

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
Кафедра гидроаэродинамики, горения и теплообмена

Диссертация допущена к защите  
Зав. кафедрой, проф., д.ф.-м.н.  
\_\_\_\_\_ Смирнов Е.М.  
" \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2016 г.

Сравнительный анализ моделей перехода на примере обтекания крыловых  
профилей

Диссертация на соискание ученой степени магистра  
по направлению 03.04.01 – Прикладные математика и физика  
Магистерская программа: Модели и высокопроизводительные  
вычисления в физической гидрогазодинамике

Выполнил студент гр. 63603/1

Стабников А.С.

Руководитель, к.ф.-м.н., доцент

Гарбарук А.В.

Санкт-Петербург  
2016

## РЕФЕРАТ

Работа содержит 44 страницы, 21 рисунок, 5 таблиц, 47 библиографических названий, 1 приложение.

Ключевые слова: модели ламинарно-турбулентного перехода, крыловые профили, перемежаемость, байпасный переход, отрывной переход, пограничный слой, турбулентность

Учёт ламинарно-турбулентного перехода может играть важную роль в задачах, важных с практической точки зрения. Последнее время начали появляться дифференциальные модели перехода, позволяющие предсказать и учесть переход в рамках RANS подхода, который на данный момент наиболее популярен для прикладных задач.

В силу молодости дифференциальных моделей перехода в литературе отсутствует их систематический анализ. Цель работы – провести такой анализ и проверить способность моделей перехода реагировать на изменение уровня турбулентности набегающего потока.

Для тестирования выбрано 4 наиболее перспективные модели перехода, совместимые с кодами общего назначения.

Сравнение проводилось на основе двух задач – турбулентный пограничный слой на плоской пластине и обтекание крылового профиля NASA0021.

## КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

В работе проведён сравнительный анализ четырёх современных дифференциальных моделей перехода на примере двух задач - турбулентного пограничного слоя на плоской пластине и обтекания крылового профиля NASA0021.

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. Дифференциальные модели перехода .....	4
2.1 Метод $e^N$ .....	5
2.2 Модели, использующие «ламинарную кинетическую энергию».....	6
2.3 Модели, использующие коэффициент перемежаемости.....	7
2.4 Модели, выбранные для тестирования.....	11
3. Метод расчёта.....	12
4. Пограничный слой на плоской пластине.....	13
4.1. Описание рассматриваемых задач. ....	13
4.2. Влияние расчетной сетки.....	15
4.3. Верификация реализации моделей перехода.....	17
4.4. Постановка граничных условий для моделей перехода на основе SA .....	20
4.5. Влияние степени турбулентности на положение и характер перехода .....	22
5. Обтекание крылового профиля NACA0021 .....	24
5.1. Постановка задачи .....	25
5.1.1. Постановка граничных условий на входе для моделей SST .....	25
5.1.2. Постановка граничных условий на входе для моделей SA .....	26
5.2. Расчёты при низком уровне турбулентности .....	29
5.3. Исследование влияния уровня турбулентности набегающего потока.....	31
Заключение .....	34
Список литературы .....	35
Приложение 1. Формулировки рассмотренных моделей перехода.....	37
1. Модель SST $\gamma$ - $Re_\theta$ (2009 Langtry, Menter) .....	37
2. Модель SST $\gamma$ (2015 Menter, Smirnov, Liu, Avancha) .....	41
3. Модель SA $\gamma$ (2012 Coder, Maughmer).....	44
4. Модель SA $e^N$ (2014 Coder, Maughmer) .....	45

# 1. Введение

Для большинства интересных с практической точки зрения задач число Рейнольдса оказывается достаточно высоким, что определяет турбулентный характер течения. Однако даже в таких задачах встречаются области, в которых поток является ламинарным. Одним из наиболее важных примеров такого течения является начальный участок пограничного слоя, на котором он остается ламинарным из-за низкого локального числа Рейнольдса. Вниз по потоку, с ростом толщины (и, соответственно, локального числа Рейнольдса), течение в пограничном слое теряет устойчивость и переходит в турбулентную форму. Положение и характер ламинарно-турбулентного перехода зависит от множества факторов, в частности от градиента давления, уровня турбулентности набегающего потока и многих других. Более того, в зависимости от уровня турбулентности меняется не только положение перехода, но и так называемый «сценарий перехода», т.е. то, как именно развиваются возмущения в пограничном слое.

В ряде задач положение и характер ламинарно-турбулентного перехода оказывают существенное влияние на решение в целом. Такая ситуация встречается, в частности, при обтекании турбинных лопаток [1] и аэродинамических профилей [2]. В этом случае высокая точность предсказания важных технических характеристик течения, таких как коэффициента подъемной силы и коэффициента сопротивления, невозможна без учета и правильного описания перехода. К сожалению, полуэмпирические модели турбулентности, созданные для замыкания уравнений Рейнольдса, непригодны для предсказания перехода [3]. Этот факт привел к появлению целого направления в моделировании турбулентности, основной задачей которого является моделирование ламинарно-турбулентного перехода.

Во второй половине XX века было разработано много различных подходов к моделированию перехода, однако все они по тем или иным причинам были малоприменимы для решения задач в сложной геометрии в рамках современных тяжелых вычислительных пакетов. Однако в последнее время появились так называемые дифференциальные модели перехода, в рамках которых решаются уравнения переноса характеристик, позволяющих определить положение и характер перехода, в сочетании с уравнениями для турбулентных характеристик ( $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\omega$ ,  $\nu_t$ ). Эти модели сравнительно легко имплементируются в современные вычислительные коды и, по крайней мере, формально, могут быть использованы для решения произвольных задач. К сожалению, в силу относительной молодости этих моделей, в настоящее время в литературе отсутствует их систематический сравнительный анализ, что затрудняет выбор модели при проведении расчетов.

Поскольку положение и характер перехода существенно зависят от уровня турбулентности набегающего потока, модели, претендующие на универсальность, должны обладать способностью предсказания перехода в широком диапазоне значений этого параметра. Это обстоятельство определило основную **цель настоящей работы** – *проведение сравнительного анализа дифференциальных моделей перехода на примере обтекания крылового профиля при различных уровнях турбулентности внешнего потока.*

## 2. Дифференциальные модели перехода

В середине семидесятых годов прошлого века, когда началось активное использование моделей турбулентности с двумя уравнениями, исследователи заметили, что в некоторых случаях  $k$ - $\varepsilon$  модели с пристенными функциями способны описывать ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое. Этот факт казался настолько обнадеживающим, что в последующие годы значительные усилия были потрачены на изучение способностей  $k$ - $\varepsilon$  моделей предсказывать переход, а также на попытки калибровки существующих и созданию новых моделей, пригодных для описания перехода. Понимание бесперспективности этого пути пришло позже, когда было показано, что способность низкорейнольдсовых моделей в некоторых случаях предсказывать переход является скорее совпадением и не может быть использована в технических расчётах (см., например, [4], [5]). Это привело к необходимости создания специальных моделей для определения положения ламинарно-турбулентного перехода.

Важным обстоятельством является то, что характер ламинарно-турбулентного перехода существенно зависит от различных внешних факторов, таких как:

- уровень турбулентности набегающего потока;
- направление и величина градиента давления или температуры;
- наличие шероховатости или вдува/отсоса на поверхности и др.

В зависимости от совокупности этих факторов выделяют следующие режимы перехода:

1. **Естественный переход.** Наблюдается в задачах внешней аэродинамики и других задачах с низкими уровнями турбулентности набегающего потока. При естественном переходе в ламинарном пограничном слое возникают возмущения Толлмина-Шлихтинга, которые растут вниз по потоку, превращаясь в продольные и поперечные вихри, а затем в турбулентные пятна. Эти пятна увеличиваются в размере и постепенно заполняют весь пограничный слой.
2. **Вынужденный или байпасный переход** (от англ. bypass – пропускать, обходить). Наблюдается при высоких уровнях турбулентности внешнего потока, например на турбинных лопатках. При данном типе перехода сильные турбулентные пульсации из свободного потока проникают в пограничный слой, приводя к его быстрой турбулизации. Этот сценарий получил такое название из-за того, что при его реализации “пропускается” этап появления и развития возмущений Толлмина-Шлихтинга. Стоит отметить, что граница между байпасным и естественным переходами по уровню турбулентности не является строго определённой и исследователи определяют её по-разному. Принято считать, что байпасный переход наблюдается при уровнях турбулентности  $Tu$  порядка 1% и больших.
3. **Отрывной (пузырьковый) переход.** Данный вид перехода наблюдается в течениях с сильным положительным градиентом давления вниз по потоку. При отрывном сценарии перехода ламинарный пограничный слой отрывается от поверхности, что приводит к быстрой турбулизации сдвигового слоя с последующим его присоединением.

4. **Переход из-за неустойчивости поперечного течения** (так называемый cross-flow переход). Данный вид перехода является принципиально трёхмерным явлением, встречающимся, например, на крыльях самолётов. Переход к турбулентности происходит благодаря неустойчивости поперечной составляющей скорости в пограничном слое, возникающей из-за наличия перегиба в профиле скорости.

Важным обстоятельством является то, что при изменении различных упомянутых выше параметров может меняться не только положение или интенсивность протекания перехода, но и его тип. Например, при уменьшении уровня турбулентности набегающего на крыловой профиль потока, байпасный переход на верхней части профиля может стать в одних случаях естественным, а в других – отрывным. Наличие принципиально разных сценариев перехода к турбулентности приводит к значительным трудностям при моделировании этого процесса, поскольку построение модели, способной описывать все режимы, а также переходы между ними, является сложной задачей.

Опыт предсказания положения и характера ламинарно-турбулентного перехода в гидродинамических расчётах имеет длинную историю. Существует множество различных подходов к моделированию перехода, но дифференциальные модели используют лишь три из них:

- метод  $e^N$ , основанный на линейной теории устойчивости;
- подход, использующий понятие кинетической энергии ламинарных пульсаций;
- подход, базирующийся на уравнении для коэффициента перемежаемости  $\gamma$ .

Рассмотрим подробнее каждый из упомянутых подходов и дифференциальные модели, построенные на их основе.

## 2.1 Метод $e^N$

В 1956 году были независимо опубликованы две работы [6] и [7] предлагающие так называемый метод  $e^9$ . В рамках этого метода, основанного на линейной теории устойчивости, решаются уравнения Орра – Зоммерфельда для пограничного слоя на плоской пластине без градиента давления. Решение этих уравнений позволяет построить однозначную зависимость максимального усиления возмущений  $N$  от координаты  $x$  или локального числа Рейнольдса  $Re_x = U_0 x / \nu$ .

$$N = \ln(a / a_0) = \int_{x_0}^x -\alpha_i dx, \quad (1)$$

где  $a$  – амплитуда возмущения,  $\alpha_i$  – показатель роста возмущения.

На основе экспериментальных данных [8] было установлено, что при низких уровнях турбулентности ( $Tu < 0.1\%$ ) переходный участок на плоской пластине находится в интервале чисел Рейнольдса от  $Re_x = 2.8 \cdot 10^6$  до  $Re_x = 3.9 \cdot 10^6$ , что соответствует значениям  $N_{crit}$  от 8.22 до 10.3. Позднее, на основе новых экспериментальных данных, границы области перехода неоднократно уточнялись (см., например, [9]). Для крыловых профилей и плоской пластины значение  $N_{crit} = 9$  позволило получить хорошее совпадение с экспериментами в положении точки перехода и широко использовалось в последующих расчётах.

Позже, в 1975 году автор метода J.L. van Ingen, используя новые экспериментальные данные для калибровки, распространил модель на течения с отрывным пузырем [10].

В 1977 году на основе экспериментальных исследований L. M. Mask [11] предложил метод  $e^N$ , в рамках которого возможности оригинального метода были существенно расширены путем учета уровня турбулентности внешнего потока. Постоянное значение 9 заменено на переменное  $N_{crit}$ , которое зависит от уровня турбулентности и рассчитывается по формуле

$$N_{crit} = -8.43 - 2.4 \ln(Tu / 100), \quad (2)$$

где  $Tu = 100 \cdot \overline{u'^2} / U_0$ ,  $u'$  - интенсивность турбулентных пульсаций, а  $U_0$  – скорость потока. Метод применим при  $N_{crit} > 0$ , т.е. до уровней турбулентности потока  $Tu = 3\%$ .

В 1986 году Drela [12], при разработке кода ISES, предназначенного для быстрого и эффективного расчёта параметров крыловых профилей, использовал интегральный метод (решение уравнений Эйлера и уравнений для интегральных характеристик пограничного слоя) в сочетании с подходом  $e^N$ , в рамках которого помимо уравнений для интегральных характеристик пограничного слоя, решалось уравнение для  $N$ . При достижении  $N$  критического значения  $N_{crit}$ , задаваемого пользователем, корреляционные функции метода переключались с ламинарных на турбулентные. Этот же подход используется в открытом коде для расчета обтекания крыловых профилей XFOIL [13].

В целом, метод  $e^N$  хорошо подходит для определения положения точки естественного перехода, но, даже с учетом формулы (2), он не очень точен при высоких уровнях турбулентности внешнего потока, когда ламинарно-турбулентный переход является байпасным. Кроме того, в рамках этого метода игнорируется протяженность переходного участка, т.е. подразумевается, что переход осуществляется мгновенно, в той точке, когда  $N$  достигает критического значения.

Ни одна из упомянутых выше формулировок этого метода не пригодна для использования в кодах общего назначения из-за сложности в имплементации.

Этот последний недостаток был устранён в дифференциальной модели Coder, Maughmer [14], построенной на основе модели Спаларта-Аллмареса SA [15]. В рамках этой модели турбулентности решается дополнительное уравнение переноса для величины  $N$ , источники слагаемые которого построены на основе корреляций метода Drela [12]. Уравнение для турбулентной вязкости модифицировано так, что пока  $N < N_{crit}$ , генерационный член заблокирован, а при достижении критического значения он разблокируется и происходит переход к турбулентному решению.

## 2.2 Модели, использующие «ламинарную кинетическую энергию»

Ещё один относительно молодой подход к моделированию ламинарно-турбулентного перехода, получивший на данный момент несколько менее широкое распространение, основан на концепции «ламинарной кинетической энергии», которая является энергией флуктуаций скорости в ламинарном пограничном слое с высоким уровнем турбулентности внешнего потока. В 1997 году R.E. Mayle, A. Schulz [16] предложили уравнение переноса для этой величины и решили его в рамках приближения пограничного слоя, получив при этом

хорошее совпадение с экспериментальными данными для интенсивности пульсаций вверх по потоку от точки перехода к турбулентности. Также в статье предлагается метод нахождения начала перехода, основанный на сравнении вязких напряжений на стенке с напряжениями, порожденными наличием «ламинарных пульсаций». Найденные таким образом положения точек перехода хорошо совпадают с экспериментальными значениями для высоких уровней турбулентности внешнего потока, а при низких уровнях точность метода существенно снижается.

В работе Lardeau с коллегами [17] уравнение для ламинарной кинетической энергии [16] использовалось для учета перехода в нелинейной модели турбулентности. Для определения степени турбулентности использовался коэффициент перемежаемости, определяемый по алгебраической формуле (3) [18], о которой будет подробнее рассказано ниже. Полная энергия потока определялась как  $k = (1 - \gamma)k_L + \gamma k_T$ , где  $k_L$  и  $k_T$  соответственно ламинарная и турбулентная кинетическая энергия.

С использованием уравнения для ламинарной кинетической энергии Walters построил две модели перехода: с уравнениями для  $k$ ,  $\epsilon$  и  $k_L$  [19] и с уравнениями для  $k$ ,  $\omega$  и  $k_L$  [20]. Модели схожи по строению и обе являются полностью применимыми в современных CFD кодах, используя для расчётов только локальную информацию. Отличительной особенностью этих моделей является то, что они основаны не на эмпирических, а на феноменологических соображениях и направлены на физическое описание переходного участка ламинарного пограничного слоя. В частности, это первые модели, направленные на описание механизма байпасного перехода.

### 2.3 Модели, использующие коэффициент перемежаемости

Наиболее представительным классом моделей перехода являются модели, основанные на коэффициенте перемежаемости, значение которого в точке по определению равно отношению времени, в течение которого наблюдается турбулентное течение к общему времени наблюдения  $\gamma = \Delta t_{turb} / \Delta t$ . Таким образом, при  $\gamma=0$  течение полностью ламинарное, а при  $\gamma=1$  - турбулентное, а область с промежуточными значениями перемежаемости является переходной.

В первых методах, основанных на перемежаемости, эта величина использовалась только для нахождения точки перехода ( $\gamma=1$ ) и определялась путем интегрирования вдоль поверхности. Для этого необходимо знать точку начала перехода (в которой коэффициент перемежаемости начинает расти) и скорость роста коэффициента перемежаемости в переходной области. Для определения точки начала перехода обычно используются эмпирические корреляции, типичными примерами которых являются корреляции Dunham [21], в которой критическое число Рейнольдса потери импульса представлено как функция градиента давления и уровня турбулентности внешнего потока, и Abu-Ghannam & Shaw [22], в которой начало и конец перехода определяются по значениям числа Рейнольдса потери импульса.

