрешающих подходах.

Рассматривается кубическая расчетная область со стороной 2π м и периодическими граничными условиями по всем направлениям, в которой в начальный момент времени создана однородная изотропная турбулентность с заданным спектром кинетической энергии. Сравнение зависимости от времени кинетической энергии турбулентности и ее спектров в различные моменты времени, полученных в результате нестационарного расчета, с экспериментальными данными позволяет оценить вихреразрешающие свойства рассматриваемого подхода. Результаты расчетов методом PANS сравнивались также с расчетами методом LES с подсеточной моделью Смагоринского с константой $C_s = 0.2$.

Все расчеты были выполнены при условиях, соответствующих эксперименту Comte-Bellot & Corrsin [31], а именно при числе Рейнольдса $Re = 1\,620$, построенном по скорости, равной 1 м/с, и линейному размеру 1 м. Расчеты проводились на трех декартовых равномерных сетках с числом ячеек 32^3, 64^3, 128^3. Шаг по времени зависел от используемой сетки и задавался равным 0.01, 0.05 и 0.001, соответственно.

3.1. Начальные условия

Начальное поле скорости однородной изотропной турбулентности создается при помощи обратного преобразования Фурье таким образом, чтобы его спектр был идентичен экспериментальному спектру $E_0(k)$ (рисунок 11), и оно удовлетворяло уравнению неразрывности.

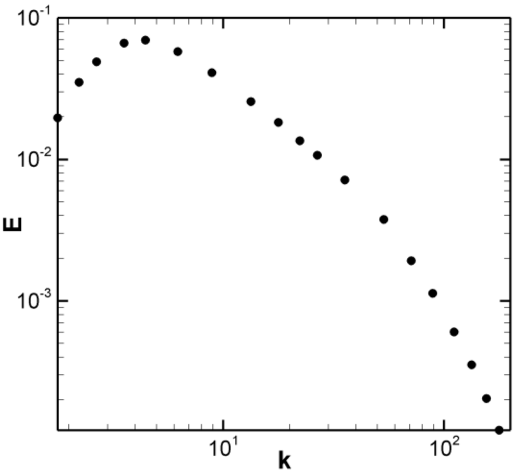


Рисунок 11. Экспериментальный энергетический спектр, на основе которого создавалось начальное поле скорости

Начальное поле скорости на сетке 32^3, соответствующее экспериментальному спектру $E_0(k)$, представлено на рисунке 12.

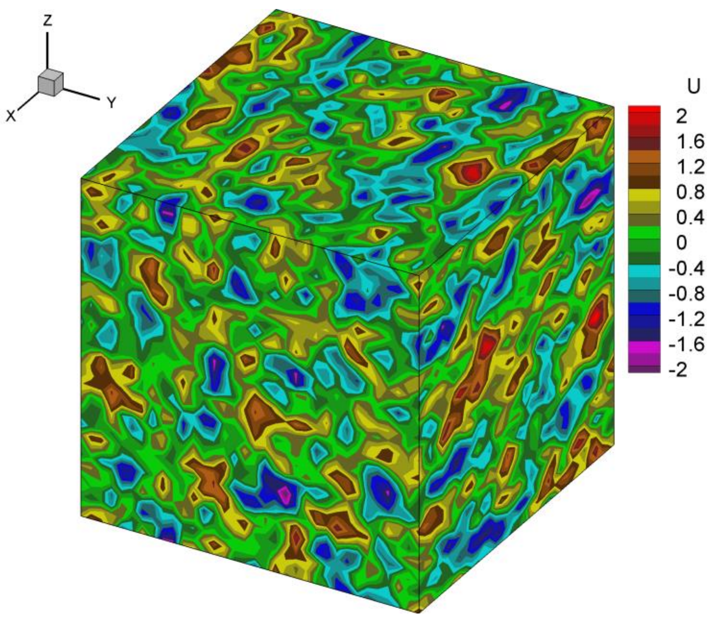


Рисунок 12. Начальное поле скорости для решения задачи о вырождении однородной изотропной турбулентности на сетке 32^3

Отметим, что в некоторых расчетах (которые будут отмечены отдельно) проводилась фильтрация начального поля с использованием фильтра Фурье для того, чтобы разрешенная кинетическая энергия $K_{res} = 0.5(u'^2+v'^2+w'^2)$ начального поля соответствовала заданному f_k: $K_{res} = (1-f_k)K_0$, где $K_0 = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(k)dk$.

Обычно при использовании дифференциальных подсеточных LES моделей начальные поля для турбулентных характеристик получают путем решения модельных уравнений переноса соответствующих подсеточных характеристик при фиксированном (начальном) поле скорости. В настоящей работе для расчетов задачи ВОИТ методом PANS был также использован этот подход, однако расчеты показали отсутствие сходимости. Серия нестационарных расчетов k-ω уравнений модели на замороженном поле скорости показала, что независимо от значения f_k генерация кинетической энергии турбулентности всегда превышает ее диссипацию, что приводит к экспоненциальному росту K_u от времени. Именно это обстоятельство и приводит к отсутствию сходимости на итерациях.

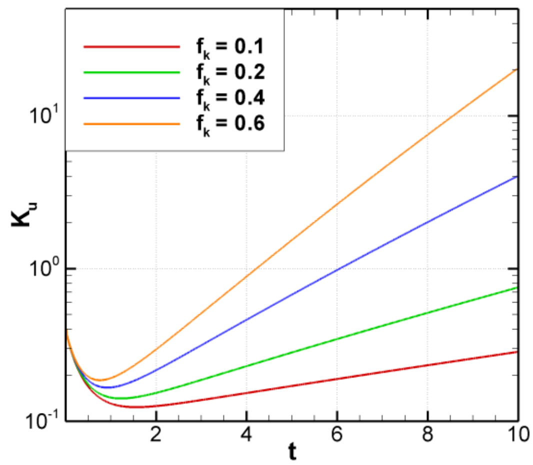


Рисунок 13. Эволюция моделируемой кинетической энергии при различных значениях параметра f_k

Такое поведение, характерное для полуэмпирических моделей турбулентности для замыкания уравнений Рейнольдса и нехарактерное для подсеточных LES моделей, затрудняет постановку корректных начальных условий для характеристик турбулентности в задаче ВОИТ. Следует отметить, что представленное свойство уравнений PANS является важным различием между PANS и LES подходами.

Расчет данной задачи методом PANS проводился в работах [9] и [15], в которых авторы столкнулись с аналогичной проблемой постановки начальных условий для турбулентных характеристик и по разному подошли к ее решению.

В работе [9] получение начальных условий для скорости проводится в два этапа: на первом этапе проводят DNS расчет на сетке 128^3, при этом начальное поле соответствовало искусственному энергетическому спектру, характеристики которого в статье не представлены. Заметим, что сетка 128^3 является недостаточно мелкой для проведения качественного DNS задачи ВОИТ. Далее, после достижения равновесия, полученное поле перемасштабируется так, чтобы число Рейнольдса соответствовало экспериментальному. Наконец, на втором этапе поле скорости фильтруется с использованием спектрального «cut-off» фильтра так, чтобы разрешенная кинетическая энергия K_{res} полученного поля скорости соответствовал требуемому для задаваемого значения f_k уровню $K_{res} = K_0 - K_u = K_0(1 - f_k)$; начальные условия для турбулентных характеристик выбирались следующими: $K_u = f_k K_0$, $\varepsilon_u = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\nu k^2 E_0(k)dk$, где ν – коэффициент кинематической вязкости. К сожалению, представленных данных недостаточно для воспроведения этой процедуры. В частности, в работе не указано, с какого именно искусственного спектра следует начинать DNS расчет и сколько характерных временных отрезков необходимо для достижения равновесия.

В работе [15], как и в настоящей работе, начальное поле скорости соответствует экспериментальному энергетическому спектру [31], а начальные условия для турбулентных характеристик определялись выражениями $K_u = f_k K_{res}$, $\varepsilon_u = C_\mu^{3/4} K_u^{3/2} \big/ (0.1\Delta)$, где Δ – шаг сетки. Предложенное начальное условие для моделируемой кинетической энергии турбулентности кажется необоснованным, поскольку такой уровень кинетической энергии не соответствует ни начальному полю скорости, ни идеологии метода.

Более обоснованными кажутся следующие варианты начальных условий для моделируемых характеристик турбулентности:

1. $K_u = K_0 - K_{res}$, $\varepsilon_u = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\nu k^2 E_0(k)dk$, $\omega_u = \varepsilon_u/(C_\mu K_u)$, (5)

   т.е. моделированию подлежит та часть кинетической энергии турбулентности, которая не может быть разрешена на данной сетке.

2. $K_u = f_k K_0$, $\varepsilon_u = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\nu k^2 E_0(k)dk$, $\omega_u = \varepsilon_u/(C_\mu K_u)$, (6)

   т. к. в соответствии с идеологией метода PANS, f_k – доля моделируемой кинетической энергии;

3.2. Верификация реализованной PANS модели

Для верификации реализованной версии PANS была произведена серия расчетов затухания однородной изотропной турбулентности на сетке 32^3 с начальными условиями, использованными в работе [15].