Первым успешным опытом применения понятия перемежаемости к численному определению положения перехода был подход Dhawan & Narasimha [18], в котором

перемежаемость связывалась с положением  $x$  вниз по потоку от точки начала образования турбулентных пятен  $x_i$  по формуле

$$\gamma(x) = 1 - \exp\left(-\frac{n\sigma}{U_0}(x - x_i)^2\right), \quad (3)$$

где  $U_0$  – скорость свободного потока, а  $n$  и  $\sigma$  – величины, характеризующие скорость распространения пятен, которые определяются из эмпирических корреляций для пограничного слоя на плоской пластине без градиента давления. Подход получил развитие в работе Chen & Thyson [23], где он был обобщен на случай обтекания осесимметричных тел с меняющейся скоростью внешнего потока.

Следующим шагом в развитии метода было построение модели, которая, при помощи перемежаемости, была бы способна описывать течение полностью, а не только определять положение перехода. Первая попытка построить такую модель принадлежит Libby [24]. Он разработал теоретическую модель, в рамках которой в расчётной области одновременно решаются две системы уравнений для ламинарных и турбулентных величин. Актуальные значения получаются путем взвешивания турбулентной и ламинарной составляющих с весами  $\gamma$  и  $(1-\gamma)$ , определяемыми локальным значением коэффициента перемежаемости ( $\phi = (1-\gamma)\phi_L + \gamma\phi_T$ ).

Подход получил развитие в работах [25] - [27]. Так, Dopazo [25] и Byggstoyl & Kollmann [26] независимо пришли к одному и тому же дифференциальному уравнению для  $\gamma$  :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \gamma(1-\gamma) (\langle u_{L,i} \rangle - \langle u_{T,i} \rangle) \right) + S_\gamma, \quad (4)$$

где  $u_{L,i}$ ,  $u_{T,i}$  - ламинарная и турбулентная скорости, а  $S_\gamma$  - член, отвечающий за средний перенос ламинарной жидкости в турбулентные зоны. Steelant & Dick [27] также получили своё, отличающееся от уравнения (4), уравнение переноса для перемежаемости, основываясь на уравнении (3).

К сожалению, этот подход сопровождается целым рядом трудноразрешимых проблем, наиболее существенной из которых является сложность обеспечения уравнения неразрывности для актуального поля скорости. Разные авторы решали эти проблемы по-разному, также они по-разному моделировали дополнительные источниковые члены в уравнениях, полученные в результате процедуры осреднения. Не менее существенными оказались и вычислительные проблемы, поскольку метод решения разных уравнений для турбулентного и ламинарного режимов является не только более затратным, но и более сложным в имплементации. Большое количество недостатков привело к тому, что этот подход не нашел применения в кодах общего назначения.

Suzen & Huang [28] построили уравнение переноса для коэффициента перемежаемости, основываясь на уравнениях Steelant & Dick [27] и Cho and Chung [29], и использовали его в качестве множителя для турбулентной вязкости в модели Ментера SST [30]. Тем самым им удалось создать замкнутую дифференциальную модель, однако при ее решении требовалось проведение нелокальных операций (интегрирование поперек пограничного слоя) для определения значения числа Рейнольдса потери импульса, которое необходимо для нахождения точки начала перехода путем сравнения с алгебраической корреляцией. К сожалению, использование таких нелокальных операций практически невозможно в рамках

современных кодов общего назначения, поэтому эта модель также не нашла широкого применения.

В 2002 году Менгер [31] предложил модель перехода с уравнением переноса для коэффициента перемежаемости, в которой отсутствуют вышеупомянутые недостатки:

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \gamma)}{\partial x_j} = P_\gamma - E_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_f} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right], \quad (5)$$

где  $P_\gamma$  и  $E_\gamma$  - источниковые члены, а  $\sigma_f$  - константа.

Интегрирования пограничного слоя удалось избежать, основываясь на идее van Driest & Blumer [32] о связи числа Рейнольдса потери импульса с величиной  $Re_v = \rho y^2 S / \mu$ , называемой числом Рейнольдса завихренности. Оказалось, что в каждом сечении пограничного слоя число Рейнольдса потери импульса связано с максимальным поперек слоя числом Рейнольдса завихренности следующим соотношением:

$$Re_\theta = \max_{BL}(Re_v) / 2.193 \quad (6)$$

Генерационный член в уравнении для перемежаемости  $P_\gamma$  построен таким образом, что пока посчитанное таким образом число Рейнольдса  $Re_\theta$  меньше критического значения  $Re_{\theta c}$ , при котором начинается переход, он равен нулю, а при достижении критического значения начинает расти. Ламинарно-турбулентный переход обеспечивался умножением генерационного члена в уравнении для кинетической энергии модели SST [30] на функцию, зависящую от коэффициента перемежаемости.

Данная модель продемонстрировала хорошие результаты при расчётах различных пограничных слоёв на плоских пластинах без градиента давления, однако из-за «назначения» критического числа Рейнольдса она не способна описывать влияние на переход градиента давления, что сильно сужает область ее применения.

Этот недостаток был исправлен в модели  $\gamma$ - $Re_\theta$  [33], которая содержит дополнительное уравнение переноса для критического числа Рейнольдса потери импульса  $\tilde{Re}_{\theta t}$ :

$$\frac{\partial(\rho \tilde{Re}_{\theta t})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \tilde{Re}_{\theta t})}{\partial x_j} = P_{\theta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_{\theta t} (\mu + \mu_t) \frac{\partial \tilde{Re}_{\theta t}}{\partial x_j} \right] \quad (7)$$

где  $\sigma_{\theta t}$ ,  $c_{\theta t}$  - константы модели

Уравнение построено таким образом, что во внешнем потоке величина  $\tilde{Re}_{\theta t}$  определяется генерационным членом  $P_{\theta t} = c_{\theta t} \frac{\rho}{t} (Re_{\theta t} - \tilde{Re}_{\theta t}) (1.0 - F_{\theta t})$ , построенным так, чтобы значения  $\tilde{Re}_{\theta t}$  соответствовали корреляционным значениям  $Re_{\theta t}$  (зависящим от уровня турбулентности внешнего потока и градиента давления). В пограничном слое генерация отключается при помощи специальной функции модели SST  $F_{\theta t}$ , определяющей границы пограничного слоя, а величина  $\tilde{Re}_{\theta t}$  переносятся из внешнего потока за счёт диффузии. Такой подход позволяет «доставить» информацию о критическом числе Рейнольдса, которое определяется уровнем турбулентности внешнего потока и градиентом давления, в пограничный слой, где по формуле (6) можно оценить локальное число Рейнольдса потери импульса.

Модель содержит три эмпирические корреляции для следующих величин:  $Re_{\theta c}$  ( $\tilde{Re}_{\theta t}$ ) – точка начала роста перемежаемости,  $F_{length}$  ( $\tilde{Re}_{\theta t}$ ) – функция, отвечающая за длину области перехода и  $Re_{\theta t}$  ( $Tu$ ,  $\lambda_{\theta}$ ) – точка начала перехода, где  $\lambda_{\theta}$  – безразмерный параметр, характеризующий градиент давления. Следует отметить, что эти функции не были представлены в [33], а опубликованы в свободный доступ на несколько лет позже [34].

Таким образом, для проведения расчётов с помощью этой модели требуется знать только характеристики турбулентности набегающего потока: уровень турбулентности  $Tu$  и линейный масштаб, необходимый для вычисления удельной диссипации. Эта модель обладает наиболее широкими возможностями среди существующих моделей перехода. Так, в ее рамках предусмотрено описание естественного, байпасного и отрывного переходов, а также предусмотрена возможность реламинаризации потока под действием градиента давления. Модель была протестирована на ряде двумерных и трёхмерных течений различной степени сложности и продемонстрировала хорошие результаты. Данная модель является первой, полностью подходящей для использования в кодах общего назначения в 2D и 3D течениях со сложной геометрией. К недостаткам модели можно отнести сложность в достижении сошедшегося решения, а так же трудности при расчёте задач с движущимися сетками, так как для расчёта локальной степени турбулентности  $Tu$  используется скорость относительно стенки.

С момента публикации модели появился целый ряд ее модификаций. Так, в работах [35] и [36] были предложены поправки для предсказания перехода, вызванного неустойчивостью поперечного течения. Medida & Baeder [37] слегка изменили модель  $\gamma-Re_{\theta}$  и применили её к модели SA [15]. Полученные результаты для крыловых профилей оказались схожи с результатами, полученными при помощи оригинальной модели.

Coder, Maughmer [38] упростили модель  $\gamma-Re_{\theta}$ , заменив уравнение переноса для  $Re_{\theta t}$  на алгебраическую корреляцию, и применили её совместно с моделями SST [30] и SA [15]. Для неизвестных в рамках модели SA величин  $k$  и  $\omega$  авторы использовали следующие оценки:

$$\omega = \frac{\Omega}{\sqrt{\beta^*}}, \quad (8)$$

$$k = v_t \max\left(\omega, \frac{SF_2}{a_1}\right), \quad (9)$$

где  $F_2 = \tanh(\arg_2^2)$ ,  $\arg_2 = \max\left(\frac{2}{\beta^* y} \sqrt{\frac{v_t}{\omega}}, \frac{500v}{y^2 \omega}\right)$ ,  $y$  – расстояние до стенки,  $\Omega = \sqrt{2\Omega_{i,j}\Omega_{i,j}}$  – инвариант тензора завихренности,  $\beta^*$  – константа модели SST. Полученные при помощи модели [38] результаты также схожи с результатами оригинальной модели. Отметим также, что в данной модели для расчётов используется не локальное значение интенсивности турбулентности, а ее величина в набегающем потоке, что в ряде случаев может снизить точность расчета.

Coder & Maughmer [39] предложили модель перехода, основанную на двух уравнениях переноса для перемежаемости  $\gamma$  и для  $N$  из метода  $e^N$ . Уравнение для перемежаемости практически без изменений взято из модели  $\gamma-Re_{\theta}$ , однако в данном случае точка начала перехода (в которой «включается» генерация в уравнении для коэффициента перемежаемости) определяется координатой, где величина  $N$  достигает критического значения  $N_{crit}$ . Модель ориентирована на задачи внешней аэродинамики с низкими уровнями

турбулентности внешнего потока и при расчете крыловых профилей превосходит оригинальную модель не только по точности, но и по скорости сходимости.

Наконец, совсем недавно, в 2015 году, Menter, Smirnov, Liu, Avancha [40] опубликовали модель перехода с одним дифференциальным уравнением для величины  $\gamma$  (SST  $\gamma$  - модель). При формулировке новой модели авторы отказались от уравнения переноса для  $Re_\theta$ , а также от сложных и громоздких корреляций для величин  $Re_{\theta c}$ ,  $Re_{\theta t}$ , и  $F_{length}$ , заменив их одной простой алгебраической корреляцией и приняв  $F_{length}$  за константу. Такие сильные упрощения существенно улучшили сходимость итераций и сократили время расчета, однако несколько снизили гибкость и универсальность относительно оригинальной модели  $\gamma$ - $Re_\theta$ .

## 2.4 Модели, выбранные для тестирования

Подводя итоги этого краткого обзора дифференциальных моделей перехода, следует признать, что модели, основанные на уравнении переноса для коэффициента перемежаемости  $\gamma$ , выглядят наиболее перспективными. Это обстоятельство предопределило выбор моделей для исследования в настоящей работе, а именно моделей SST  $\gamma$ - $Re_\theta$  [34] и SST  $\gamma$  [40]. Эти модели выглядят наиболее универсальными и точными, поскольку предназначены для описания всех видов перехода. Кроме того, обе модели реализованы в коммерческих кодах ANSYS CFX и ANSYS Fluent, а модель  $\gamma$ - $Re_\theta$  также и в академическом коде SINF [41], что позволяет провести верификацию реализации модели.

Обе выбранные модели основаны на модели с двумя уравнениями SST [30]. Для оценки возможности предсказания перехода на основе более простой модели была выбрана модель Coder, Maughmer[38] (SA  $\gamma$ ) - упрощённая версия  $\gamma$ - $Re_\theta$  модели с уравнением только для  $\gamma$ .

Для сравнения эффективности метода  $e^N$  и подхода, основанного на коэффициенте перемежаемости, были также проведены расчеты с использованием дифференциальной модели SA  $e^N$  Coder [14].

Формулировки и описание принципа действия использованных моделей приведены в Приложении 1.

### 3. Метод расчёта

Расчёты проводились в рамках NTS – кода [42]. Данный код использует метод конечных объемов и предполагает использование структурных многоблочных перекрывающихся сеток (так называемая технология “Chimera”), что, с одной стороны, позволяет применять разработанные для структурных сеток конечно-разностные схемы повышенного порядка аппроксимации, а с другой, - обеспечивает возможность проведения расчетов в областях сложной, практически произвольной, геометрической формы.

Расчеты проводились в рамках приближения несжимаемой жидкости, при этом конвективные потоки в уравнениях для жидкости аппроксимировались при помощи противопоточной схемы Роджерса-Квака [43] третьего порядка, а в уравнениях для турбулентных характеристик использовалась схема второго порядка.

Из выбранных для тестирования моделей в коде была имплементирована только модель Coder [14]. Это привело к необходимости имплементации и верификации остальных трех моделей ( $\gamma$ - $Re_\theta$ [34], SST  $\gamma$ [40] и SA  $\gamma$  [38]). Верификация моделей на базе SST путем сравнения с результатами расчетов других кодов (CFX, FLUENT, SINF) представлена в разделе 4.3. К сожалению, такой подход оказался невозможен для модели SA  $\gamma$ , поскольку она отсутствует во всех вышеперечисленных кодах. Однако, формулировка этой модели практически идентична модели  $\gamma$ - $Re_\theta$ , прошедшей верификацию. Это позволяет надеяться на правильность имплементации этой модели в NTS коде.

В рамках работы были рассмотрены две задачи: пограничный слой на плоской пластине (глава 4) и обтекание крылового профиля NACA0021 (глава 5). Каждая из задач была рассмотрена при трех различных уровнях турбулентности внешнего потока. Выбор задач был обусловлен, в первую очередь, доступностью экспериментальных данных при рассматриваемых режимах.

Для крылового профиля NACA0021 кроме экспериментальных данных для сравнения были привлечены результаты расчетов по интегральному методу  $e^N$  Drela [12], реализованному в открытом коде XFOIL [13].

## 4. Пограничный слой на плоской пластине

Поскольку в рамках настоящей работы часть моделей турбулентности имплементировалась в NTS код, их необходимо было верифицировать. Для этой цели в случае моделей перехода традиционно используется решение переходных пограничных слоев, экспериментальное исследование которых было проведено в Роллс-Ройс в начале 90х годов [44]. Эти эксперименты проводились при различных градиентах давления и уровнях турбулентности набегающего потока. Последнее обстоятельство позволяет использовать эту задачу не только для верификации, но и для оценки влияния степени турбулентности на решение. Таким образом, при расчете пограничных слоев решались следующие задачи.

1. Провести исследование сеточной сходимости и определить, требования к сетке для расчётов с использованием моделей перехода.
2. Верифицировать имплементации моделей перехода путём сравнения с результатами других кодов (ANSYS CFX, ANSYS Fluent, SINF).
3. Исследовать влияние степени турбулентности внешнего потока на точность предсказания положения перехода.

### 4.1. Описание рассматриваемых задач.

В начале 90х годов компания Роллс-Ройс [44] провела серию экспериментальных исследований ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях. Со временем эта серия стала эталонной, включена в базу данных ERCFTAG и в литературе встречается под названием «серия ТЗ». В настоящей работе выбраны режимы без градиента давления, но при различных уровнях турбулентности внешнего потока, которые имеют идентификаторы ТЗА, ТЗА- и ТЗВ.

Схема установки изображена на рисунке 1. Изотермический пограничный без градиента давления развивался на заостренной спереди плоской пластине длиной  $L=1.7$  м и с установленными экспериментальными датчиками (test plate). Уровень турбулентности в потоке задавался турбулизирующей решеткой (turbulence grid), расположенной непосредственно после конфузора (contraction). В двух рассмотренных случаях (ТЗА и ТЗВ) интенсивность турбулентности выше 1.0%, что предопределяет байпасный характер перехода (см. табл. 1). В третьем случае (ТЗА-) величина уровня турбулентности является пограничной (0.87%), поэтому характер перехода определить затруднительно.

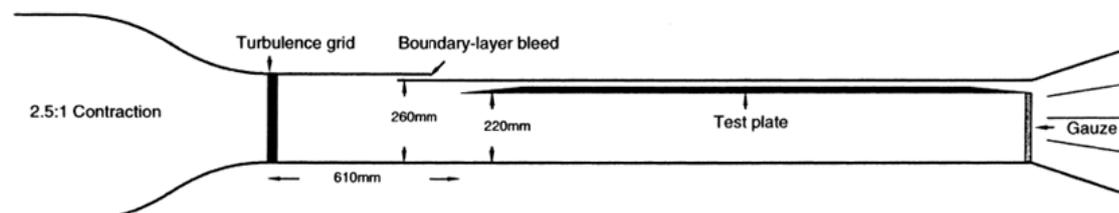


Рис. 1. Схема установки для ТЗ серии экспериментов без градиента давления

Таблица 1. Параметры внешнего потока в рассматриваемых экспериментах

	Re	U <sub>0</sub> , м/с	Tu
ТЗА-	3·10 <sup>6</sup>	19.8	0.87
ТЗА	10 <sup>6</sup>	5.2	3.3
ТЗВ	3.33·10 <sup>6</sup>	9.5	6.2

При проведении предварительных расчетов размеры расчетной области были выбраны следующим образом: длина равна  $L$ , а высота -  $0.2L$ . На пластине ставится условие прилипания, на верхней границе – условие симметрии, на выходной – постоянное давление. На входе в расчетную область задавался однородный поток с характеристиками, которые ранее использовались при расчете этих течений другими авторами [45] и соответствуют условиям эксперимента (см. табл. 2). На входной границе задавались:

- нормальная составляющая скорости, равная  $U_0$ ;
- кинетическая энергия турбулентности  $k_{in} = \frac{3}{2}(Tu \cdot U_0 / 100)^2$ ;
- удельная диссипация  $\omega_{in} = \frac{k_{in}}{LU_0} \left( \frac{\nu_t}{\nu} \right)_{in}^{-1} Re$ .