На рисунке 14 представлены результаты проведенных расчетов. Следует отметить, что в [15] был использован PANS на основе низкорейнольдсовой k-ε модели турбулентности и центрально-разностные аппроксимации второго порядка, в то время как в настоящей работе использовался PANS на основе k-ω модели турбулентности, а аппроксимация проводилась с четвертым порядком точности. С учетом различий моделей и схемы можно сказать, что результаты проведенных расчетов хорошо согласуются с результатами, представленными в [15].

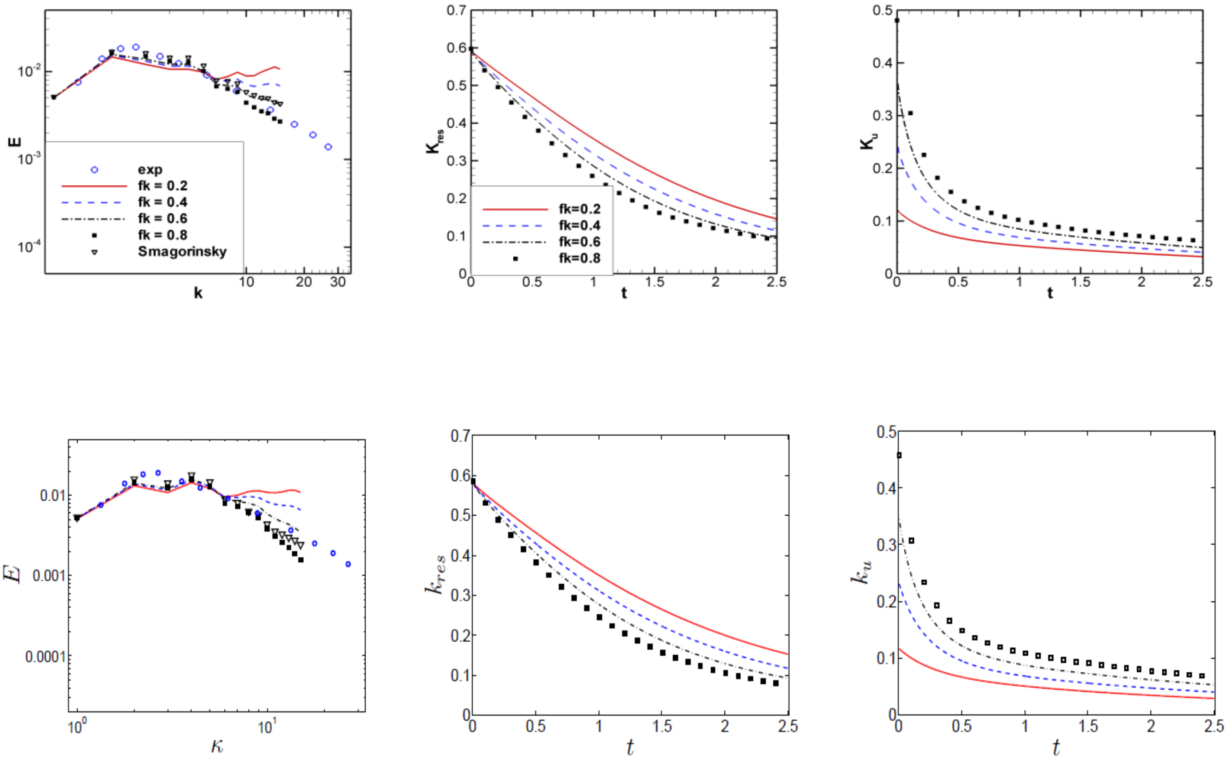


Рисунок 14. Сравнение результатов настоящей работы (сверху) и результатов работы [15] (снизу): энергетический спектр в момент времени t = 2.0 с, эволюция разрешенной энергии K_{res} и эволюция моделируемой кинетической энергии K_u

3.3. Калибровка константы

С целью исследования влияния начальных условий в задаче ВОИТ и значения параметра f_k на решение была проведена три серии расчетов на сетке 32^3 с различными вариантами начальных условий:

1. Поле скорости соответствует энергетическому спектру $E_0(k)$, для характеристик турбулентности используются условия (5)
2. Поле скорости соответствует энергетическому спектру $E_0(k)$, для характеристик турбулентности используются условия (6)
3. Поле скорости фильтруется так, чтобы $K_{res} = (1-f_k)K_0$, для характеристик турбулентности используются условия (6)

Отметим, что начальные условия третьей серии являются наиболее логичными, поскольку в этом случае соблюдается идеология метода и начальные условия для моделируемой турбулентности соответствуют начальному полю скорости. Заметим также, что создать для сетки 32^3 начальное поле скорости, соответствующее параметру $f_k = 0.2$, невозможно, поскольку она не позволяет разрешить 80% турбулентных пульсаций и, таким образом, в этой серии расчет с параметром $f_k = 0.2$ не проводился.

Из результатов проведенных расчетов (рисунки 15-17) видно, во-первых, что влияние начальных условий для характеристик турбулентности на решение велико. При использовании начальных условий (6) чувствительность решения к параметру f_k заметно выше, чем при задании начальных условий (5). Такое поведение закономерно, поскольку начальное поле кинетической энергии в случае использования условий (6) зависит от параметра f_k.

Во-вторых, можно отметить, что, независимо от используемого варианта начальных условий, увеличение параметра f_k приводит к занижению высокочастотной части энергетического спектра, а при более низком значении f_k к ее завышению. Это связано с тем, что в PANS большим значениям f_k соответствует более высокий уровень турбулентной вязкости.

Наконец, наилучшее совпадение с экспериментальными данными и результатами расчета моделью Смагоринского достигается при $f_k = 0.4$. Отметим, что при таком значении f_k выполняется соотношение $K_0 - K_{res} = f_k K_0$, поскольку сетка 32^3 позволяет разрешить порядка 60% турбулентных пульсаций.

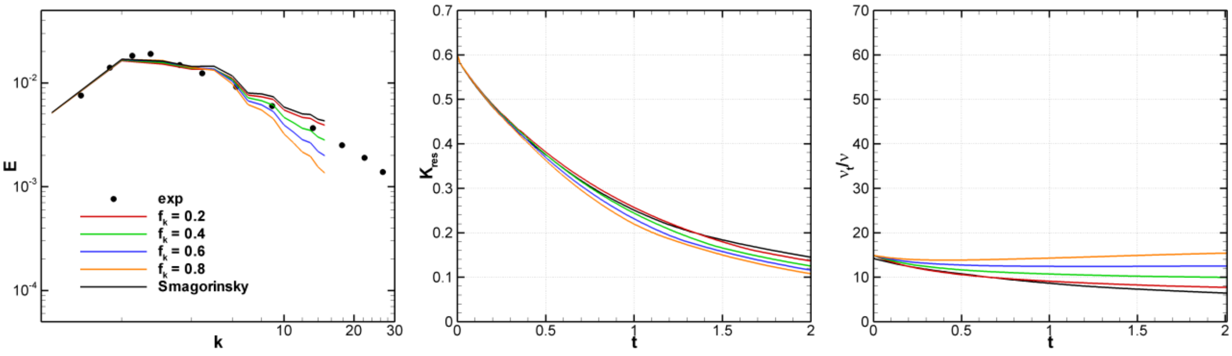


Рисунок 15. Серия 1. Результаты расчетов задачи о ВОИТ при различных f_k на сетке 32^3: энергетический спектр в момент времени t = 2.0, эволюция разрешенной кинетической энергии K_{res} и турбулентной вязкости

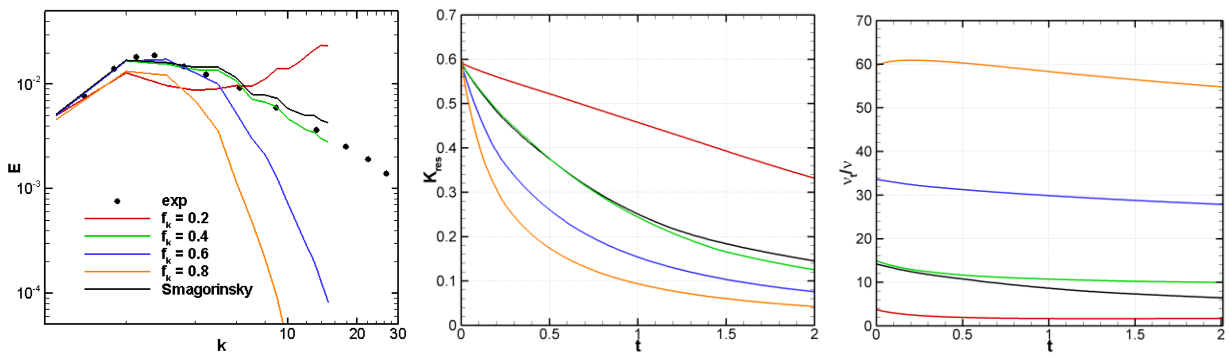


Рисунок 16. Серия 2. Результаты расчетов задачи о ВОИТ при различных f_k на сетке 32^3: энергетический спектр в момент времени t = 2.0, эволюция разрешенной кинетической энергии K_{res} и турбулентной вязкости