Кроме того, были проведены расчеты в области, расширенной от начала пластины вверх по потоку (при этом на «стенке» использовались условия симметрии). Результаты расчетов показали, что торможение потока в области передней кромки пластины зависит от длины участка перед пластиной, поэтому в основной серии расчетов использовалась именно эта постановка задачи (длина предварительного участка подбиралась так, чтобы исключить ее влияние на положение точки перехода).

В связи с тем, что в решении, полученном при помощи модели SST, кинетическая энергия турбулентности в однородном турбулентном потоке убывает (диссипирует), граничные условия для турбулентных характеристик необходимо скорректировать так, чтобы получить экспериментальные значения турбулентных характеристик у начала пластины. Эти значения на входе в расчетную область были получены из аналитического решения уравнений модели SST в однородном потоке по следующим формулам

$$k = c_2 (\beta x + c_1)^{-\frac{c_\mu}{\beta}}, \quad (10)$$

$$\omega = \frac{1}{\beta x + c_1}, \quad (11)$$

где  $x$  – координата вдоль течения в свободном потоке,  $c_\mu$ ,  $\beta$  – константы модели SST, а  $c_1$  и  $c_2$  – константы интегрирования, получаемые из граничных значений в начале пластины  $k_{in}$  и  $\omega_{in}$ .

На основании серии расчетов в разных расчетных областях были подобраны значения длин предварительного участка так, чтобы их значения не оказывали влияния на решение (и не превышали  $c_1/\beta$  - область существования решения (10) и (11)). Для случаев ТЗА и ТЗА- длина добавленной области равна  $0.07L$ , а для ТЗВ  $0.054L$ . Полученные для этих длин значения граничных условий на входной границе для моделей SST приведены в таблице 2.

Таблица 2. Параметры турбулентности в начале пластины в экспериментах и граничные условия, задаваемые на входе в расчётную область при расчётах

	Экспериментальные значения в начале пластины		Значения, задаваемые на входе в расчётную область	
	Tu, %	$v_t/v$	Tu, %	$v_t/v$
ТЗА	3.3	12.4	7.25	14.025
ТЗА-	0.87	8.72	1	8.93
ТЗВ	6.2	86.7	76.59	129.63

#### 4.2. Влияние расчетной сетки.

Исследование влияния расчетной сетки проводилось с использованием модели SST  $\gamma$ - $Re_\theta$ , так как она является в этом плане наиболее требовательной.

Пример результатов такого исследования для режимов ТЗА и ТЗА- приведен на рисунках 2 и 3. Последовательным измельчением сетки grid1 размером 121x62 ячеек (рис. 2) во всех направлениях были получены сетки с размерами 239x146 (grid 2), 305x146 (grid 3), 324x146 (grid 4). Результаты расчетов (рис. 3) свидетельствуют о том, что дальнейшее измельчение сетки grid 3 не меняет решение. Именно на этой сетке проводились расчеты вариантов ТЗА и ТЗА-.

Аналогичная серия расчетов для случая ТЗВ показала, что в этом случае необходимо более мелкая сетка. Характеристики использовавшихся в дальнейших расчетах сеток приведены в таблице 3.

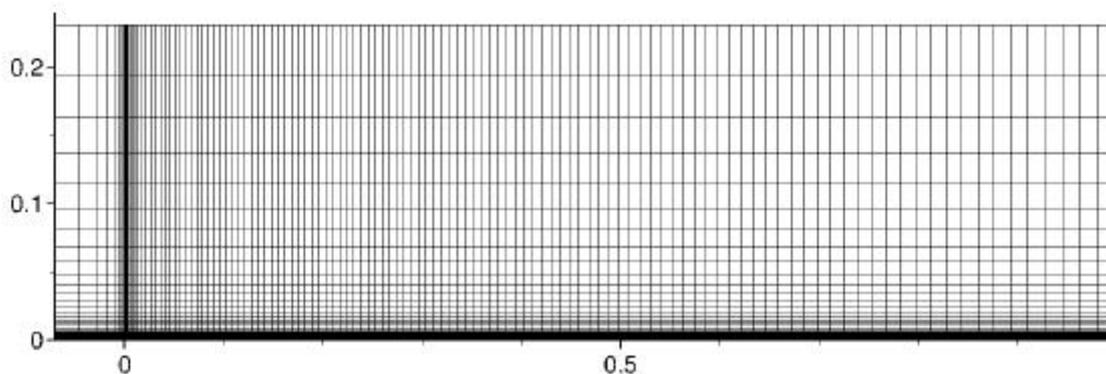


Рис. 2. Расчётная сетка grid1 для случаев ТЗА и ТЗА-.

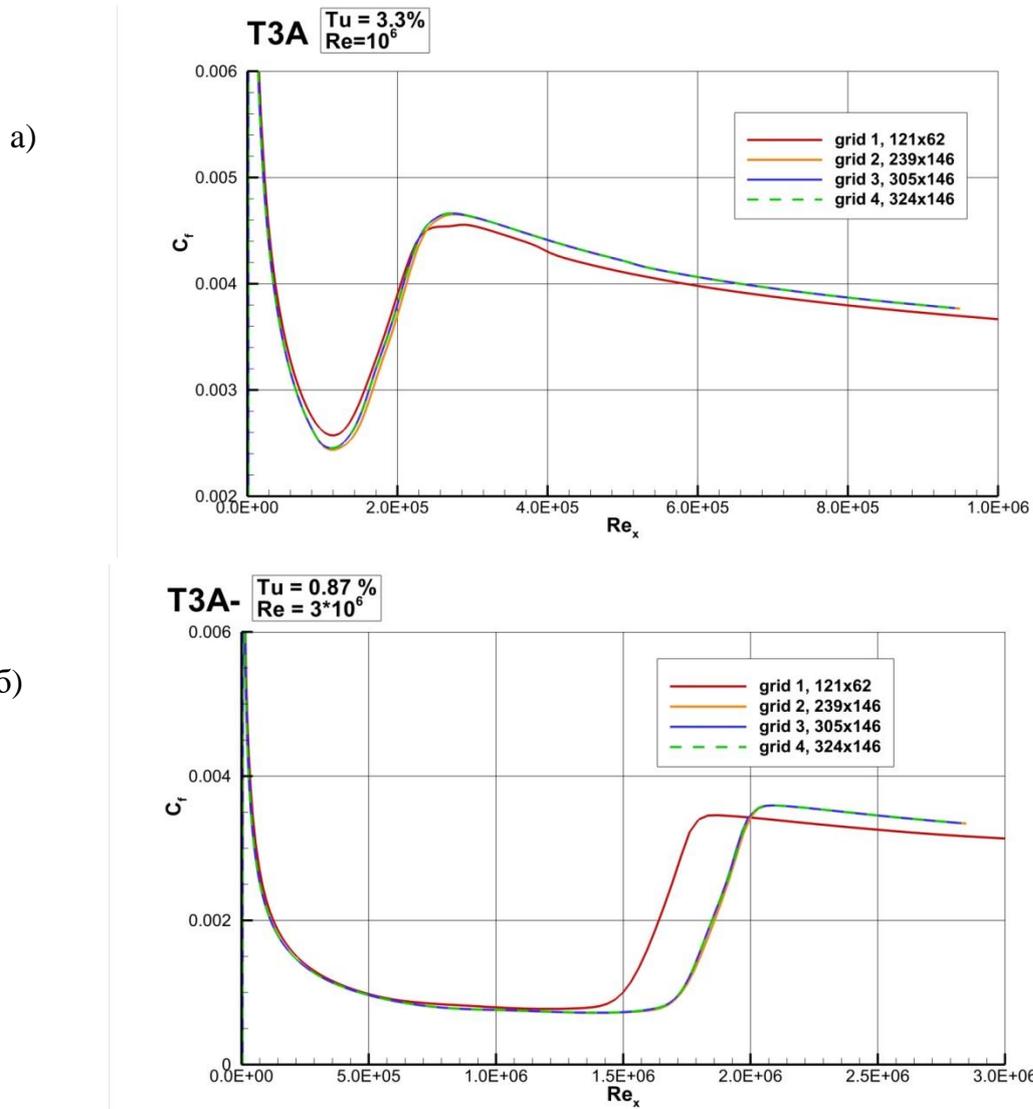


Рис. 3. Зависимость полученного решения от расчётной сетки для режимов а)ТЗА, б) ТЗА-

Таблица 3. Параметры выбранных сеток для расчёта турбулентного пограничного слоя

	Размер сетки	Количество ячеек перед началом пластины	Коэффициент сгущения к передней кромке	Коэффициент сгущения к стенке	Максимальная безразмерная высота центра первой пристенной ячейки, $y^+$
ТЗА- и ТЗА	305x146	51	1.02	1.06	0.36 и 0.14
ТЗВ	324x192	71	1.01	1.06	0.18

### 4.3. Верификация реализации моделей перехода.

Выбранные для тестирования модели сложно устроены и содержат большое количество выражений и формул и, соответственно, мест для потенциальных ошибок при имплементации. Перед тем как приступить к основным расчётам, необходимо было убедиться в отсутствии ошибок в расчетном коде. Была проедена серия различных проверок и тестов, однако и это не дает стопроцентной гарантии правильной имплементации моделей.

Одним из способов верификации моделей является сравнение результатов расчетов различных кодов. Так SST  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  модель доступна в ANSYS CFX и ANSYS Fluent, а так же в академическом коде SINF[41], а SST  $\gamma$  – в ANSYS Fluent. Это обстоятельство позволило провести сравнение результатов расчетов выбранных задач в различных кодах. Расчёты во всех программах производились на выбранных в предыдущем пункте сетках.

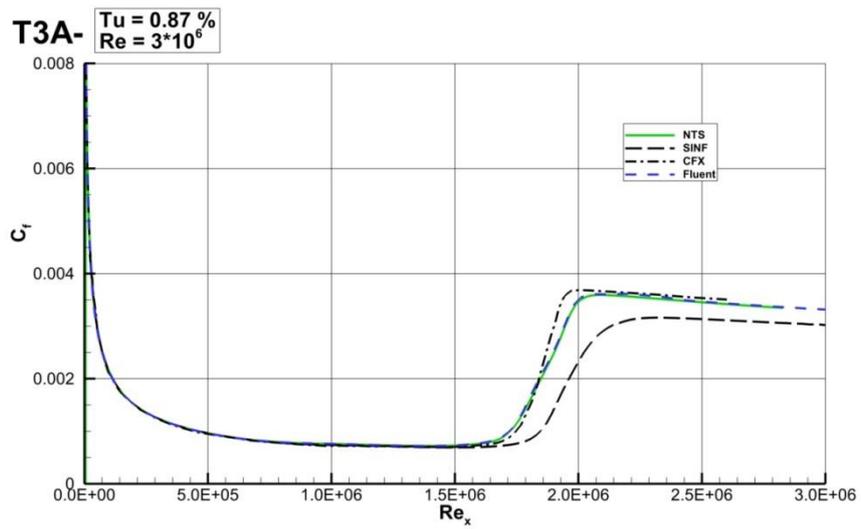
Все коды предсказали примерно одинаковое положение точки перехода, однако неприятным сюрпризом оказалось то, что распределения коэффициента трения, полученные с использованием различных кодов, оказались не идентичными (см. рис. 4 и 5). Для модели SST  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  (рис. 4) полностью совпали только результаты NTS и Fluent для режимов ТЗА и ТЗА-, но в режиме ТЗВ решения, полученные с использованием этих кодов, различаются. Аналогичная ситуация наблюдается и в случае модели SST  $\gamma$  (рис. 5), для которой совпадение результатов NTS и Fluent наблюдается только для режима ТЗА.

Причины наблюдаемого различия неясны и разобраться в них невозможно, поскольку для этого необходим доступ к исходным текстам всех программ. Наиболее вероятной из них (исключая ошибки имплементации) является влияние ограничителей для переменных, различным образом реализованных в разных кодах. Косвенным подтверждением этого факта является то, что в программах ANSYS Fluent и ANSYS CFX для режима ТЗВ значения параметров турбулентности в сечении, соответствующем началу пластины (табл. 4), отличаются от аналитического решения, полученного по формулам (10) и (11). Иными словами, решаемые уравнения в этой области отличаются от уравнений модели (приложение 1), в то время как для других режимов такое отличие не наблюдается. Возможно, в этих кодах срабатывают ограничители, проявляющие себя только при высоких значениях турбулентной вязкости или кинетической энергии турбулентности.

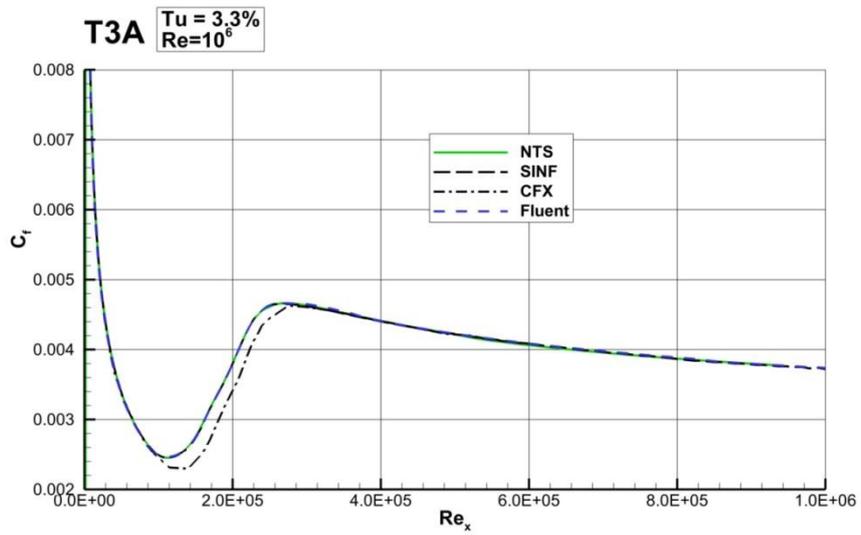
Таблица 4. Значения уровня турбулентности и турбулентной вязкости в районе передней кромки пластины в режиме ТЗВ, полученные по формулам (9) и (10), а так же рассчитанные при помощи ANSYS Fluent и ANSYS CFX

	Tu	$\nu_t/\nu$
Аналитическое решение	6.2	86.7
Fluent	5.81	76.2
CFX	6.02	118

a)



б)



в)

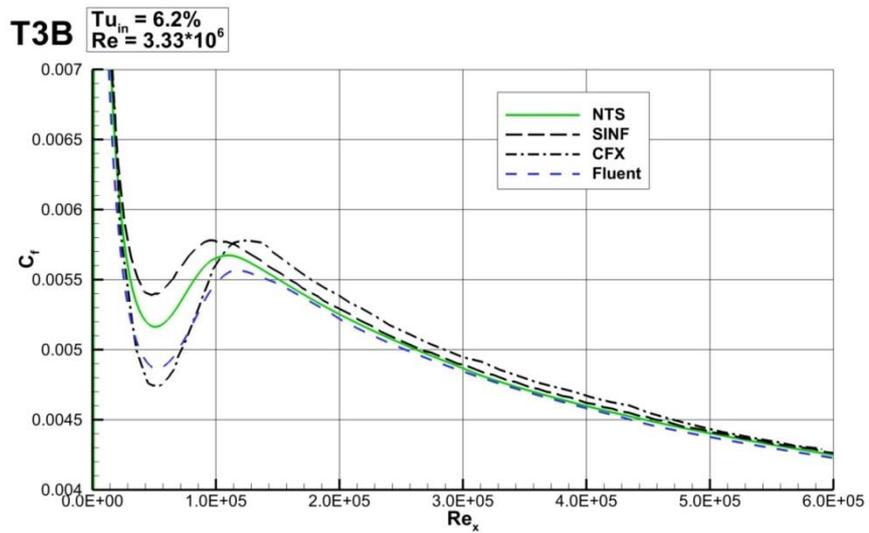


Рис. 4. Верификация имплементации модели SST  $\gamma$ - $Re_{\theta}$ , режимы Т3А- (а), Т3А (б), Т3В (в)