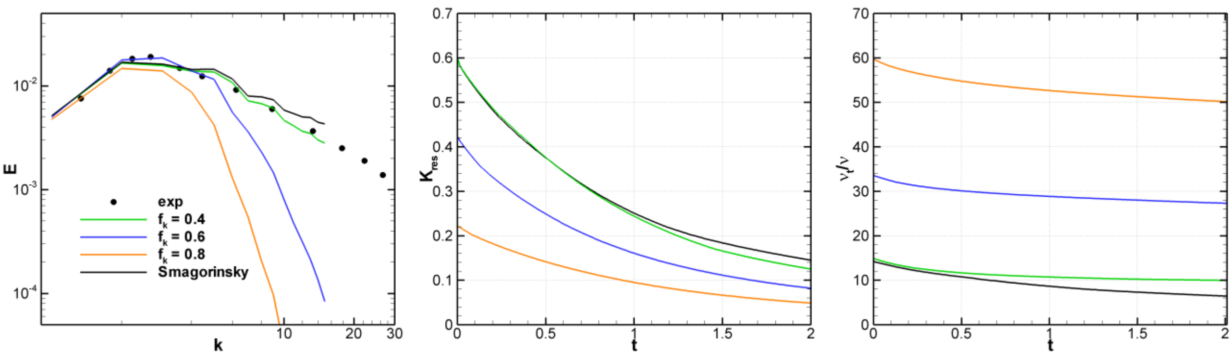


Рисунок 17. Серия 3. Результаты расчетов задачи о ВОИТ при различных f_k на сетке 32^3: энергетический спектр в момент времени t = 2.0, эволюция разрешенной кинетической энергии K_{res} и турбулентной вязкости

В ходе работы были проведены также расчеты затухания однородной изотропной турбулентности при значении $f_k = 0.4$ на сетках с числом ячеек 64^3 и 128^3. Для этих расчетов были выбраны начальные условия, использованные в серии расчетов (3). Высокочастотная часть энергетических спектров в момент времени $t = 2.0$ существенно занижена (рисунок 18), что, как уже было сказано, соответствует слишком высокому значению параметра f_k. Это, в свою очередь, свидетельствует о том, что параметр f_k должен зависеть от сетки, и его значение 0.4 завышено для расчетов на сетках 64^3 и 128^3.

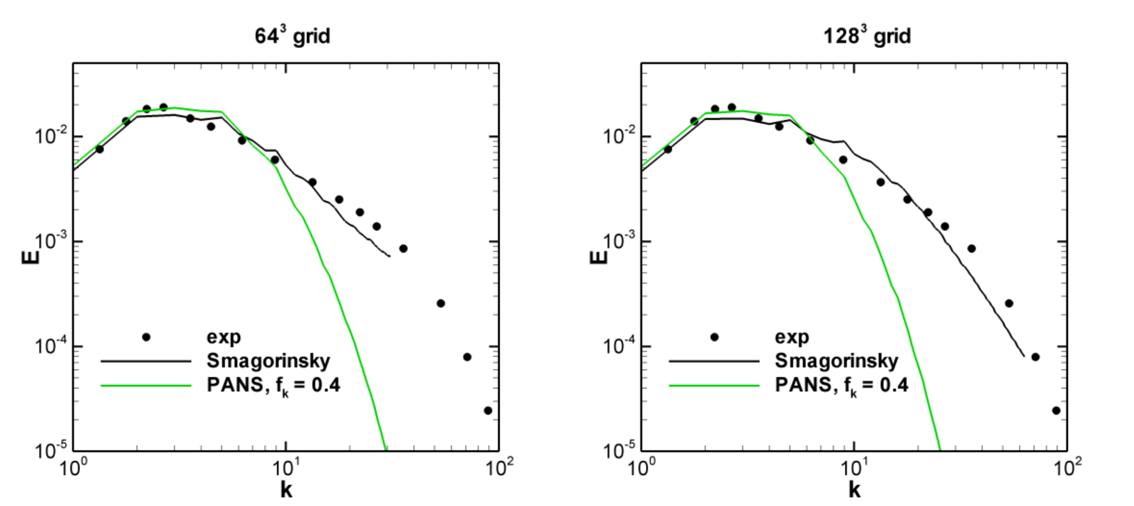


Рисунок 18. Результаты расчетов ВОИТ при значении параметра $f_k = 0.4$ на сетках 64^3 и 128^3: энергетический спектр в момент времени $t = 2.0$

На основании представленных расчетов на сетке 32^3, демонстрирующих хорошее совпадение с экспериментом при $f_k = 0.4$, было получено значение константы $C = 0.9$ в формуле (3). С учетом полученной константы C были рассчитаны значения f_k для сеток 64^3 и 128^3, которые составляют 0.25 и 0.16, соответственно. Результаты расчетов с этими значениями f_k представлены на рисунке 19. Видно, что достигнуто хорошее согласование с экспериментом и результатами применения модели Смагоринского. Таким образом, можно сделать вывод, что формула (3) с предложенной константой $C = 0.9$ правильно описывает зависимость f_k от шага используемой сетки.

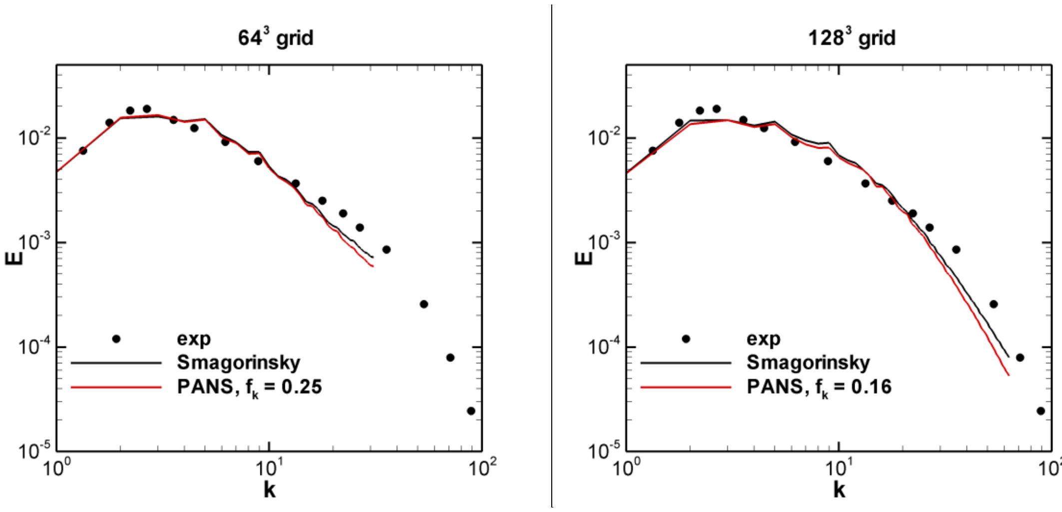


Рисунок 19. Результаты расчетов ВОИТ на сетках 64^3 и 128^3: энергетический спектр в момент времени t = 2.0

3.4. Выводы по результатам расчетов задачи о ВОИТ

Представленные результаты исследований PANS метода на примере задачи о вырождении однородной изотропной турбулентности позволяют сделать следующие выводы:

1. На «замороженном» поле скорости поведение моделей для замыкания уравнений PANS совпадает с поведением моделей для замыкания RANS уравнений и отличается от свойств дифференциальных LES моделей;
2. Величина параметра f_k должна зависеть от шага сетки, причем зависимость имеет вид $f_k = C(\Delta/L_t)^{2/3}$, $C = 0.9$.

4. Задача об установившемся течении в плоском канале

4.1. Постановка задачи

Рассматривается развитое течение несжимаемой жидкости в плоском канале при двух числах Рейнольдса $Re_\tau = 400$ и $Re_\tau = 2400$, построенных по высоте канала H и динамической скорости $u_\tau = (\nu \cdot \partial u / \partial y)_w^{1/2}$. Высота канала составляет H = 1м, а молекулярная кинематическая вязкость - $\upsilon = 7.36 \cdot 10^{-5}$ м^2/с и $\upsilon = 9.35 \cdot 10^{-6}$ м^2/с для $Re_\tau = 400$ и $Re_\tau = 2400$, соответственно.

Расчеты проводились в области, представляющей собой прямоугольный параллелепипед с размерами $L_x \times L_y \times L_z = 4.0H \times 1.0H \times 1.5H$ (рисунок 18) с использованием декартовой сетки равномерной по осям x и z ($\Delta x = 5 \cdot 10^{-2} H, \Delta z = 2.5 \cdot 10^{-2} H$) и неравномерной по оси y (сгущение в направлении стенки по закону геометрической прогрессии с коэффициентом 1.15). При этом для расчетов при числе Рейнольдса $Re_\tau = 400$ строилась сетка с первым пристенным шагом $\Delta y_{min} = 4 \cdot 10^{-4}$ и числом ячеек $N_x x N_y x N_z = 80x80x60 = 384000$, а при $Re_\tau = 2400$ – с шагом $\Delta y_{min} = 1 \cdot 10^{-4}$ и числом ячеек $N_x x N_y x N_z = 80x100x60 = 480000$. Отметим, что сетка, использованная для расчетов течения при $Re_\tau = 400$, позволяет проведение LES с разрешением до стенки [32], в то время как сетка для $Re_\tau = 2400$ вблизи стенок является слишком грубой для проведения разрешенного до стенки LES и пригодна только для расчетов LES с пристенным моделированием (WMLES).

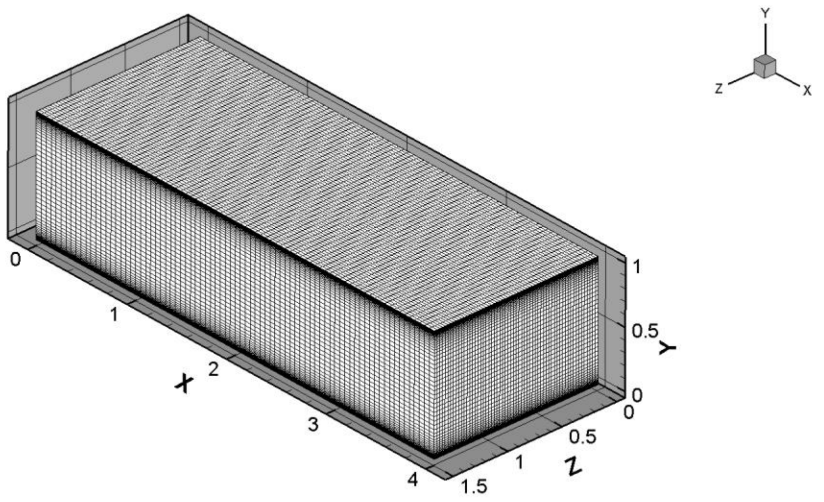


Рисунок 20. Расчетная сетка для расчета задачи об установившемся течении в плоском канале при числе Рейнольдса Re_τ = 400

На твердых стенках (плоскости XZ при $y = 0$ и $y = H$) компоненты скорости, турбулентная вязкость и кинетическая энергия турбулентности полагаются равными нулю, а удельная диссипация кинетической энергии турбулентности определяется по формуле $\omega_W = 10\frac{6\nu}{\beta'\Delta y_1^2}$, где β' – константа k-ω PANS модели, ν – молекулярная кинематическая вязкость, Δy_1 - первый пристенный шаг сетки по координате y. Для давления на твердых стенках используется условие равенства нулю градиента давления по нормали к стенке, аппроксимация которого производится с первым порядком точности.

На остальных границах для всех переменных используются условия периодичности. Для учета градиента давления в уравнение переноса продольной составляющей импульса добавляется слагаемое $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -2\frac{u_\tau^2}{H}$, где $u_\tau = \mathrm{Re}_\tau \, \nu / H$.

Шаг интегрирования по времени задавался равным $\Delta t = 2 \cdot 10^{-2}$ при числе Рейнольдса $Re_\tau = 400$ и $\Delta t = 1.5 \cdot 10^{-2}$ при $Re_\tau = 2400$, что соответствует значениям числа Куранта, построенного по Δx и среднерасходной скорости, CFL < 1. На каждом шаге по времени проводилось 10 внутренних итераций.

Расчеты проводятся в два этапа. На первом этапе достигается статистически установившийся режим течения, при котором средние величины перестают меняться с течением времени. На втором этапе проводится расчет с осреднением по времени.

В таблице 2 представлены данные об интервале выхода решения на установившийся режим T_{init} и длительности интервала, в течение которого производилась статистическая обработка результатов T_{aver}.

Таблица 2. Данные об интервале выхода решения на установившийся режим и длительности интервала статистической обработки для всех вариантов расчета

Число Рейнольдса	модель	$T_{init} \cdot u_\tau/H$	$T_{aver} \cdot u_\tau/H$
$Re_\tau = 400$	PANS, $f_k = 0.1$	5.0	2.5
	PANS, $f_k = 0.2$	5.0	2.5
	PANS, $f_k = 0.4$	20.0	10.0
	LES	5.0	2.5
$Re_\tau = 2400$	PANS, $f_k = 0.2$	47.5	10.0
	SST-IDDES	5.0	2.5

Для расчета течения в канале при числе Рейнольдса $Re_\tau = 400$ в качестве начального приближения было использовано развитое течение, полученное при расчете без подсеточной модели (неявный LES). При этом моделируемые характеристики турбулентности инициализируются следующим образом: уровень вязкости $\nu_{t0}/\nu = 1$, $\omega_{u0} = 10V_0/H$, $K_{u0} = \omega_{u0} \cdot \nu_{t0}$, где $V_0 = 1$ м/с – масштаб скорости.

При проведении расчетов течения в канале при числе Рейнольдса $Re_\tau = 2400$ оказалось, что использование в качестве начального приближения поля, полученного при расчете SST-IDDES методом, позволяет заметно сократить время расчета, необходимое для выхода решения на статистически установившийся режим.

Отметим, что для расчетов без модели и с моделью SST-IDDES также необходимо начальное приближение, для этого используются поля, полученные в результате стационарного RANS расчета с моделью турбулентности *k*-*ω* SST, с наложенными искусственными возмущениями вида (рисунок 21):

$$
\begin{aligned}
&u' = 0 \\
&v' = w' = 0.3u\sin\left(0.5\frac{2\pi x}{H}\right)\cdot\sin\left(4.0\frac{2\pi y}{H}\right)\cdot\sin\left(4.0\frac{2\pi z}{H}\right)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Следует отметить, что начальное приближение не влияет на статистически установившееся решение, а лишь влияет на продолжительность перехода к этому режиму.

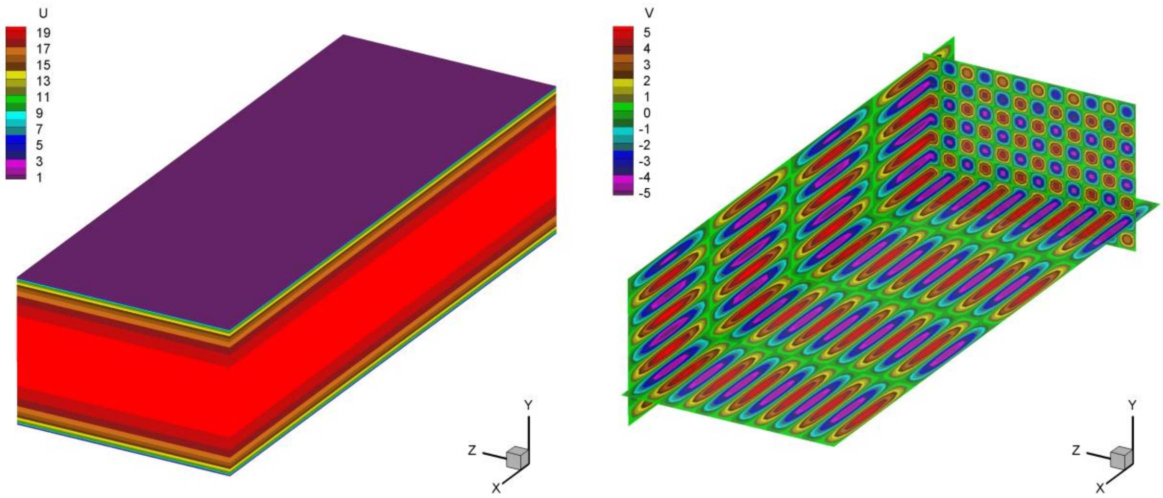


Рисунок 21. Начальные поля для компонент скорости u и v, отнесенные к динамической скорости u_τ, при числе Рейнольдса Re_τ = 400

4.2. Результаты расчетов с переменным значением параметра f_k

В главе о задаче ВОИТ было по показано, что формула $f_k = C(\Delta/L_t)^{2/3}$ (7) с константой C = 0.9 правильно описывает зависимость параметра f_k от шага сетки Δ. Целью расчетов, результаты которых приведены в этом разделе, было подтверждение зависимости (8) для пристенных течений на неравномерных сетках.

Для данной задачи $\Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) = \Delta_x = 0.05$, а масштаб турбулентности L_t определялся на основе значений полной кинетической энергии K и скорости ее диссипации ε, полученных с помощью предварительного RANS расчета с моделью Ментера SST. Рассчитанный по формуле (7) профиль значений f_k для чисел Рейнольдса $Re_\tau = 400$ и $Re_\tau = 2400$ представлен на рисунке 22. Вблизи стенок ($y/H < 0.05$) параметр $f_k = 1$, что соответствует уравнениям RANS, а при удалении от стенок быстро уменьшается и в центральной части канала его значение составляет $f_k \approx 0.2$.