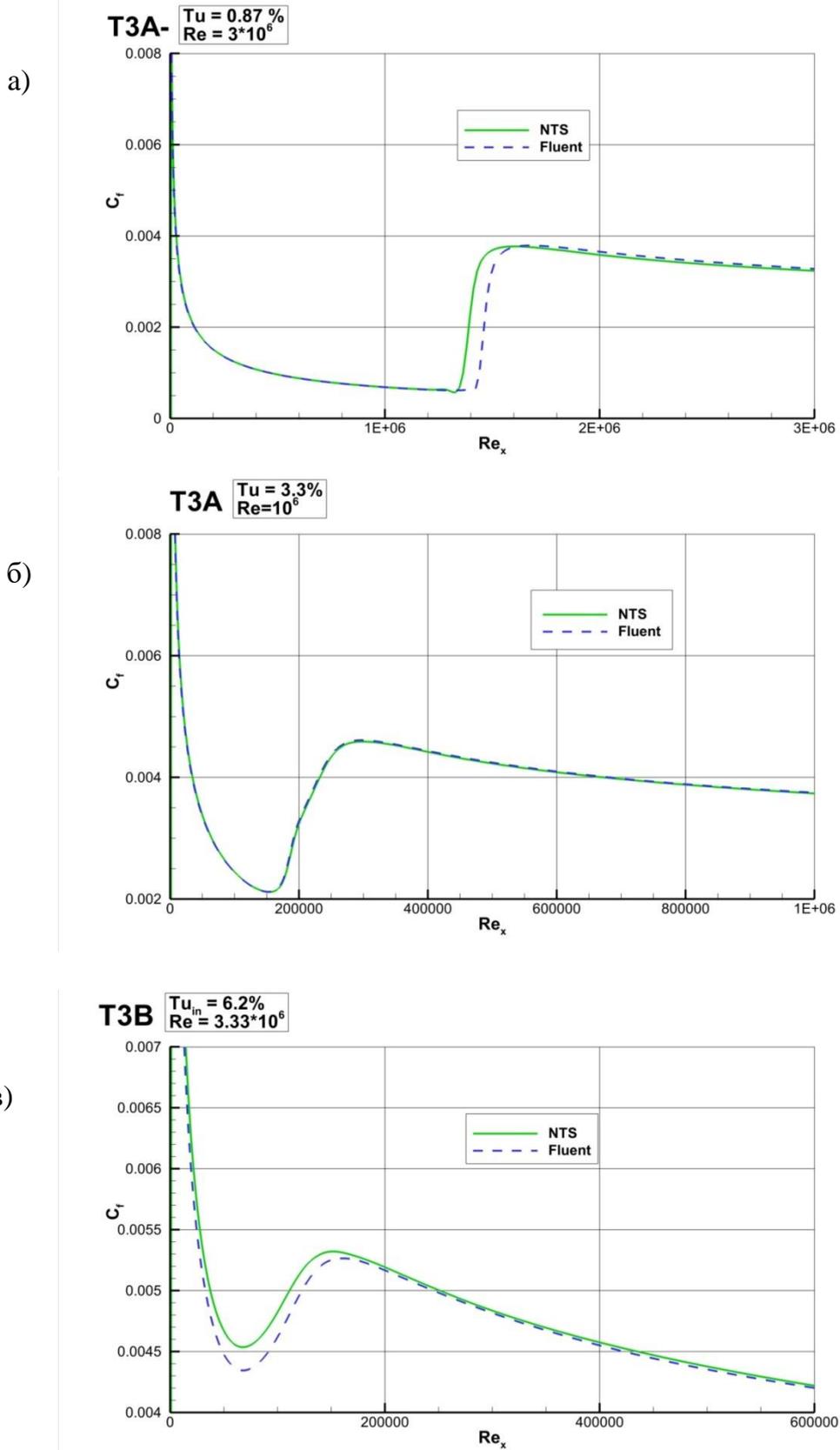


Рис. 5. Верификация имплементации модели SST  $\gamma$ , режимы Т3А- (а), Т3А (б), Т3В (в)

#### 4.4. Постановка граничных условий для моделей перехода на основе SA

Значения турбулентной вязкости на входе для моделей SST были получены на основе экспериментальных данных и приведены в таблице 2. При расчётах моделью SA турбулентность не диссипирует вниз по потоку и значение турбулентной вязкости в свободном бездвиговом течении остаётся постоянным. Таким образом, для расчётов при помощи моделей SA  $\gamma$  и SA  $e^N$  необходимо знать уровень турбулентности  $Ti$  (он используется в моделях перехода) и значение турбулентной вязкости на входе в расчётную область. Следует отметить, что если уровень турбулентности является физической характеристикой потока (обычно он известен из условий эксперимента), то значение турбулентной вязкости в однородном набегающем потоке лишено физического смысла.

Было рассмотрено два варианта задания значения турбулентной вязкости во внешнем потоке:

- Соответствует значению, задаваемому в модели SST (таблица 2)
- Низкий уровень ( $\nu_t/\nu=0.05$ ). Этот подход рекомендован в работе [38], посвященной созданию модели SA  $\gamma$ .

На рисунке 6 приведено сравнение полученных коэффициентов трения и соответствующих экспериментальных данных. При высоком уровне вязкости модель SA  $e^N$  во всех случаях, а модель SA  $\gamma$  в случае ТЗВ предсказывают полностью турбулентное решение. Кроме того, при высоком уровне входного значения турбулентной вязкости искажается решение на ламинарном участке. В целом, задание низкого уровня турбулентной вязкости на входной границе обеспечивает более хорошее совпадение с экспериментальными данными, и такой подход кажется более обоснованным. Именно эти результаты использованы для сравнительного анализа моделей перехода в следующем разделе

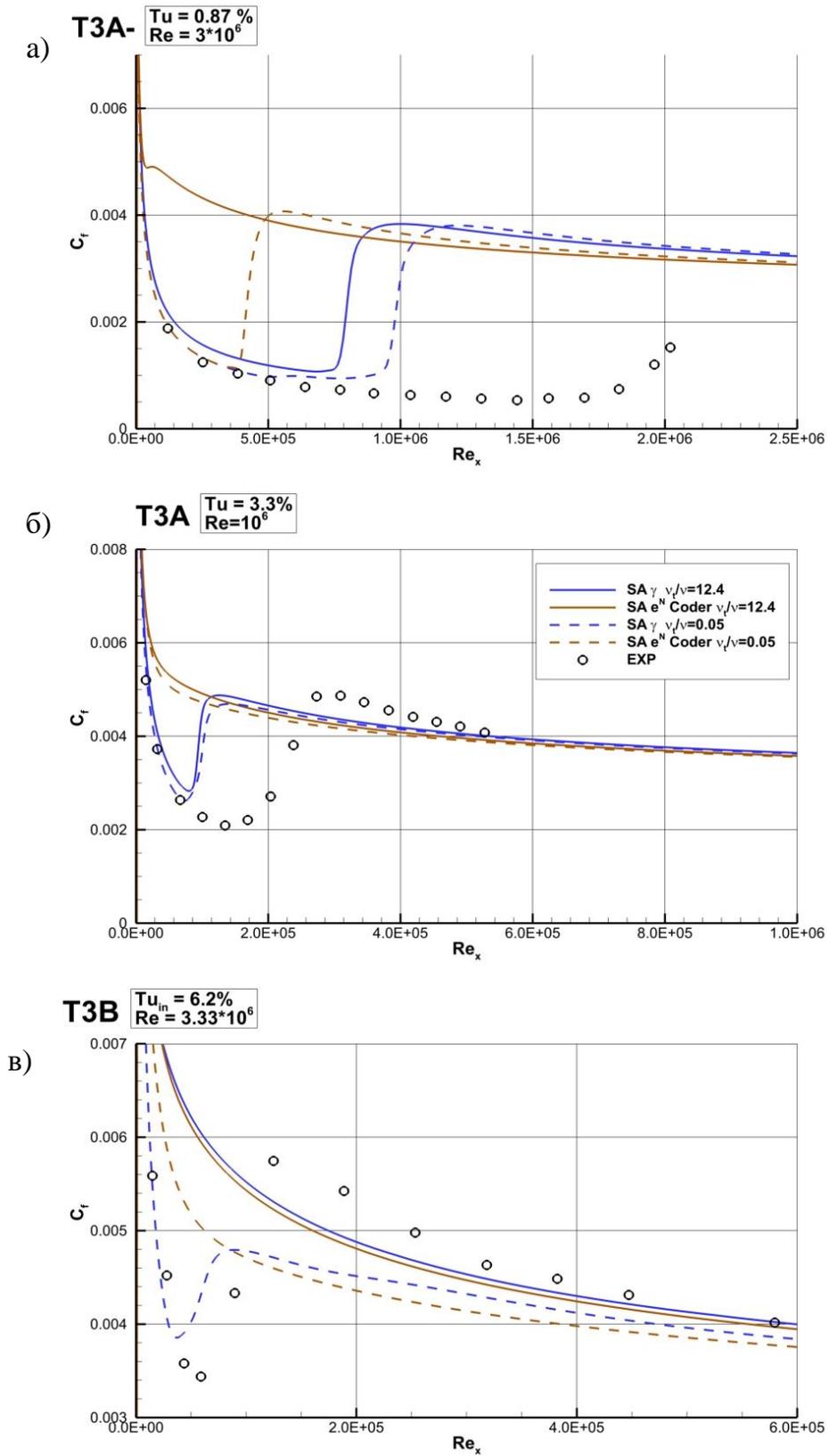


Рис. 6. Влияние граничного условия на решение при помощи моделей SA, режимы Т3А- (а), Т3А (б), Т3В (в)

## 4.5. Влияние степени турбулентности на положение и характер перехода

Сравнения распределений коэффициентов трения, полученных при помощи всех моделей с экспериментальными значениями, представлены на рисунке 7. В первую очередь обращает на себя внимание огромное различие в положении точки перехода, предсказываемое разными моделями. Это различие существенно превышает различие между реализациями одной и той же модели в разных кодах, представленное в разделе 4.3.

Наиболее хорошее согласование с экспериментом в положении точки перехода при различных уровнях турбулентности получено с использованием моделей SST  $\gamma$ - $Re_\theta$  и SST  $\gamma$ . Данный факт не удивителен, т.к. в этих моделях используются эмпирические корреляции, зависящие от уровня турбулентности. Кроме того, настройка констант моделей производилась с использованием экспериментов Роллс-Ройс [44], используемых в настоящей работе. Для режимов ТЗА и ТЗВ модель SST  $\gamma$  несколько лучше предсказывает положение перехода. В случае с самым низким уровнем турбулентности (режим ТЗА-) обе модели предсказывают более ранний переход, чем в эксперименте, причем SST  $\gamma$  делает это значительно раньше, чем SST  $\gamma$ - $Re_\theta$ . Видимо, упрощения, используемые в SST  $\gamma$ , наиболее сильно снижают точность в случаях с низким уровнем турбулентности.

Модель SA  $\gamma$  во всех случаях предсказывает слишком ранний переход, что может объясняться одной из нижеперечисленных причин.

1. Поскольку модели  $\gamma$  и  $\gamma$ - $Re_\theta$  изначально разрабатывались для модели SST, они настроены на падение энергии турбулентности и турбулентной вязкости в свободном бездвиговом потоке, которое не наблюдается в модели SA. Таким образом, в модели SA  $\gamma$  используется уровень турбулентности набегающего потока, в то время как в моделях на базе SST используется локальный (более низкий) уровень турбулентности.

2. Неточность формул (8) и (9), используемых для оценки  $k$  и  $\omega$  может приводить к существенным ошибкам.

3. Причиной более раннего перехода могут служить особенности модели SA.

Наконец, модель SA  $e^N$  предсказывает переход слишком рано в режиме ТЗА- (рисунок 7а), а в случаях ТЗА (рисунок 7б) и ТЗВ (рисунок 7в) модель SA  $e^N$  и вовсе даёт полностью турбулентное решение, поскольку критическое значение параметра  $N$  равно нулю при настолько высоких степенях турбулентности набегающего потока. Причина такого поведения состоит в том, что метод  $e^N$ , на котором основана эта модель, предназначен для описания естественного перехода, а попытка ее обобщения на байпасный переход [11] практически не эффективна.

Следует также отметить, что при режимах ТЗА и ТЗВ все модели несколько занижают трение в турбулентной области сразу после перехода. Это явление, по всей видимости, связано погрешностью моделей турбулентностями SST и SA при расчете пограничных слоев с низкими числами Рейнольдса. Эта проблема хорошо известна [46] и характерна для большинства полуэмпирических моделей.

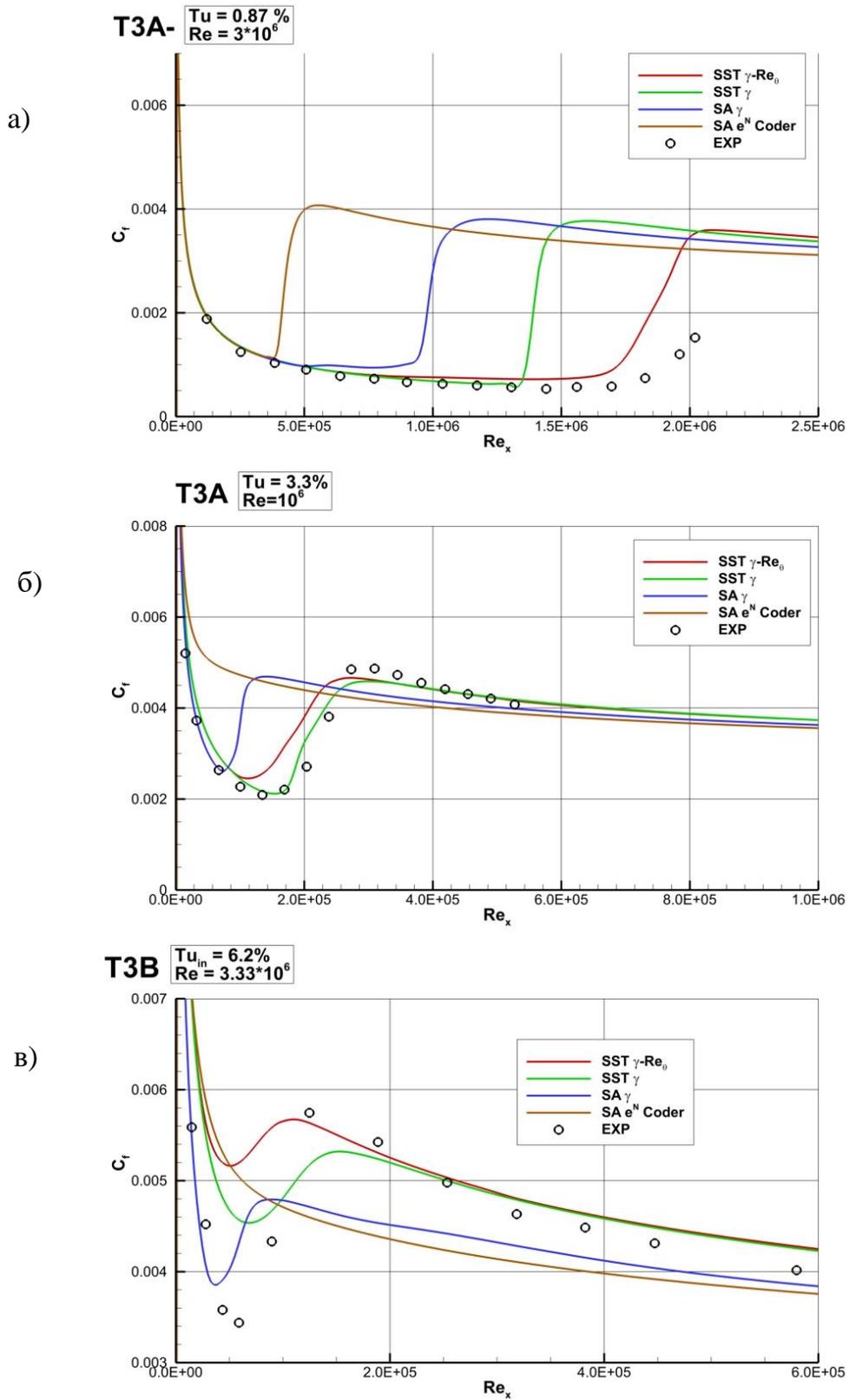


Рис. 7. Распределения коэффициентов трения, полученные при помощи всех четырёх моделей и экспериментальные значения. Режимы Т3А-(а), Т3А(б), Т3В(в)

## 5. Обтекание крылового профиля NACA0021

Для сравнительного анализа моделей было выбрано обтекание симметричного профиля NACA0021 (рис. 8) относительной толщиной 21% при числе Рейнольдса, построенном по скорости набегающего потока и хорде, равном  $2.7 \cdot 10^5$ . Выбор этого профиля обусловлен тем, что в экспериментальной работе [47] этот профиль обтекался при различных параметрах турбулентности набегающего потока.

Схема эксперимента представлена на рисунке 9. Модель крыла находилась вниз по потоку от конфузора, выше которого в точках А, В, С, D и Е устанавливались турбулизирующие решетки (а), (b) и (c) разного размера. В настоящей работе для тестирования моделей перехода выбраны три режима, которые характеризуются различными уровнями турбулентности набегающего потока (таблица 5).

Основная серия расчётов при углах атаки от 0 до  $30^\circ$  для всех рассматриваемых моделей перехода была проведена для варианта 1 с наименьшим уровнем турбулентности набегающего потока. Исследования влияния уровня турбулентности набегающего потока (варианты 2 и 3) проводилось только для угла атаки  $15^\circ$ .