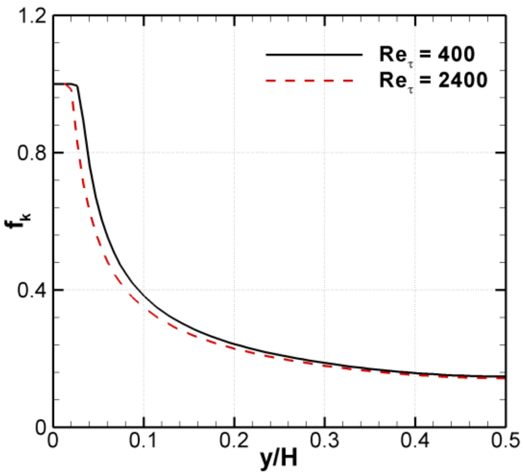


Рисунок 22. Профиль задаваемого параметра f_k

Расчеты показали, что при таком способе задания параметра f_k течение становится стационарным при обоих числах Рейнольдса, а полученные профили скорости (рисунок 23) сильно отличаются от данных прямого численного моделирования [33] [34], существенно уступая SST RANS, LES с моделью Смагоринского (при $Re_\tau = 400$) и SST IDDES (при $Re_\tau = 2400$).

Это объясняется тем, что, с одной стороны, уровень турбулентной вязкости в большей части канала в случае использования PANS значительно ниже, чем при использовании RANS, а с другой стороны, значительно превышает подсеточную вязкость LES (рисунок 24). Таким образом, турбулентная вязкость оказывается слишком высокой для разрешения турбулентных структур, но недостаточно высокий для моделирования всех рейнольдсовых напряжений, что и приводит к полностью неверному предсказанию свойств пристенных течений. По всей вероятности, создатели PANS также столкнулись с этой проблемой, что и привело к созданию зонного PANS ([18],[19]).

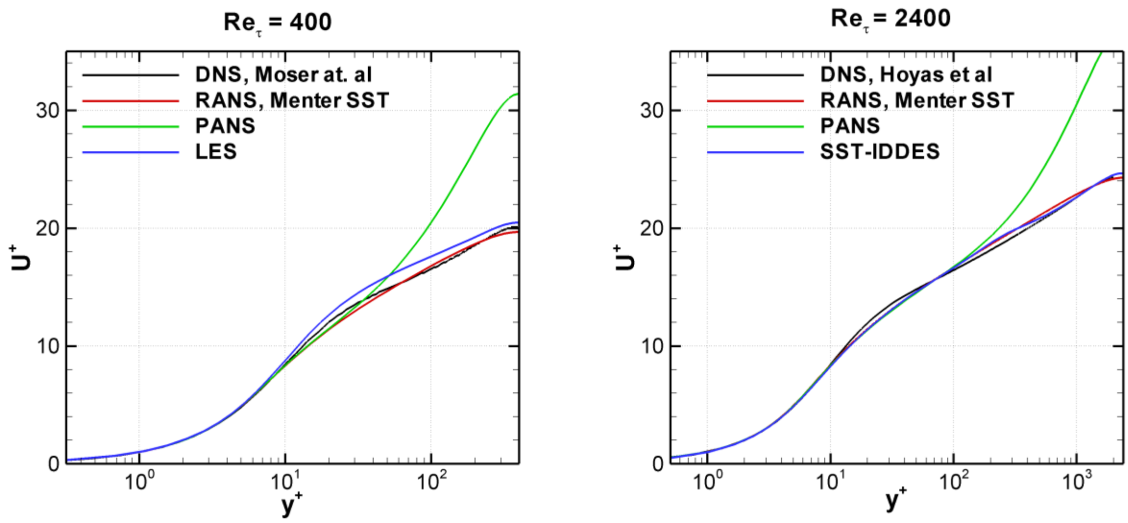


Рисунок 23. Сравнение расчетных профилей скорости, полученных с использованием различных подходов, с данными DNS при двух числах Рейнольдса

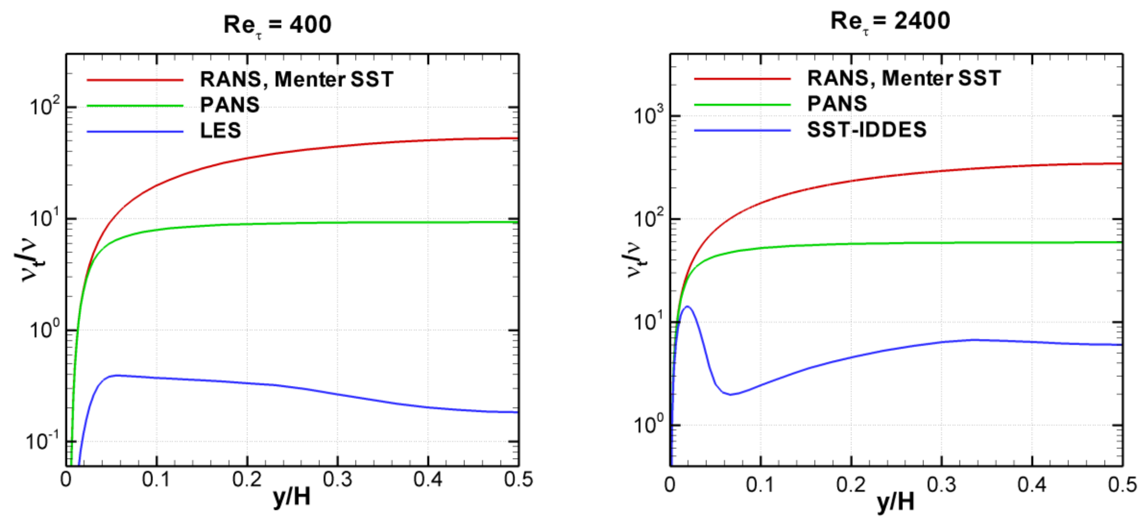


Рисунок 24. Сравнение профилей безразмерной турбулентной вязкости, полученных с использованием различных подходов, с данными DNS при двух числах Рейнольдса

4.3. Результаты расчетов с постоянным значением параметра f_k. Течение в канале при $Re_\tau = 400$

Расчеты течения в канале с помощью PANS при переменном f_k привели к неудовлетворительным результатам, что связано, вероятно, со слишком высоким значением f_k вблизи стенок. Поэтому была проведена серия расчетов течения в канале при $Re_\tau = 400$с постоянным параметром f_k, . Были рассмотрены три значения параметра f_k, одно из которых примерно соответствует значению в центре канала ($f_k = 0.2$), полученному по формуле (7), а другие были получены его уменьшением и увеличением в 2 раза ($f_k = 0.1$ и $f_k = 0.4$).

На рисунках 25-27 приведены мгновенные поля скорости и турбулентной вязкости, а на рисунке 28 – сравнение профилей средней скорости в переменных закона стенки и разрешенных касательных компонент тензора напряжений Рейнольдса, обезразмеренных по динамической скорости (8) с результатами DNS [33], а также сравнение профилей турбулентной вязкости. На рисунке 29 сравниваются нормальные компоненты тензора рейнольдсовых напряжения с данными DNS [33].

$$\begin{aligned}
u'^{+} &= \left(\langle u'u' \rangle\right)^{0.5} / u_\tau, \\
v'^{+} &= \left(\langle v'v' \rangle\right)^{0.5} / u_\tau, \\
w'^{+} &= \left(\langle w'w' \rangle\right)^{0.5} / u_\tau, \\
u'v'^{+} &= \left(\langle u'u' \rangle\right) / u_\tau^2
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь угловые скобки означают осреднение, которое проводилось не только по времени, но и по координатам x и z.

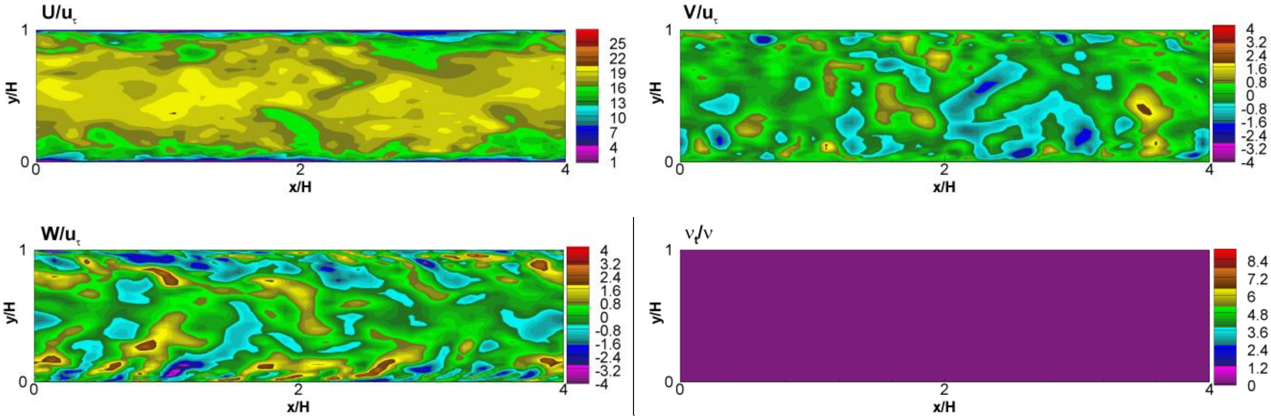


Рисунок 25. Мгновенные поля безразмерной скорости и вязкости, полученные с использованием PANS при f_k = 0.1

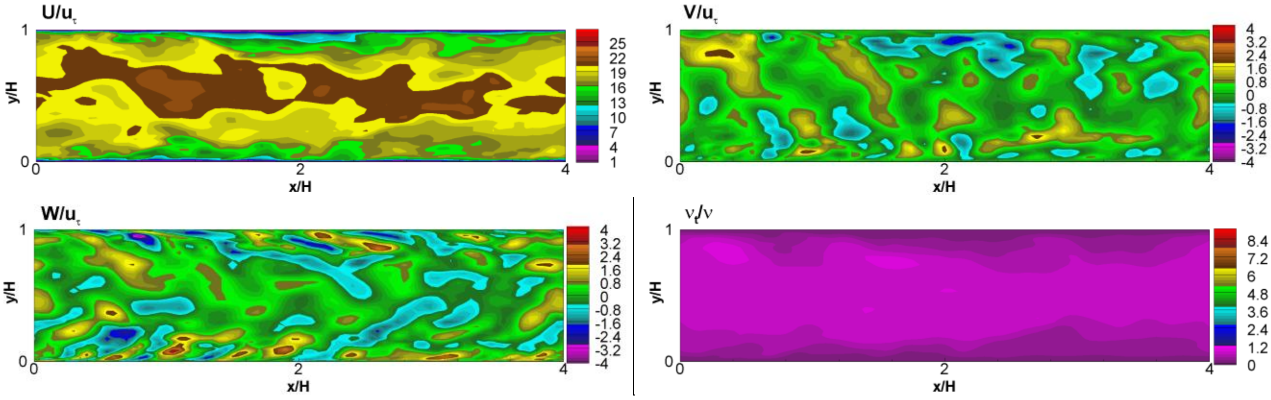


Рисунок 26. Мгновенные поля безразмерной скорости и вязкости, полученные с использованием PANS при f_k = 0.2

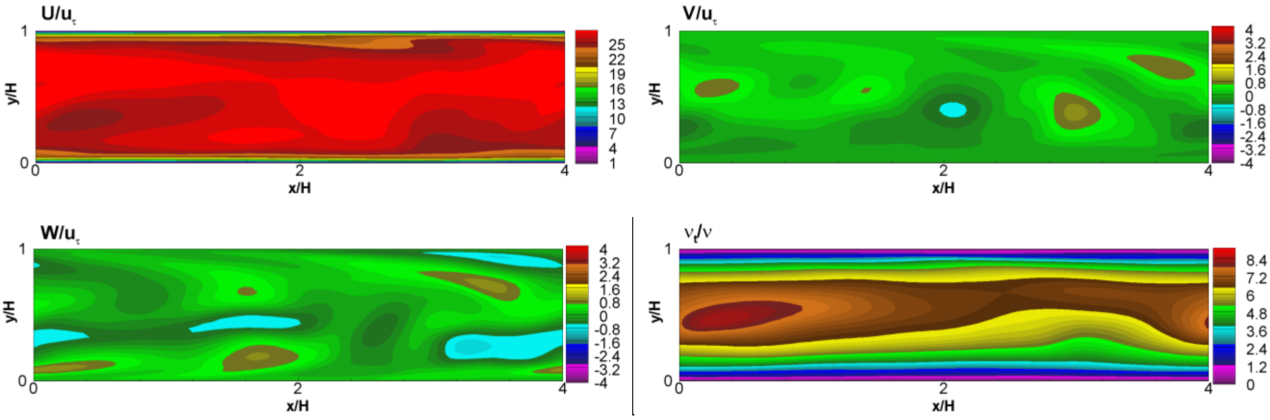


Рисунок 27. Мгновенные поля безразмерной скорости и вязкости, полученные с использованием PANS при f_k = 0.4

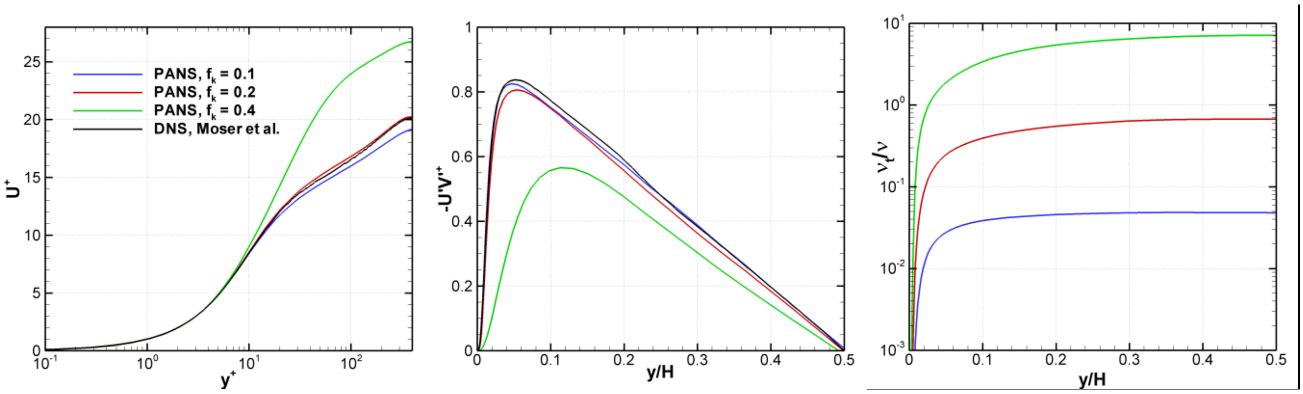


Рисунок 28. Сравнение расчетных профилей средней скорости, разрешенных касательных компонент тензора напряжений Рейнольдса, полученных с использованием PANS при различных fk, с результатами DNS [33], а также безразмерные профили турбулентной вязкости

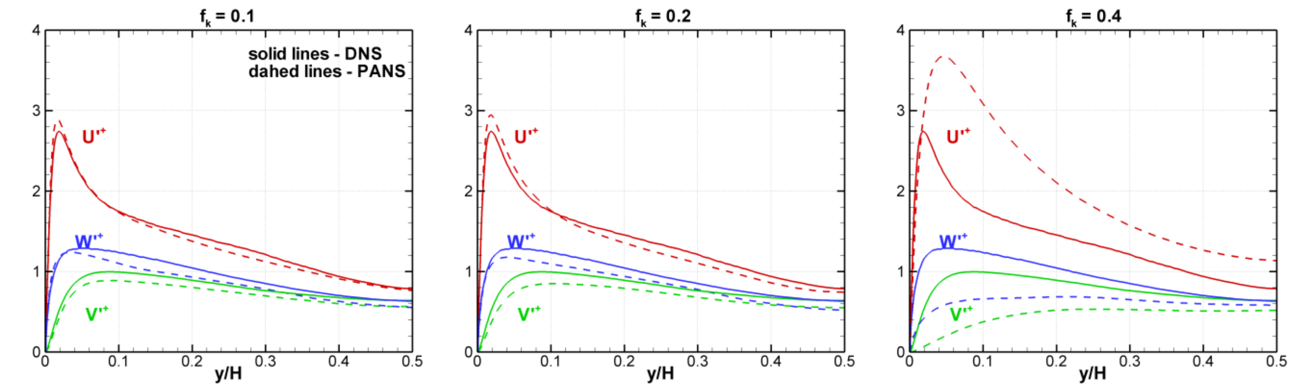


Рисунок 29. Сравнение разрешенных нормальных компонент тензора напряжений Рейнольдса, полученных с использованием PANS при различных fk, с результатами DNS [33]

Видно, что при $f_k = 0.1$ уровень турбулентной вязкости очень низкий, менее $0.05 \cdot \nu$. Несмотря на то, что компоненты разрешенных напряжений согласуются с DNS, профиль осредненной скорости несколько занижен, что характерно для решения этой задачи без подсеточной модели на данной сетке.

При $f_k = 0.4$ наблюдается заметное отличие PANS от DNS, обусловленное слишком высоким уровнем турбулентной вязкости, практически уничтожающей мелкомасштабную турбулентность. Отметим, что хотя значение $f_k = 0.4$ почти везде превышает переменный f_k, рассмотренный в предыдущем разделе, в этом случае разрешается часть турбулентных структур, характерный размер которых соизмерим с высотой канала. Иными словами, наличие разрешенных структур при расчете методом PANS определяется не только уровнем параметра f_k, но и его распределением поперек канала.

При $f_k = 0.2$ и профили осредненной скорости, и компоненты тензора Рейнольдсовых напряжений находятся в хорошем согласовании с данными DNS, что свидетельствует о том, что это значение f_k является оптимальным на используемой сетке при данном числе Рейнольдса. Однако результаты задачи о вырождении однородной изотропной турбулентности свидетельствуют о том, что при измельчении сетки оптимальное значение f_k должно уменьшаться, что затрудняет его определение в общем случае.