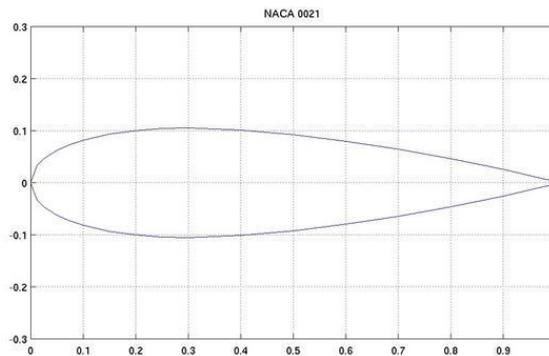


Рис. 8. Профиль NACA0021

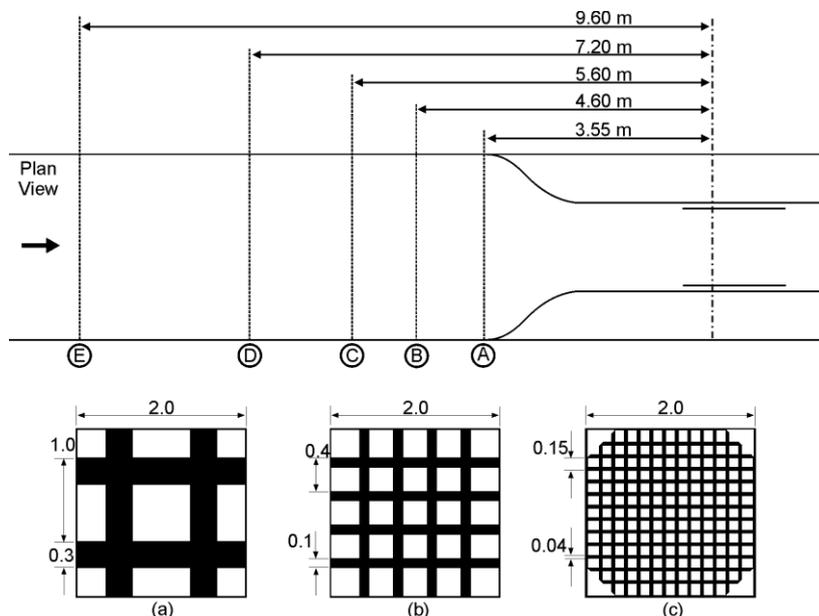


Рис. 9. Схема эксперимента

Таблица 5. Используемые в расчётах экспериментальные постановки

Вариант расчёта	Решетка	Линейный размер ячейки решетки, м	Положение решетки вверх по потоку от передней кромки крыла, м	Уровень турбулентности по продольным пульсациям, $I_u$ %	Относительный линейный масштаб вихрей в окрестности передней кромки, L/c
1	-	-	-	0.6	-
2	мелкая решетка (с)	0.04	A(3.55)	3	0.3
3	средняя решетка (b)	0.1	A(3.55)	6	0.5

## 5.1. Постановка задачи

Для расчётов использовалась структурированная С-сетка размером 593x200 ячеек, использовавшаяся при расчётах с моделями перехода в работе [2], где уже было проведено исследование сеточной сходимости. Размер расчетной области составлял 40С x 40С, где С - длина хорды крыла. На входе в расчётную область задавался однородный профиль скорости, на выходе – постоянное давление, а на поверхности профиля – условие прилипания. Описание задания турбулентных характеристик для моделей SST и SA представлено ниже.

### 5.1.1. Постановка граничных условий на входе для моделей SST

Значение кинетической энергии на передней кромке профиля для модели SST вычислялось на основе уровня турбулентности по формуле  $k_{in} = \frac{3}{2}(T_u \cdot U_0 / 100)^2$ . Для варианта 1 с наименьшим уровнем турбулентности значение удельной диссипации вычислялось по формуле  $\omega = 10.0 \cdot U_\infty / C$ , предложенной Ментером [30] для задач внешней аэродинамики. Для вариантов 2 и 3 значение удельной диссипации определялось по формуле Колмогорова на основе кинетической энергии турбулентности и линейного масштаба в набегающем потоке, определяемого размером решетки (см. табл. 5).

Эти значения, однако, нельзя задавать на внешней границе расчётной области, поскольку в силу диссипации турбулентности они значительно меняются к передней кромке профиля. Для решения этой проблемы при  $x < -2C$  турбулентные характеристики удерживались равными входным значениям, которые в свою очередь, диссипировали до необходимых значений у начальной кромки (см. табл. 5).

Таблица 5. Значения величин на входе в расчётную область при расчётах моделью SST

Режим	Tu, %	X=0			X=-2C		
		k/U <sub>0</sub> <sup>2</sup>	$\omega$ c/U <sub>0</sub>	$\nu_t/\nu$	k/U <sub>0</sub> <sup>2</sup>	$\omega$ c/U <sub>0</sub>	$\nu_t/\nu$
1	0.006	0.000049	3.57	3.67	0.00015	10	4
2	0.03	0.0012	2.5	136	0.0026	4.8	143
3	0.06	0.005	2.87	454	0.012	6.86	485

### 5.1.2. Постановка граничных условий на входе для моделей SA

В данной задаче, как и в предыдущей, было исследовано влияние входного значения турбулентной вязкости на решение при помощи моделей SA.

Для того, чтобы выбрать наиболее подходящие граничные условия, было проведено исследование чувствительности полученного решения к уровню турбулентной вязкости набегающего потока. Расчеты были проведены с использованием моделей SA  $e^N$  и SA  $\gamma$  при угле атаки  $15^\circ$  и трех уровнях турбулентности 0.6%, 3% и 6%. При самом низком уровне турбулентности рассматривается целый спектр значений турбулентной вязкости, а при более высоких – только низкое и высокое значения для качественного сравнения.

На рисунке 10 приведены распределения коэффициента трения, полученные при расчётах с низким уровнем турбулентности по модели SA  $e^N$ . Видно, что при малых значениях турбулентной вязкости на входе ( $v_t/v=10^{-3}\div 1.0$ ) решения практически совпадают. При увеличении уровня вязкости набегающего потока решение начинает сильно меняться, при  $v_t=4v$  появляется переход на нижней поверхности, при дальнейшем ее увеличении отрывной переход на верхней поверхности заменяется байпасным.

Зависимость коэффициентов сопротивления и подъемной силы от уровня турбулентной вязкости (рис.11) в набегающем потоке свидетельствует о том, что при низких значениях турбулентной вязкости решение при помощи модели SA  $e^N$  практически не зависит от этой величины, в то время как при высоких значениях зависимость очень сильная. Наконец, расчёты при низком уровне турбулентной вязкости обеспечивают лучшее совпадение с экспериментом в широком диапазоне углов атаки (рис. 12).

Коэффициенты подъёмной силы и сопротивления, полученные при помощи SA  $\gamma$ , слабо зависят от входного условия при всех значениях турбулентной вязкости на входе. Однако в этом случае само решение при низких уровнях турбулентной вязкости продолжает существенно изменяться (рис. 13). Видно, что чем ниже этот уровень, тем продолжительней ламинарный отрывной пузырь на верхней поверхности профиля. Этот факт, безусловно, следует отнести к недостаткам модели SA  $\gamma$ .

Расчеты, проведенные при более высоких уровнях турбулентности 3% и 6% (рис. 14 и 15) свидетельствуют о том, что высокое, соответствующее экспериментальным масштабам турбулентности, значение вязкости приводит практически к полностью турбулентному решению. Поэтому для сравнения с результатами других моделей было использовано решение, полученное при низком уровне турбулентной вязкости в набегающем потоке  $v_t/v=0.05$ .

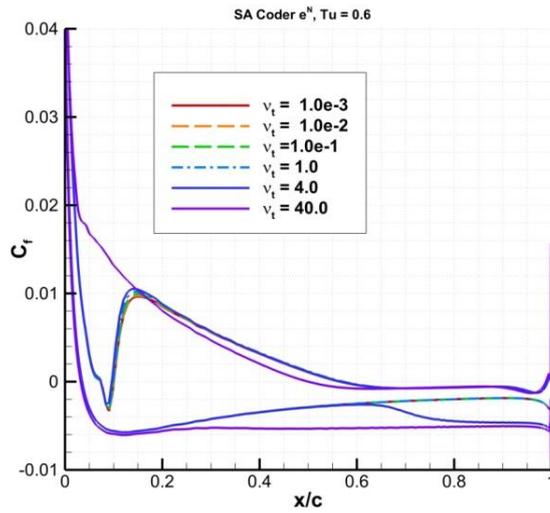


Рис. 10. Распределения коэффициента трения для профиля NACA0021 при угле атаки 15°, предсказываемого моделью SA e<sup>N</sup>, для разных уровней турбулентной вязкости на входной границе

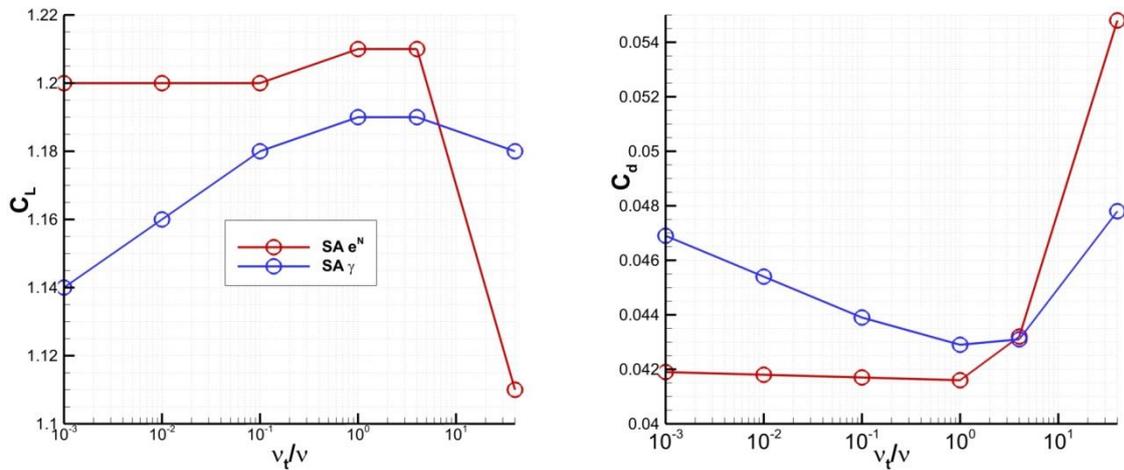


Рис.11. Зависимость  $C_L$  и  $C_d$  от значения входной турбулентной вязкости, рассчитанная моделями переход на основе SA для профиля NACA0021 при угле атаки 15°

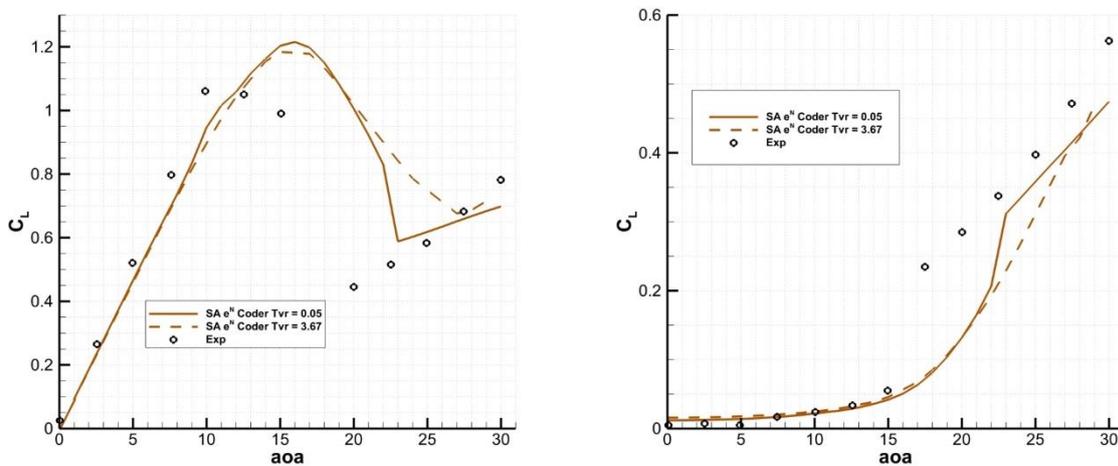


Рис. 12. Зависимость распределения коэффициентов сопротивления и подъемной силы для профиля NACA0021 от значения входной турбулентной вязкости, полученные при помощи моделей перехода на основе SA

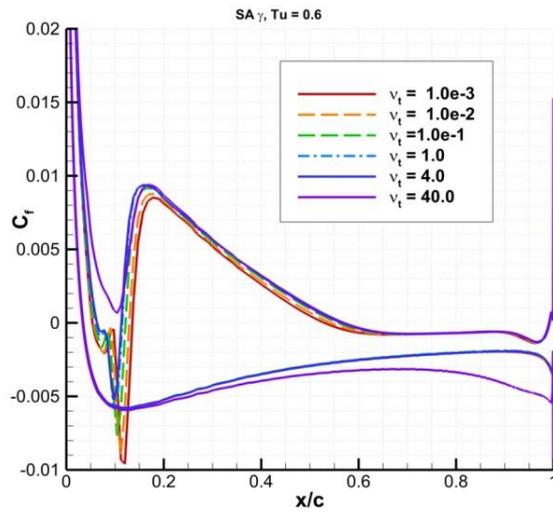


Рис. 13. Распределения коэффициента трения для разных уровней турбулентной вязкости на входе, модель SA  $\gamma$

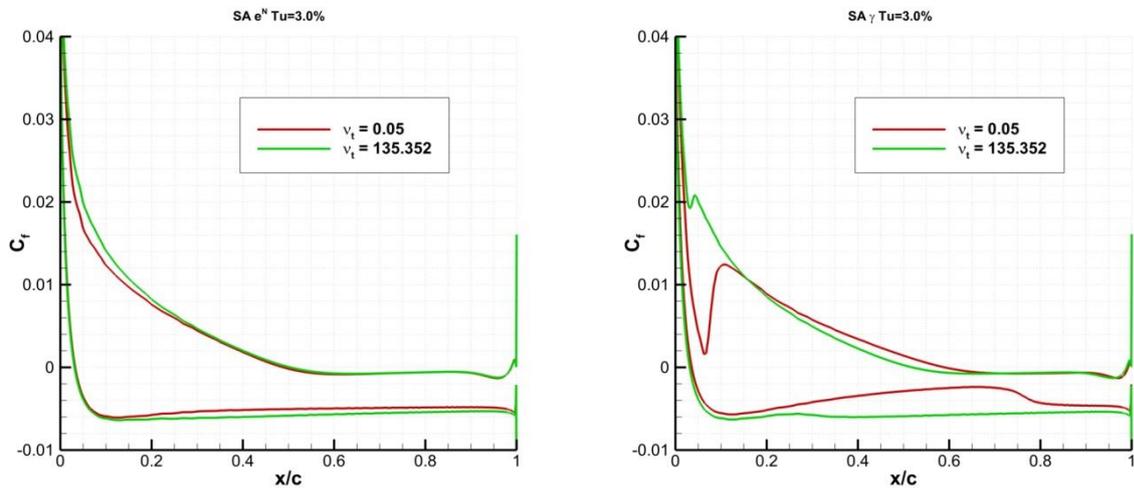


Рис. 14. Распределения коэффициента трения для разных уровней турбулентной вязкости на входе для моделей SA  $e^N$  и SA  $\gamma$  при уровне турбулентности набегающего потока 3%

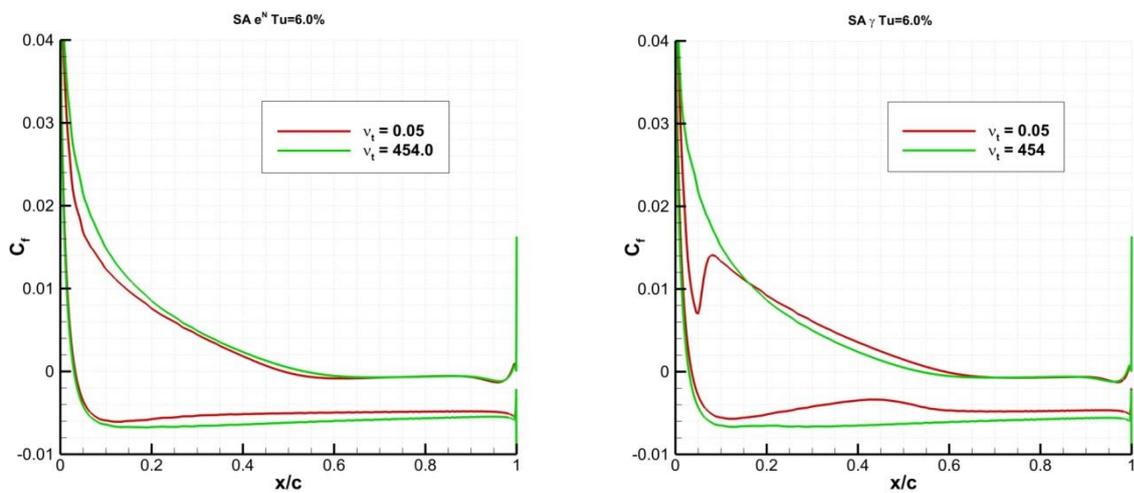


Рис. 15. Распределения коэффициента трения для разных уровней турбулентной вязкости на входе для моделей SA  $e^N$  и SA  $\gamma$  при уровне турбулентности набегающего потока 6%

## 5.2. Расчёты при низком уровне турбулентности

При низком уровне турбулентности были проведены расчёты для углов атаки от 0 до 30° при помощи всех моделей. Также были получены зависимости коэффициента трения и подъёмной силы от угла атаки при помощи кода XFOIL и модели перехода Drela e<sup>N</sup>.

На рисунке 16 изображены зависимости коэффициента подъёмной силы  $C_L$  и коэффициента сопротивления  $C_d$ . Результаты, полученные при помощи моделей SST  $\gamma$ -Re $\theta$  и SST  $\gamma$  схожи, и обеспечивают заметно более хорошее совпадение с экспериментальными данными, чем модели на основе SA. При этом модель SST  $\gamma$  предсказывает несколько более ранний переход к полностью отрывному течению, когда отрыв потока от передней кромки профиля приводит к сильному падению коэффициента трения.

Обе модели на SA предсказывают близкие решения, которых массиванный отрыв от верхней поверхности наблюдается при более высоких значениях угла атаки, чем в эксперименте. Это приводит к сильному (на 15-20%) завышению максимального коэффициента подъёмной силы. Следует отметить, что хорошее согласование с экспериментом, наблюдаемое в углах атаки 22-30°, является, по всей видимости, случайным и связано с компенсацией ошибок.

Результаты расчетов по модели SA e<sup>N</sup> хорошо совпадают с результатами интегрального метода Drela при малых (до 12°) углах атаки, пока отсутствует массиванный отрыв от верхней поверхности профиля. С одной стороны, это свидетельствует о хорошем совпадении результатов дифференциального метода e<sup>N</sup> с его оригинальной версией. С другой стороны, это свидетельствует о высокой точности интегральных методов при расчете безотрывного или почти безотрывного обтекания крыловых профилей.

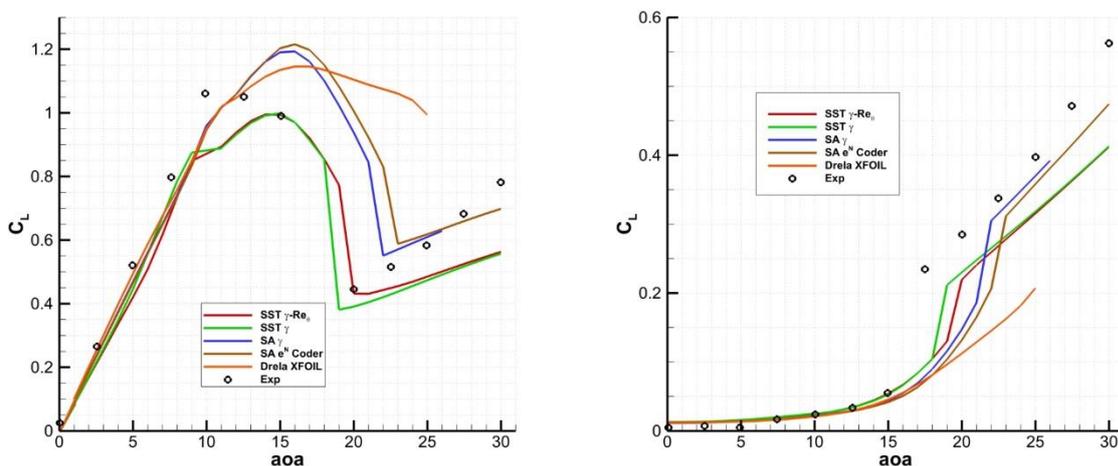


Рис. 16. Сравнение распределения коэффициентов сопротивления и подъемной силы для профиля NACA0021, полученные при помощи всех рассматриваемых моделей, с экспериментальными данными и методом Drela

На рисунке 17 представлены схемы течения вдоль верхней поверхности крылового профиля, полученные при помощи разных моделей. На графике по оси абсцисс отложен угол атаки, а по оси ординат положение вдоль хорды профиля. На графике для каждого угла атаки отмечены точки отрыва ламинарного (верхняя линия) и присоединения турбулентного

(средняя линия) потока, а также положение начала турбулентного отрыва (нижние линии). Эти линии разделяют основные области течения, а именно присоединённый ламинарный пограничный слой, отрывной ламинарный пузырь, присоединённый турбулентный пограничный слой и зону массивного отрыва.

В зависимости от угла атаки можно выделить два режима обтекания. При небольших углах атаки (меньше 18-23 градусов в зависимости от модели) имеет место отрывной сценарий перехода к турбулентному решению, т.е. ламинарный пограничный слой отрывается из-за неблагоприятного градиента давления, турбулизуется в свободном сдвиговом течении и затем сразу присоединяется. Затем некоторое расстояние течение является турбулентным и присоединённым, пока не происходит отрыв уже турбулентного пограничного слоя без дальнейшего присоединения. Стоит отметить, что положение отрыва турбулентного пограничного слоя зависит в большей степени не от описания перехода, а от модели турбулентности, лежащей в основе. Видно, что отрыв с использованием SST происходит несколько раньше, чем с моделью SA. При увеличении угла атаки отрыв потока происходит практически сразу от передней кромки крылового профиля.

Стоит также отметить, что в эксперименте при обтекании данного профиля наблюдался гистерезис: при увеличении и уменьшении угла атаки, значение этого максимального угла было разным. При уменьшении угла массивный отрыв наблюдался, начиная примерно с 13° градусов, а при увеличении – примерно с 20°, в зависимости от уровня турбулентности набегающего потока. В данной работе исследование на наличие гистерезиса не проводилось.

Интересно, что положение ламинарного отрыва зависит от используемой модели. Это связано с тем, что градиент давления в окрестности отрыва зависит от скорости перехода к турбулентности в оторвавшемся слое. Так, чем раньше происходит присоединение турбулизовавшегося слоя, тем позднее происходит отрыв.

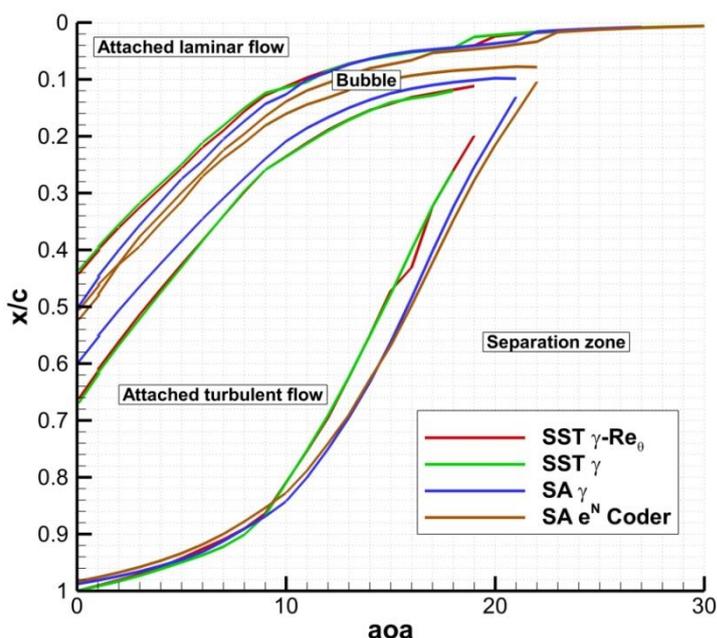


Рис. 17. Схема течений

### 5.3. Исследование влияния уровня турбулентности набегающего потока

В данном разделе сравниваются решения, полученные при всех режимах турбулентности набегающего потока (таблица 5) только для одного угла атаки, равного  $15^\circ$ . Решение при этом угле атаки крайне чувствительно к точности моделирования турбулентности, поэтому этот режим наилучшим образом подходит для тестирования моделей перехода.

На рисунке 18 представлены результаты расчета для режима с низким уровнем турбулентности набегающего потока (режим 1 в таблице 5). Видно, что все модели предсказывают примерно одинаковое положение отрывного перехода на верхней поверхности, однако длина отрывного пузыря для моделей SST  $\gamma$ - $Re_\theta$ , SST  $\gamma$  и SA  $\gamma$  гораздо больше, чем для модели SA  $e^N$ . На нижней поверхности пограничный слой остается ламинарным. Таким образом, различие в результатах расчетов обусловлено скорее базовой моделью (SA или SST), а не описанием ламинарно-турбулентного перехода. Хотя ни одна из моделей не способна точно предсказать поведение коэффициента давления в области перехода, результаты моделей на базе SST несколько лучше согласуются с экспериментом, чем результаты на основе SA, что согласуется с хорошим совпадением с экспериментальными данными в окрестности угла атаки  $15^\circ$  в распределении коэффициента подъёмной силы (рисунок 15)

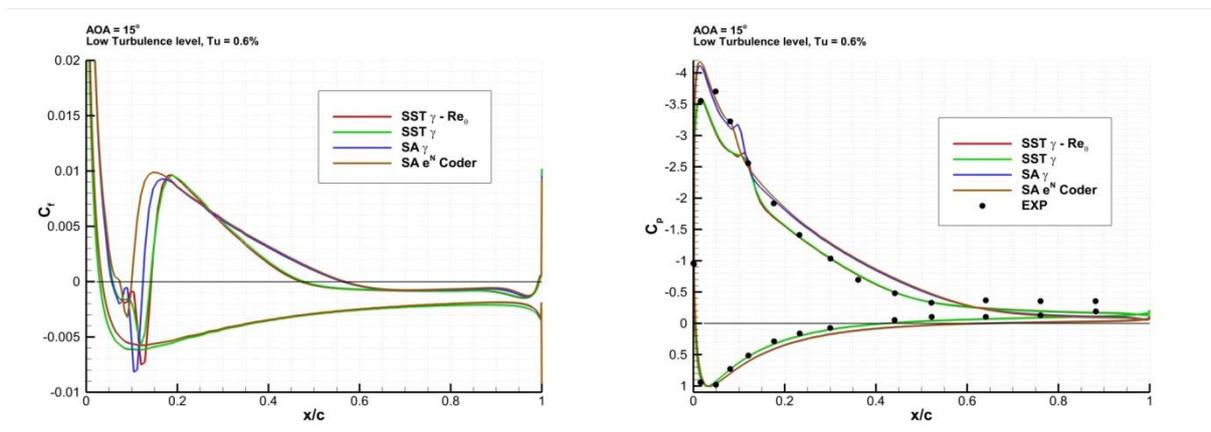


Рис. 18. Распределение коэффициентов трения и давления вдоль профиля для течения режима 1, полученное при помощи всех рассмотренных моделей

В случае средней интенсивности турбулентности  $Tu=3\%$  (режим 2) решения, полученные с использованием различных моделей, сильно отличаются. Так, решение модели SA  $e^N$  является полностью турбулентным (рис. 19), как на верхней, так и на нижней поверхности. Это подтверждает вывод, сделанный на основе расчета пограничных слоев, о непригодности этой модели для предсказания перехода при высоких уровнях турбулентности потока.

Остальные модели предсказывают ламинарное течение на нижней поверхности за исключением модели SA  $\gamma$ , которая предсказывает переход примерно на  $3/4$  профиля. Поведение моделей на верхней поверхности также сильно различается: в случае SST  $\gamma$  наблюдается отрывной режим перехода, а остальные две модели предсказывают несколько более ранний вынужденный переход на верхней кромке крыла.

Интересно, что распределение коэффициента давления на верхней поверхности по обоим моделям перехода на базе SST совпадает с полностью турбулентным решением модели Кодера. Видимо, это можно объяснить компенсацией ошибок: модель SA занижает этот коэффициент, а отсутствие перехода приводит к его завышению.

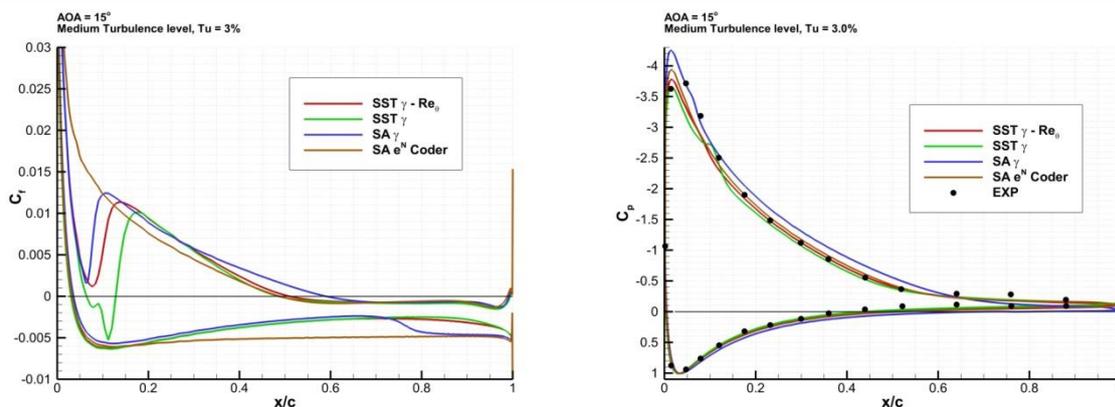


Рис. 19. Распределение коэффициентов трения и давления вдоль профиля для течения режима 2, полученное при помощи всех рассмотренных моделей

При высоком уровне турбулентности все модели предсказывают переход на нижней поверхности (рис. 20). Что касается верхней поверхности, поведение моделей сходно с поведением при среднем уровне: модель SA  $e^N$  предсказывает полностью турбулентное течение, отрывной переход наблюдается при использовании SST  $\gamma$ , а для остальных моделей он является вынужденным.

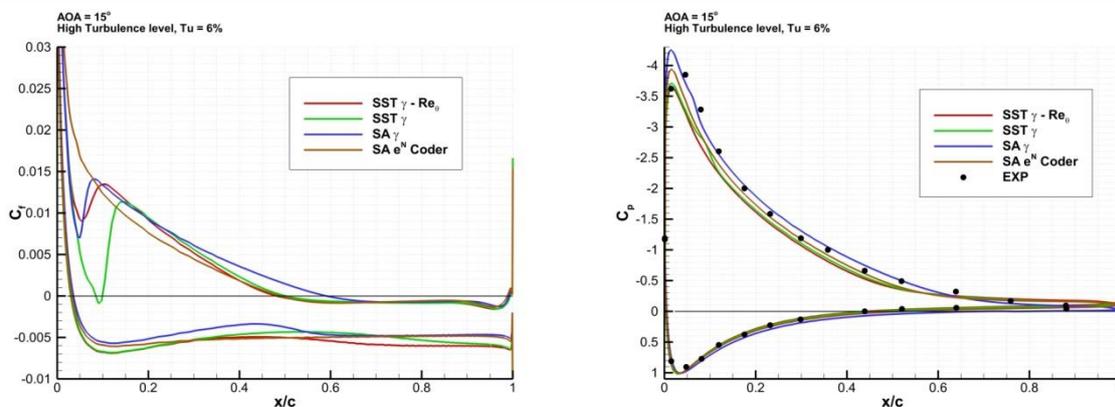


Рис. 20. Распределение коэффициентов трения и давления вдоль профиля для течения режима 3, полученное при помощи всех рассмотренных моделей

На рисунке 21 приведено сравнение зависимостей коэффициентов подъёмной силы и сопротивления от уровня турбулентности с экспериментальными значениями. В первую очередь следует отметить, что значения коэффициентов в основном определяются базовой моделью турбулентности, а не моделью перехода. Так, при низком уровне турбулентности результат с использованием моделей на основе SST, в то время погрешность результата моделей на основе SA составляет около 20%.

Из всех моделей, только SST  $\gamma$  предсказывает монотонный рост подъёмной силы при увеличении турбулентности, однако сами значения при высоких уровнях турбулентности

сильно отличаются от экспериментальных. Модели на основе SA предсказывают качественно неверную зависимость коэффициента подъёмной силы от уровня турбулентности (падение, а не рост).

Ни одна из моделей не способна предсказать большое значение коэффициента сопротивления при высоком уровне турбулентности ( $Tu = 6\%$ ), результаты расчетов отличаются от экспериментальных данных на 40-50%.

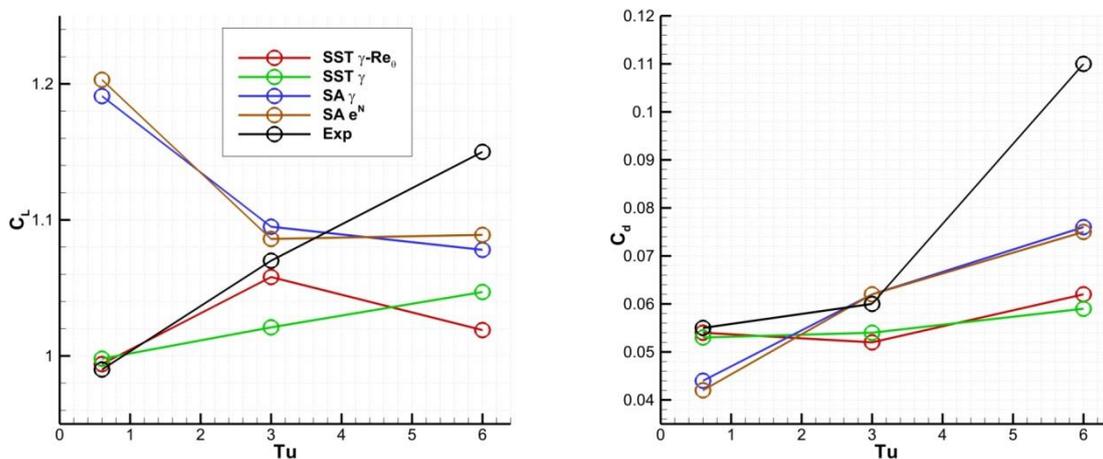


Рис. 21. Зависимость коэффициентов подъёмной силы и сопротивления от уровня турбулентности

## Заключение

По итогам работы можно сделать следующие выводы.