4.4. Результаты расчетов с постоянным значением параметра f_k. Течение в канале при $Re_\tau = 2400$

Поскольку линейный масштаб турбулентности $L_t = K^{1.5}/\varepsilon$ в задаче об установившемся течении жидкости в плоском канале не зависит от числа Рейнольдса, можно предположить, что значение параметра $f_k = 0.2$, оказавшееся оптимальным при $Re_\tau = 400$, применимо и при более высоких числах Рейнольдса, в частности при $Re_\tau = 2400$.

На рисунках 30-31 представлены мгновенные поля скорости и турбулентной вязкости, полученные в результате расчетов методом PANS с параметром $f_k = 0.2$ и методом SST-IDDES, а на рисунке 32 – сравнение профилей средней скорости в переменных закона стенки и разрешенных касательных компонент тензора напряжений Рейнольдса, обезразмеренных по динамической скорости (8) с результатами DNS [34], а также сравнение профилей турбулентной вязкости. Наконец, на рисунке 33 сравниваются нормальные компоненты тензора рейнольдсовых напряжения с данными DNS [34].

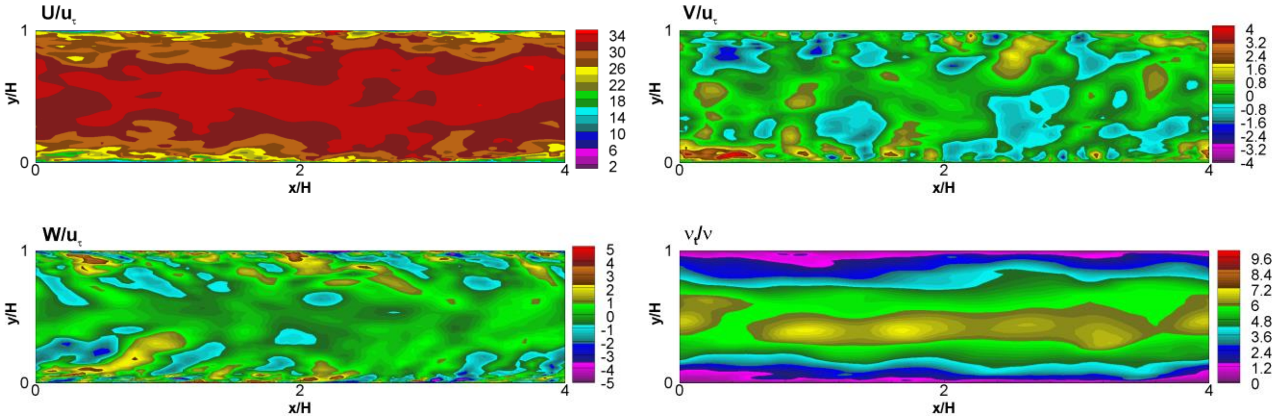


Рисунок 30. Мгновенные поля безразмерной скорости и вязкости, полученные с использованием PANS при f_k = 0.2

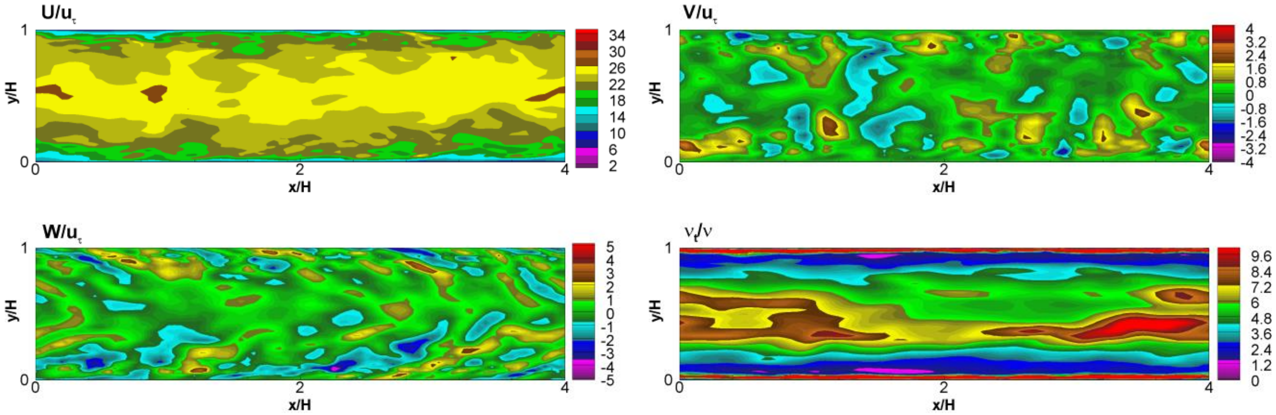


Рисунок 31. Мгновенные поля безразмерной скорости и вязкости, полученные с использованием SST-IDDES модели

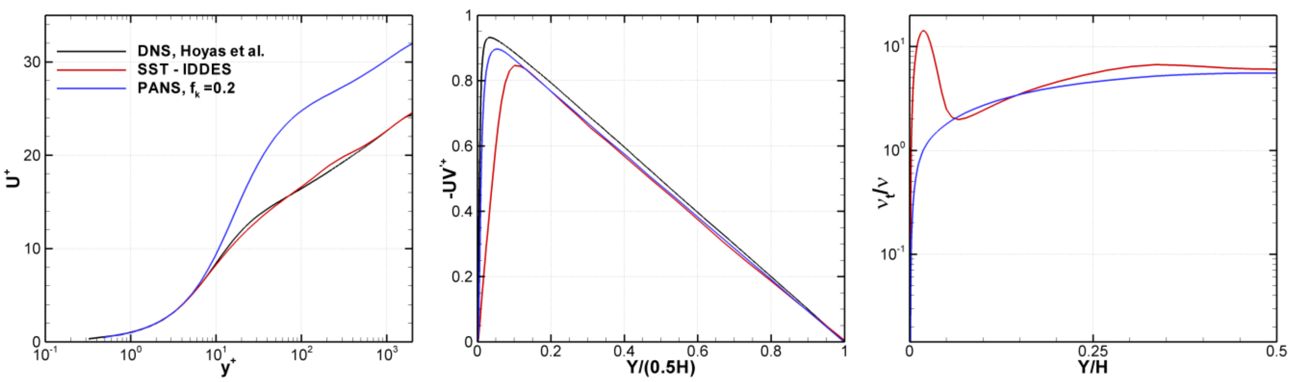


Рисунок 32. Сравнение расчетных профилей средней скорости и разрешенных касательных компонент тензора напряжений Рейнольдса, полученных с

использованием PANS при f_k = 0.2 и SST-IDDES, с результатами DNS [34]**, а профили безразмерной турбулентной вязкости**

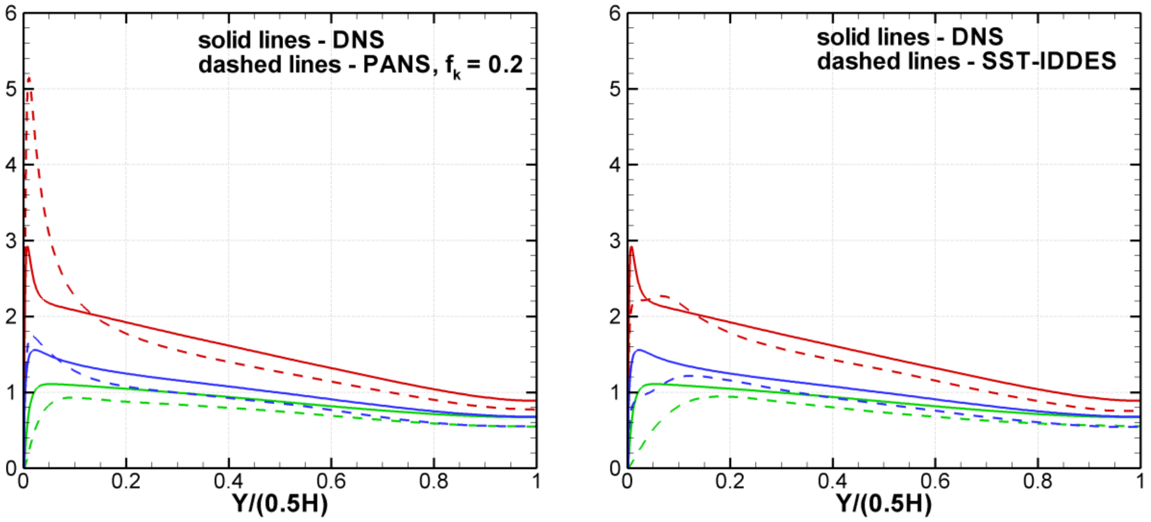


Рисунок 33. Сравнение расчетных профилей нормальных компонент тензора разрешенных напряжений Рейнольдса, полученных с использованием PANS при f_k = 0.2 и SST-IDDES, с результатами DNS [34]

Анализ профилей скорости показал значительное отличие профиля скорости, полученного в рамках PANS, от результатов DNS и SST-IDDES: профиль осредненной скорости и пик компоненты тензора Рейнольдсовых напряжений u'^{+} сильно завышены. Сравнение профилей осредненной вязкости PANS и SST-IDDES свидетельствует о том, что различия наблюдаются в пристенной области при y/h<0.1, где SST-IDDES предсказывает пик вязкости. Это связано с тем, что используемая сетка недостаточна для разрешения турбулентных структур вблизи стенки, поэтому IDDES, по сути являющийся WMLES моделью, обеспечивает там уровень вязкости, соизмеримый с RANS. Видно, что PANS не обладает WMLES свойствами, что приводит к существенному искажению профиля скорости.

Такое свойство делает возможным применение PANS только на сетках, обеспечивающих разрешенный до стенки LES. Учитывая неразрешенные трудности с определением «оптимального» постоянного значения на конкретной сетке можно констатировать, что этот метод уступает традиционному LES замкнутому при помощи модели Смагоринского для расчета пристенных течений.

5. Выводы

По результатам работы можно сделать следующие выводы:

- Проведен анализ и систематизация данных о существующих версиях и способах определения управляющих параметров метода частично осредненных уравнений Навье-Стокса (PANS). Выбрана наиболее перспективная версия PANS, основанная на k-ω модели Wilcox, и реализована в программном коде NTS.
- На примере задачи о вырождении однородной изотропной турбулентности показано, что управляющий параметр f_k должен зависеть от шага сетки следующим образом $f_k = C(\Delta/L_t)^{2/3}$, $C = 0.9$.
- PANS с таким выбором f_k непригоден для расчета пристенных течений, поскольку полученное с его помощью стационарное решение существенно отличается как от результатов DNS, так и от результатов RANS.
- PANS с постоянным по пространству f_k применим только на сетках, пригодных для LES расчетов с разрешением до стенки. Учитывая сложность определения f_k, в этой ситуации предпочтительным является использование традиционного LES.
- В целом можно сделать вывод, что метод PANS еще недостаточно развит для практического применения.

6. Список литературы

[1] J. Fröhlich and D. von Terzi, "Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows," *Prog. Aerosp. Sci.*, vol. 44, no. 5, pp. 349–377, Jul. 2008.

[2] P. R. Spalart, W. H. Jou, M. Strelets, and S. R. Allmaras, "Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach," in *Advances in DNS/LES*, 1997, vol. 1, pp. 4–8.

[3] F. R. Menter and Y. Egorov, "The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description," *Flow, Turbul. Combust.*, vol. 85, no. 1, pp. 113–138, Jun. 2010.

[4] S. S. Girimaji, "Partially-Averaged Navier-Stokes Model for Turbulence: A Reynolds-Averaged Navier-Stokes to Direct Numerical Simulation Bridging Method," *J. Appl. Mech.*, vol. 73, no. 3, p. 413, 2004.

[5] K. Abdol-Hamid and S. Girimaji, "A two-stage procedure toward the efficient implementation of PANS and other hybrid turbulence models," *NASA TM-213260*, no. November, 2004.

[6] B. Launder and D. Spalding, "The numerical computation of turbulent flows," *Comput. methods Appl. Mech. …*, 1974.

[7] A. Elmiligui and K. Abdol-Hamid, "Numerical study of flow past a circular cylinder using RANS, Hybrid RANS/LES and PANS formulations," *… Conf. Exhib.*, no. August, pp. 1–17, 2004.

[8] B. Basara, S. Krajnovic, and S. Girimaji, "PANS vs. LES for computations of the flow around a 3D bluff body," *Proc. ERCOFTAC 7th Int. …*, vol. 2, 2008.

[9] S. Wallin and S. Girimaji, "Commutation error mitigation in variable-resolution PANS closure: Proof of concept in decaying isotropic turbulence," in *6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics …*, 2011, no. June, pp. 1–16.

[10] K. Abdol-Hamid and A. Elmiligue, "Numerical Study of High-Temperature Jet Flow Using RANS/LES and PANS Formulations," in *23rd AIAA Applied Aerodynamics Conference*, 2005, no. June, pp. 1–17.

[11] S. Girimaji and K. Abdol-Hamid, "Partially–Averaged Navier-Stokes Model For Turbulence: Implementation And Validation," in *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2005, no. January, pp. 1–14.

[12] A. Frendi, A. Tosh, and S. Girimaji, "Flow Past a Backward-Facing Step: Comparison of PANS, DES and URANS Results with Experiments," *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.*, vol. 8, no. 1, pp. 23–38, Dec. 2006.

[13] L. Davidson, “The PANS model in a zonal hybrid RANS–LES formulation,” *Int. J. Heat Fluid Flow*, vol. 46, pp. 112–126, Apr. 2014.

[14] S. Krajnović and B. Basara, “Numerical Simulation of the Flow around a Tall Finite Cylinder Using LES and PANS,” *Prog. Turbul. III*, 2009.

[15] J. M. Ma, S.-H. Peng, L. Davidson, and F. J. Wang, “A low Reynolds number variant of partially-averaged Navier–Stokes model for turbulence,” *Int. J. Heat Fluid Flow*, vol. 32, no. 3, pp. 652–669, Jun. 2011.

[16] K. Abe, T. Kondoh, and Y. Nagano, “A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows—I. Flow field calculations,” *... J. Heat Mass Transf.*, vol. 37, no. 1, pp. 139–151, 1994.

[17] L. Davidson and S.-H. Peng, “Embedded LES Using PANS,” in *6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference*, 2011, vol. 4, pp. 27–30.

[18] L. Davidson, “A New Approach of Zonal Hybrid RANS–LES Based on a Two-Equation k-ε Model,” in *ETMM9: International ERCOFTAC Symposium on ...*, 2012, no. June, pp. 6–8.

[19] L. Davidson and S. Peng, “Embedded Large-Eddy Simulation Using the Partially Averaged Navier–Stokes Model,” *AIAA J.*, 2013.

[20] B. Basara, S. Krajnović, and S. Girimaji, “PANS methodology applied to elliptic-relaxation based eddy viscosity transport model,” *Turbul. Interact.*, pp. 63–69, 2010.

[21] B. Basara, “Eddy Viscosity Transport Model Based on Elliptic Relaxation Approach,” *AIAA J.*, vol. 44, no. 7, pp. 1686–1690, Jul. 2006.

[22] P. A. Durbin, “Near-Wall Turbulence Closure Modeling Without ``Damping Functions”,” *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 3, no. 1, pp. 1–13, 1991.

[23] B. Basara, S. Krajnovic, S. Girimaji, and Z. Pavlovic, “Near-Wall Formulation of the Partially Averaged Navier Stokes Turbulence Model,” *AIAA J.*, vol. 49, no. 12, pp. 2627–2636, Dec. 2011.

[24] S. Jakirlić, C. Chang, and G. Kadavelil, “Critical evaluation of some popular hybrid LES/RANS methods by reference to a flow separation at a curved wall,” in *6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference*, 2011, no. June, pp. 1–22.

[25] B. Basara and S. Krajnvic, “Performance analysis of partially-averaged Navier-Stokes method for complex turbulent flows,” in *6th AIAA Theoretical Fluid ...*, 2011, no. June, pp. 1–10.

[26] S. Girimaji and S. Suman, “Partially Averaged Navier Stokes (PANS) Method for Turbulence Simulations: Theory and Practice,” *Prog. Hybrid RANS-LES Model.*, pp. 29–43, 2012.

[27] S. Lakshmipathy and S. S. Girimaji, "Partially-averaged Navier-Stokes method for turbulent flows: k-ω model implementation," in *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2006, no. January, pp. 1–15.

[28] D. C. Wilcox, "Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models," *AIAA J.*, vol. 26, no. 11, pp. 1299–1310, 1988.

[29] M. Strelets, "Detached eddy simulation of massively separated flows," in *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2001.

[30] S. E. Rogers and D. Kwak, "An Upwind-Differencing Scheme for the Incompressible Navier-Sto kes Equations An Upwind-Differencing Scheme for the Incompressible Navier-Stokes Equations," 1988.

[31] G. Comte-Bellot and S. Corrsin, "Simple Eulerian time correlation of full-and narrow-band velocity signals in grid-generated, ``isotropic'' turbulence," *J. Fluid Mech.*, vol. 48, pp. 273–337, 1971.

[32] U. Piomelli and E. Balaras, "Wall-Layer Models for Large-Eddy Simulations," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 34, no. 1, pp. 349–374, Jan. 2002.

[33] R. D. Moser, J. Kim, and N. N. Mansour, "Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to Re[sub τ]=590," *Phys. Fluids*, vol. 11, no. 4, pp. 943–945, 1999.

[34] S. Hoyas and J. Jimenez, "Scaling of the velocity uctuations in turbulent channels up to Re_t = 2003," *Phys. Fluids*, vol. 18, pp. 1–4, 2006.