Во всех рассмотренных задачах и режимах результаты различных моделей перехода сильно различаются.

Ни одна из моделей не способна точно предсказать переход в широком диапазоне уровней турбулентности набегающего потока.

Лучшие результаты получены с использованием  $\gamma$  моделей перехода на основе модели SST, в то время как  $\gamma$  модель на основе SA существенно им уступает. К преимуществам моделей на основе SST следует также отнести уже накопленный большой опыт их использования.

Несмотря на поправку Mask [11], которая расширяет возможности модели  $e^N$  и позволяет ее использовать при высоком уровне турбулентности внешнего потока, модель SA  $e^N$  непригодна для описания байпасного перехода.

При использовании моделей на основе SA не до конца ясно, какие граничные условия для турбулентной вязкости следует использовать. Эта проблема требует исследования на более широком круге течений.

Немаловажными являются вычислительные свойства рассматриваемых моделей. Так, модели SST  $\gamma$ - $Re_\theta$  и SST  $\gamma$  выглядят более точными и универсальными, однако из-за своей сложности они часто приводят к вычислительным проблемам (плохая сходимость и большие вычислительные затраты). Сходимость и устойчивость моделей SA  $e^N$  и SA  $\gamma$  гораздо лучше, но точность их решения уступает точности моделей на основе SST.

## Список литературы

- [1] R. E. Mayle. 1991. *The Role of Laminar-Turbulent Transition in Gas Turbine Engines*. Journal of Turbomachinery, Vol. 113, No. 4, 1991, pp. 509–537.
- [2] А.А. Матюшенко, А.В. Гарбарук, Р.Е. Smirnov, F.R. Menter. 2015. *Численное исследование влияния ламинарно-турбулентного перехода на характеристики обтекания аэродинамических профилей*. Теплоновые процессы в технике. 2015. Т. 7. № 8. С. 338-343.
- [3] C.L. Rumsey, P.R. Spalart. 2008. *Turbulence Model Behavior in Low Reynolds Number Regions of Aerodynamic Flowfields*. 38th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. AIAA-2008-4403.
- [4] A. M. Savill. 1993. *Evaluating Turbulence Model Predictions of Transition*. An ERCOFTAC Special Interest Group Project Applied Scientific Research. 51: 555-562.
- [5] A. M. Savill. 2002. *By-pass transition using conventional closures*. Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows. pp. 464–492. Cambridge University Press.
- [6] A. M. O. Smith, N. Gamberoni. 1956. *Transition, Pressure Gradient and Stability Theory*. Technical Report ES-26388, Douglas Aircraft Company.
- [7] J. L. van Ingen. 1956. *A Suggested Semi-empirical Method for the Calculation of the Boundary Layer Transition Region*. Report, VTH-74.
- [8] G. B. Schubauer, H. K. Skramstadt. 1948. *Laminar Boundary Layer Oscillations and Transition on a Flat Plate*. Report NACA 909.
- [9] J. L. van Ingen. 2008. *The  $e^N$  method for transition prediction. Historical review of work at TU Delft*. 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit. AIAA 2008-3830.
- [10] J. L. van Ingen. 1975. *On the Calculation of Laminar Separation Bubbles in Two-dimensional Incompressible Flow*. AGARD CP168 Göttingen.
- [11] L. M. M. Mack. 1975. *Aerodynamic Analysis Requiring Advanced Computers*. Paper nr. 4. Technical Report SP-347, NASA.
- [12] M. Drela, M. B. Gilest. 1986. *Viscous-Inviscid Analysis of Transonic and Low Reynolds Number Airfoils*. AIAA JOURNAL VOL. 25, NO. 10 1347- 1354
- [13] M. Drela. 1989. *XFOIL: An Analysis and Design System for Low Reynolds Number Airfoils*
- [14] J.M. Coder, M. D. Maughmer. 2014 *Computational Fluid Dynamics Compatible Transition Modelling using an Amplification Factor Transport Equation*. AIAA J.
- [15] P. R. Spalart, S. R. Allmaras. 1992. *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. AIAA Paper 92-0439.
- [16] R. Mayle, A. Schultz. 1997. *The path to predicting bypass transition*. Journal of Turbomachinery 119, 405–411.
- [17] S. Lardeau, M. Leschziner, N. Li. 2004. *Modelling bypass transition with low-Reynolds-number nonlinear eddy-viscosity closure*. Flow, Turbulence and Combustion 73, 49–76
- [18] S. Dhawan, R. Narasimha. 1958. *Some properties of boundary layer during the transition from laminar to turbulent flow motion*. Journal of Fluid Mechanics 3, 418–436.
- [19] D.K. Walters, J.H. Leylek. 2004. *A New Model for Boundary-Layer Transition Using a Single-Point RANS Approach*. ASME J. of Turbomach. 126(1), 193–202.
- [20] D.K. Walters, D. Cokljat. 2008. *A Three-Equation Eddy-Viscosity Model for Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulations of Transitional Flows*. J. of Fluids Eng. 130.
- [21] D. Hall, J. Gibbings. 1972. *Influence of stream turbulence and pressure gradient on boundary-layer transition*. Journal of Mechanical Engineering Science 14, 134–146.
- [22] B.J. Abu-Ghannam, R. Shaw. 1980. *Natural Transition of Boundary Layers - The Effects of Turbulence, Pressure Gradient, and Flow History*. J. of Mech. Eng. Sci. 22(5), 213–228
- [23] K. Chen, N. Thyson. 1971. *Extension of Emmons' spot theory to flows on blunt bodies*. AIAA Journal 9, 821–825
- [24] P. Libby. 1974. *On the prediction of intermittent turbulent flows*. Journal of Fluid Mechanics 68, 273–295.
- [25] C. Dopazo. 1977. *On conditioned averages for intermittent turbulent flows*. Journal of Fluid Mechanics 81, 433–438.
- [26] S. Byggstoyl, W. Kollmann. 1981. *Closure model for intermittent turbulent flows*. Int. J. of Heat and Mass Transfer 24, 1811–1821.

- [27] J. Steelant, E. Dick. 1996. *Modelling of bypass transition with conditioned Navier-Stokes equations coupled to an intermittency transport equation*. International Journal of Numerical Methods in Fluids 23, 193–220.
- [28] Y. Suzen, P. Huang. 2000. *Modeling of flow transition using an intermittency transport equation*. Journal of Fluids Engineering 122, 273–284.
- [29] J. Cho, K. Chung. 1992. *A  $k$ - $\epsilon$ - $\gamma$  equation turbulence model*. Journal of Fluid Mechanics 237, 301–322.
- [30] F. R. Menter. 1993. *Zonal Two Equation  $k$ - $\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows*. AIAA Paper 93-2906.
- [31] F.R. Menter, T. Esch, S. Kubacki. 2002. *Transition modelling based on local variables*. Engineering Turbulence Modelling and Experiments – 5. 555-564.
- [32] E. R. van Driest, C. B. Blumer. 1963. *Boundary Layer Transition: Freestream Turbulence and Pressure Gradient Effects*. AIAA Journal, Vol. 1, No. 6, June 1963, pp. 1303–1306.
- [33] F.R. Menter, R.B. Langtry, S. Völker. 2006. *Transition Modelling for General Purpose CFD Codes*. Journal Flow Turbulence and Combustion 77, 277-303.
- [34] F.R. Menter, R.B. Langtry. 2009. *Correlation-Based Transition Modeling for Unstructured Parallelized Computational Fluid Dynamics Codes*. AIAA J. 47(12), 2984-2906/
- [35] S. Medida, J. Baeder. 2013. *A New Crossflow Transition Onset Criterion for RANS Turbulence Models*. AIAA Paper 2013-3081.
- [36] C. Grabe, A. Krumbein. 2014. *Extension of the  $\gamma$ - $Re_\theta$  Model for Prediction of Crossflow Transition*. AIAA Paper 2014-1269.
- [37] S. Medida, J. Baeder. 2011. *Application of the Correlation-based  $\gamma$ - $Re_\theta$  Transition Model to the Spalart-Allmaras Turbulence Model* AIAA Paper 2011-3979.
- [38] J.M. Coder, M. D. Maughmer. 2012. *One-Equation Transition Closure for Eddy-Viscosity Turbulence Models in CFD*. AIAA Paper 2012-0672.
- [39] J.M. Coder, M. D. Maughmer. 2013. *A CFD-Compatible Transition Model Using an Amplification Factor Transport Equation*. AIAA Paper 2013-0253.
- [40] F.R. Menter, P. E. Smirnov, Tao Liu, R. Avancha. 2015. *A One-Equation Local Correlation-Based Transition Model*. Flow Turbulence Combust DOI 10.1007/s10494-015-9622-4
- [41] Д. К. Зайцев. 2016. *Численное решение задач гидрогазодинамики и теплообмена с использованием блочно-структурированных сеток. Программный комплекс SINF*. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
- [42] M. K. Strelets. 2001. *Detached Eddy Simulation of Massively Separated Flows*. AIAA Paper, 2001-0879.
- [43] S. E. Rogers, D. Kwak. 1991. *An Upwind Differencing Scheme for the Incompressible Navier-Stokes Equations*. Applied Numerical Mathematics, 8, 43–64.
- [44] A. M. Savill. 1993. *Some Recent Progress in the Turbulence Modeling of By-Pass Transition*. Near-Wall Turbulent Flows, edited by R. M. C. So, C. G. Speziale, and B. E. Launder, Elsevier, New York, 1993, p. 829.
- [45] R.B. Langtry. 2006. *A Correlation-Based Transition Model Using Local Variables for Unstructured Parallelized CFD Codes*. Ph.D. Thesis, Univ. of Stuttgart, Stuttgart, Germany.
- [46] C. L. Rumsey. 2008. *Turbulence Model Behavior in Low Reynolds Number Regions of Aerodynamic Flowfields*. AIAA-2008-4403
- [47] K.E. Swalwell. 2005. *The effect of turbulence on stall of horizontal axis wind turbines*. PhD thesis, Monash University, Australia

# Приложение 1. Формулировки рассмотренных моделей перехода

## 1. Модель SST $\gamma$ - $Re_{\theta}$ (2009 Langtry, Menter)

Уравнение для перемешиваемости выглядит следующим образом

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \gamma)}{\partial x_j} = P_\gamma - E_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_f} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right] \quad (1.1)$$

Генерационный член выглядит следующим образом

$$P_{\gamma 1} = F_{length} c_{a1} \rho S [\gamma F_{onset}]^{0.5} (1 - c_{e1} \gamma), \quad (1.2)$$

где  $S = \sqrt{2S_{i,j}S_{i,j}}$  – инвариант тензор скоростей деформаций,  $F_{length}$  – эмпирическая корреляция, контролирующая длину переходного участка,  $F_{onset}$  контролирует положение начала перехода,  $\rho$  – плотность.

Диссипация имеет вид

$$E_\gamma = c_{a2} \rho \Omega \gamma F_{turb} (c_{e2} \gamma - 1), \quad (1.3)$$

где  $\Omega = \sqrt{2\Omega_{i,j}\Omega_{i,j}}$  – инвариант тензора завихренности,  $F_{turb} = e^{-\left(\frac{R_T}{4}\right)^4}$ .

Положение начала перехода контролируется следующими функциями:

$$Re_v = \frac{\rho y^2 S}{\mu} \quad (1.4)$$

$$F_{onset1} = \frac{Re_v}{2.193 \cdot Re_{\alpha}} \quad (1.5)$$

$$F_{onset2} = \min\left(\max\left(F_{onset1}, F_{onset1}^4\right), 2.0\right) \quad (1.6)$$

$$R_T = \frac{\rho k}{\mu \omega} \quad (1.7)$$

$$F_{onset3} = \max\left(1 - \left(\frac{R_T}{2.5}\right)^3, 0\right) \quad (1.8)$$

$$F_{onset} = \max\left(F_{onset2} - F_{onset3}, 0\right) \quad (1.9)$$

$Re_{\theta c}$  – критическое значение числа Рейнольдса потери импульса, при котором начинает расти перемешиваемость в пограничном слое.  $Re_{\theta c}$  находится выше по потоку, чем число Рейнольдса перехода  $\tilde{Re}_{\theta t}$ .  $F_{length}$  и  $Re_{\theta c}$  являются функциями  $\tilde{Re}_{\theta t}$ .

Корреляция между  $F_{length}$  и  $\tilde{Re}_{\theta t}$  имеет следующий вид:

$$F_{length} = \begin{cases} \left[ 398.189 \cdot 10^{-1} + (-119.270 \cdot 10^{-4}) \tilde{Re}_{\theta t} + (-132.567 \cdot 10^{-6}) \tilde{Re}_{\theta t}^2 \right] \tilde{Re}_{\theta t} & \tilde{Re}_{\theta t} < 400 \\ \left[ 263.404 + (-123.939 \cdot 10^{-2}) \tilde{Re}_{\theta t} + (194.548 \cdot 10^{-5}) \tilde{Re}_{\theta t}^2 + (-101.695 \cdot 10^{-8}) \tilde{Re}_{\theta t}^3 \right] & 400 \leq \tilde{Re}_{\theta t} < 596 \\ \left[ 0.5 - (\tilde{Re}_{\theta t} - 596.0) \cdot 3.0 \cdot 10^{-4} \right] & 596 \leq \tilde{Re}_{\theta t} < 1200 \\ \left[ 0.3188 \right] & 1200 \leq \tilde{Re}_{\theta t} \end{cases} \quad (1.10)$$

В вязком подслое значение  $F_{length}$  задаётся всегда равным 40.0 при помощи следующих функций

$$F_{length} = F_{length}(1 - F_{sublayer}) + 40.0 \cdot F_{sublayer} \quad (1.11)$$

$$R_{\omega} = \frac{\rho y^2 \omega}{500 \mu} \quad (1.12)$$

$$F_{sublayer} = e^{-\left(\frac{R_{\omega}}{0.4}\right)^2} \quad (1.13)$$

Корреляция между  $Re_{0c}$  и  $\tilde{Re}_{\theta t}$  выглядит следующим образом:

$$Re_{\theta c} = \begin{cases} \left[ \tilde{Re}_{\theta t} - \left( 396.035 \cdot 10^{-2} + (-120.656 \cdot 10^{-4}) \tilde{Re}_{\theta t} + (868.230 \cdot 10^{-6}) \tilde{Re}_{\theta t}^2 \right) \right] \tilde{Re}_{\theta t} \leq 1870 \\ \left[ \tilde{Re}_{\theta t} - (593.11 + (\tilde{Re}_{\theta t} - 1870.0) \cdot 0.482) \right] \tilde{Re}_{\theta t} > 1870 \end{cases} \quad (1.14)$$

Константы для уравнения перемежаемости следующие

$$c_{e1} = 1.0; \quad c_{a1} = 2.0; \quad c_{e2} = 50; \quad c_{a2} = 0.06; \quad \sigma_f = 1.0; \quad (1.15)$$

Модификация перемежаемости для предсказания отрывного режима перехода:

$$\gamma_{sep} = \min \left( s_1 \max \left[ 0, \left( \frac{Re_v}{3.235 Re_{\theta c}} \right) - 1 \right] F_{reattach}, 2 \right) F_{\theta} \quad (1.16)$$

$$F_{reattach} = e^{-\left(\frac{R_f}{20}\right)^4} \quad (1.17)$$

$$\gamma_{eff} = \max(\gamma, \gamma_{sep}) \quad (1.18)$$

$$s_1 = 2 \quad (1.20)$$

Граничное условия для перемежаемости  $\gamma$ : на входе в расчётную область задаётся единичное значение, соответствующее турбулентному решению, на стенке условие нулевого нормального потока.

Уравнение для критического числа Рейнольдса потери импульса  $\tilde{Re}_{\theta t}$  выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial(\rho \tilde{Re}_{\theta t})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \tilde{Re}_{\theta t})}{\partial x_j} = P_{\theta} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_{\theta} (\mu + \mu_t) \frac{\partial \tilde{Re}_{\theta t}}{\partial x_j} \right] \quad (1.21)$$

Генерационный член  $P_{\theta}$  устроен таким образом, чтобы значение скалярной переменной  $\tilde{Re}_{\theta t}$  вне пограничного слоя было равно локальному значению  $Re_{\theta t}$ , полученному из эмпирической корреляции (1.34):

$$P_{\theta} = c_{\theta} \frac{\rho}{t} (Re_{\theta t} - \tilde{Re}_{\theta t}) (1.0 - F_{\theta}) \quad (1.22)$$

$$t = \frac{500 \mu}{\rho U^2} \quad (1.23)$$

Здесь  $t$  – масштаб времени, необходимый для расчётов, а  $U = (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}$  локальное значение модуля скорости.

Функция  $F_{\theta}$  необходима для определения пограничного слоя и отключения в нём источникового члена (1.22).

$$F_{\alpha} = \min \left( \max \left( F_{wake} \cdot e^{-\left(\frac{y}{\delta}\right)^4}, 1.0 - \left(\frac{\gamma - 1/c_{e2}}{1.0 - 1/c_{e2}}\right)^2 \right), 1.0 \right) \quad (1.24)$$

$$\delta = \frac{50\Omega y}{U} \cdot \delta_{BL}; \quad \delta_{BL} = \frac{15}{2} \theta_{BL}; \quad \theta_{BL} = \frac{\tilde{Re}_{\theta} \mu}{\rho U} \quad (1.25)$$

$$F_{wake} = \exp \left[ - \left( \frac{Re_{\omega}}{10^5} \right)^2 \right]; \quad Re_{\omega} = \frac{\rho \omega y^2}{\mu} \quad (1.26)$$

Функция  $F_{wake}$  обеспечивает отключение функции  $F_{\alpha}$  в следе за крыловыми профилями или турбинными лопатками.

Константы уравнения для  $\tilde{Re}_{\theta}$  следующие:

$$c_{\alpha} = 0.03; \quad \sigma_{\alpha} = 2.0 \quad (1.27)$$

Граничные условия для  $\tilde{Re}_{\theta}$ : на входе задаётся значение в соответствии с корреляцией (1.34), на стенке нулевой нормальный поток.

Эмпирическая корреляция для местоположения начала перехода основана на следующих параметрах:

$$\lambda_{\theta} = \frac{\rho \theta^2}{\mu} \frac{dU}{ds} \quad (1.28)$$

$$Tu = 100 \frac{\sqrt{2k/3}}{U} \quad (1.29)$$

где  $\frac{dU}{ds}$  - ускорение вдоль линий тока и может быть рассчитана при помощи взятия производной скорости  $U$  в направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ 2u \frac{du}{dx} + 2v \frac{dv}{dx} + 2w \frac{dw}{dx} \right] \quad (1.30)$$

$$\frac{dU}{dy} = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ 2u \frac{du}{dy} + 2v \frac{dv}{dy} + 2w \frac{dw}{dy} \right] \quad (1.31)$$

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ 2u \frac{du}{dz} + 2v \frac{dv}{dz} + 2w \frac{dw}{dz} \right] \quad (1.32)$$

$$\frac{dU}{ds} = \left[ (u/U) \frac{dU}{dx} + (v/U) \frac{dU}{dy} + (w/U) \frac{dU}{dz} \right] \quad (1.33)$$

Эмпирическая корреляция для  $Re_{\theta}$  выглядит следующим образом:

$$Re_{\theta} = F(\lambda_{\theta}) \begin{cases} \left[ 1173.51 - 589.428 Tu + \frac{0.2196}{Tu^2} \right], Tu \leq 1.3 \\ 331.50 [Tu - 0.5658]^{-0.671}, Tu > 1.3 \end{cases} \quad (1.34)$$

$$F(\lambda_{\theta}) = \begin{cases} 1 - \left[ -12.986 \lambda_{\theta} - 123.66 \lambda_{\theta}^2 - 405.689 \lambda_{\theta}^3 \right] e^{-\left[\frac{Tu}{1.5}\right]^{1.5}}, \lambda_{\theta} \leq 0 \\ 1 + 0.275 \left[ 1 - e^{-\left[-35.0 \lambda_{\theta}\right]} \right] e^{-\left[\frac{-Tu}{0.5}\right]}, \lambda_{\theta} > 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

Для численной стабильности параметры  $\lambda_{\theta}$ ,  $Tu$  и  $Re_{\theta}$  были ограничены следующим образом

$$-0.1 \leq \lambda_\theta \leq 0.1 \quad Tu \geq 0.027 \quad Re_\alpha \geq 20$$

Корреляция используется только в источниковом члене (1.22) для уравнения для критического числа Рейнольдса начала перехода (1.21).

Уравнения (1.34-1.35) должны решаться итерационно, потому, что толщина потери импульса  $\theta_t$  присутствует как в левой, так и в правой частях уравнений.

Модель перехода взаимодействует с моделью SST [30] следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j k) = \tilde{P}_k - \tilde{D}_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (1.36)$$

$$\tilde{P}_k = \gamma_{eff} P_k \quad (1.37)$$

$$\tilde{D}_k = \min(\max(\gamma_{eff}, 0.1), 1.0) D_k$$

$$F_1 = \max(F_{1orig}, F_3); F_3 = e^{-\left(\frac{R_y}{120}\right)^8}; R_y = \frac{\rho y \sqrt{k}}{\mu}; \quad y \equiv d_w \quad (1.38)$$

где  $P_k$  и  $D_k$  – оригинальные генерация и диссипация модели SST и  $F_{1orig}$  – оригинальная функция модели SST.

## 2. Модель SST $\gamma$ (2015 Menter, Smirnov, Liu, Avancha)

Вид уравнения переноса для перемежаемости  $\gamma$  не отличается от используемого в модели  $\gamma$ -Re $_{\theta}$ :

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \gamma)}{\partial x_j} = P_\gamma - E_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_f} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right] \quad (2.1)$$

Источниковый член был слегка изменен и имеет вид

$$P_{\gamma 1} = F_{length} \rho S \gamma (1 - \gamma) F_{onset} \quad (2.2)$$

Величина источникового слагаемого контролируется величиной  $F_{length}$ , который теперь является константой.

Диссипационный член, отвечающий за реламинаризацию, полностью соответствует модели  $\gamma$ -Re $_{\theta}$  (1.3):

$$E_\gamma = c_{a2} \rho \Omega \gamma F_{turb} (c_{e2} \gamma - 1) \quad (2.3)$$

Формулировка функции  $F_{onset}$ , используемой для запуска перехода была слегка изменена

$$Re_v = \frac{\rho d_w^2 S}{\mu} \quad (2.4)$$

$$F_{onset1} = \frac{Re_v}{2.2 \cdot Re_{\theta_c}} \quad (2.5)$$

$$F_{onset2} = \min(F_{onset1}, 2.0) \quad (2.6)$$

$$R_T = \frac{\rho k}{\mu \omega} \quad (2.7)$$

$$F_{onset3} = \max\left(1 - \left(\frac{R_T}{3.5}\right)^3, 0\right) \quad (2.8)$$

$$F_{onset} = \max(F_{onset2} - F_{onset3}, 0) \quad (2.9)$$

$$F_{turb} = e^{-\left(\frac{R_T}{2}\right)^4} \quad (2.10)$$

$d_w$  - расстояние до ближайшей стенки.

Значение критического числа Рейнольдса потери импульса  $Re_{\theta_c}$  рассчитывается не на основе уравнения переноса, а при помощи алгебраического соотношения, использующего локальные переменные.

$$Re_{\theta_c} = f(Tu_L, \lambda_{\theta L}) \quad (2.11)$$

Константы модели

$$F_{length} = 100, \quad c_{e2} = 50, \quad c_{a2} = 0.06, \quad \sigma_\gamma = 1.0 \quad (2.12)$$

Граничные условия для  $\gamma$  остались неизменными: единичное значение на входе и нулевой нормальный поток на стенке.

Основным отличием от модели  $\gamma$ -Re $_{\theta}$  является то, что величины  $Tu_L, \lambda_{\theta L}$ , входящие в корреляцию для  $Re_{\theta_c}$  (2.11) теперь аппроксимируются локально:

$$Tu_L = \min\left(100 \frac{\sqrt{2k/3}}{\omega d_w}, 100\right) \quad (2.13)$$

$$\lambda_{\theta L} = -7.57 \cdot 10^{-3} \frac{dV}{dy} \frac{d_w}{v} + 0.0128 \quad (2.14)$$

$$\lambda_{\theta L} = \min(\max(\lambda_{\theta L}, -1.0), 1.0) \quad (2.15)$$

где  $\frac{dV}{dy}$  - производная от нормальной составляющей скорости по нормали, характеризующая градиент давления в потоке.

Как и в модели  $\gamma$ - $Re_{\theta}$ , для определения начала перехода может быть использована любая эмпирическая корреляция. Авторами разработана следующая, более простая, чем в модели  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  корреляция:

$$Re_{\theta c}(Tu_L, \lambda_{\theta L}) = C_{TU1} + C_{TU2} \exp[-C_{TU3} Tu_L F_{PG}(\lambda_{\theta L})] \quad (2.16)$$

$$C_{TU1} = 100.0, \quad C_{TU2} = 1000.0, \quad C_{TU3} = 1.0 \quad (2.17)$$

Предполагается, что константы (2.17) могут быть изменены пользователем, в зависимости от задачи. Константа  $C_{TU1}$  определяет минимальное значение критического числа Рейнольдса  $Re_{\theta c}$  (для высоких уровней турбулентности экспонента стремится к нулю). Сумма  $C_{TU1} + C_{TU2}$  определяет максимальное значение  $Re_{\theta c}$  (при низких уровнях турбулентности экспонента стремится к единице). Константа  $C_{TU3}$  контролирует скорость падения  $Re_{\theta c}$  при увеличении  $Tu$ .

Функция  $F_{PG}(\lambda_{\theta L})$  вводит в корреляцию чувствительность к градиенту давления:

$$F_{PG}(\lambda_{\theta L}) = \begin{cases} \min(1 + C_{PG1} \lambda_{\theta L}, C_{PG1}^{lim}), & \lambda_{\theta L} \geq 0 \\ \min(1 + C_{PG2} \lambda_{\theta L} + C_{PG3} \min[\lambda_{\theta L} + 0.0681, 0], C_{PG2}^{lim}), & \lambda_{\theta L} < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

$$F_{PG} = \max(F_{PG}, 0) \quad (2.19)$$

$$C_{PG1} = 14.68, \quad C_{PG2} = -7.34, \quad C_{PG3} = 0.0 \quad (2.20)$$

$$C_{PG1}^{lim} = 1.5, \quad C_{PG2}^{lim} = 3.0 \quad (2.21)$$

Константы (2.20) – ещё один набор констант, доступных пользователю.  $C_{PG1}$  контролирует критическое значение  $Re_{\theta c}$  в областях с отрицательным градиентом давления,  $C_{PG2}$  - с положительным, а  $C_{PG3}$  становится активной в отрывных областях, корректируя, при необходимости, значение  $Re_{\theta c}$ .

$\gamma$  модель перехода взаимодействует с SST аналогично  $\gamma$ - $Re_{\theta}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j k) = \tilde{P}_k + P_k^{lim} - \tilde{D}_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (2.22)$$

$$\tilde{P}_k = \gamma P_k \quad (2.23)$$

$$\tilde{D}_k = \max(\gamma, 0.1) \cdot D_k$$

$$\mu_t = \rho \frac{a_1 \cdot k}{\max(a_1 \cdot \omega, F_2 \cdot S)} \quad (2.24)$$

Генерация  $P_k$  рассчитывается при помощи формулировки Като-Лаундера:

$$P_k = \mu_t S \Omega \quad (2.25)$$

В уравнение для кинетической энергии  $k$  введен дополнительный член  $P_k^{lim}$ , обеспечивающий правильный рост турбулентной вязкости в переходной области при очень низком уровне турбулентной вязкости набегающего потока

$$P_k^{\text{lim}} = 5C_k \max(\gamma - 0.2, 0)(1 - \gamma)F_{on}^{\text{lim}} \max(3C_{SEP}\mu - \mu_t, 0)S\Omega \quad (2.26)$$

$$F_{on}^{\text{lim}} = \min\left(\max\left(\frac{\text{Re}_v}{2.2 \cdot \text{Re}_{\theta}^{\text{lim}}} - 1, 0\right), 3\right) \quad (2.27)$$

$$\text{Re}_{\theta}^{\text{lim}} = 1100 \quad (2.28)$$

$$C_k = 1.0, \quad C_{SEP} = 1.0 \quad (2.29)$$

Модификация функции  $F_1$  модели SST полностью совпадает с уравнением (1.38)

$$F_1 = \max(F_{1orig}, F_3); \quad F_3 = e^{-\left(\frac{R_y}{120}\right)^8}; \quad R_y = \frac{\rho y \sqrt{k}}{\mu}; \quad y \equiv d_w \quad (2.30)$$

### 3. Модель SA $\gamma$ (2012 Coder, Maughmer)

Модель SA  $\gamma$  основана на модели SST  $\gamma$ -Re $_{\theta}$ . Авторы значительно упрощают модель, вводя новый параметр, локально характеризующий градиент давления

$$H_c = \frac{y\Omega}{U} \quad (3.1)$$

позволяющий гораздо проще определить параметр  $\lambda_{\theta}$  (1.28):

$$\lambda_{\theta} = \begin{cases} 0.1919(0.587743 - H_c)^3 + 0.4182(0.587743 - H_c)^2 + 0.2959(0.587743 - H_c), & H_c \geq 0.587743 \\ 4.7596(0.587743 - H_c)^3 + 0.3837(0.587743 - H_c)^2 + 0.3575(0.587743 - H_c), & H_c < 0.587743 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$0.3823 \leq H_c \leq 1.1542 \quad (3.3)$$

Уравнение переноса для  $\tilde{Re}_{\theta}$  (1.21) заменено алгебраической корреляцией, аналогичной (1.34):

$$\tilde{Re}_{\theta} = F(\lambda_{\theta}) \begin{cases} \left[ 1173.51 - 589.428Tu + \frac{0.2196}{Tu^2} \right], Tu \leq 1.3 \\ 331.50[Tu - 0.5658]^{-0.671}, Tu > 1.3 \end{cases} \quad (3.4)$$

Значение величины  $F(\lambda_{\theta})$  определяется по формуле (1.35). Помимо упрощений (3.1-3.4) модель  $\gamma$ -Re $_{\theta}$  не претерпела изменений.

Для использования полученной упрощённой модели вместе с моделью SA необходимо иметь выражения для кинетической энергии турбулентности и удельной диссипации. Авторы предложили следующие аппроксимации:

$$\omega = \frac{\Omega}{\sqrt{\beta^*}}, \quad (3.5)$$

$$k = v_t \max\left(\omega, \frac{SF_2}{a_1}\right), \quad (3.6)$$

где  $F_2 = \tanh(\arg_2^2)$ ,  $\arg_2 = \max\left(\frac{2}{\beta^* y} \sqrt{\frac{v_t}{\omega}}, \frac{500v}{y^2 \omega}\right)$ ,  $y$  - расстояние до стенки,  $\Omega = \sqrt{2\Omega_{i,j}\Omega_{i,j}}$  - инвариант

тензора завихренности,  $\beta^*$  - константа модели SST.

Внедрение модели перехода в модель SA происходит следующим образом:

$$\frac{D\tilde{v}}{Dt} = \tilde{P} - \tilde{E} + \frac{1}{\sigma} ([\nabla \bullet ((v + \tilde{v})\nabla \tilde{v})] + C_{b2} [(\nabla \tilde{v}) \bullet (\nabla \tilde{v})]) \quad (3.7)$$

$$\tilde{P} = \gamma_{eff} P_{orig} \quad (3.8)$$

$$\tilde{E} = \min(\max(\gamma_{eff}, \beta), 1.0) E_{orig} \quad (3.9)$$

Константа  $\beta=0.5$ .

#### 4. Модель SA e<sup>N</sup> (2014 Coder, Maughmer)

Рассматривается следующее уравнения для показателя роста возмущений  $\tilde{n}$  :

$$\frac{D\rho\tilde{n}}{Dt} = \rho\Omega F_{crit} F_{growth} \frac{d\tilde{n}}{dR_{\delta 2}} + \nabla \cdot \left( \frac{\rho(v + \tilde{v})}{\sigma_n} \nabla \tilde{v} \right) \quad (4.1)$$

где функция

$$F_{growth} = 0.5 \cdot D(H_{12}) [1 + m(H_{12})] \cdot l(H_{12}) \quad (4.2)$$

отвечает за рост возмущений. В ещё состав входят корреляции

$$D(H_{12}) = \frac{0.0616H_{12}^2 + 0.2339H_{12} + 3.4298}{0.0047H_{12}^3 - 0.1056H_{12}^2 + 0.9350H_{12} - 1.2071} \quad (4.3)$$

$$H_{12} = \max(0.328, 13.9766 H_L^4 - 22.9166 H_L^3 + 13.7227 H_L^2 - 1.0023 H_L + 1.6778) \quad (4.4)$$

$$l(H_{12}) = \frac{6.54H_{12} - 14.07}{H_{12}^2} \quad (4.5)$$

$$m(H_{12}) = \left( 0.058 \frac{(H_{12} - 4)^2}{H_{12} - 1} - 0.068 \right) \cdot \frac{1}{l(H_{12})} \quad (4.6)$$

Функция

$$F_{crit} = \begin{cases} 0, & R_y < R_{y,0} \\ 1, & R_y \geq R_{y,0} \end{cases} \quad (4.7)$$

определяет, может ли пограничный слой быть неустойчивым.

$$R_y = \frac{\rho U d}{\mu} \quad (4.8)$$

$$R_{y,0} = k_y R_{\delta 2,0} \quad (4.9)$$

$$k_y = -0.00315H_{12}^3 + 0.0986H_{12}^2 - 0.242H_{12} + 3.739 \quad (4.10)$$

$$\log_{10}(R_{\delta 2,0}) = 0.7 \cdot \tanh\left(\frac{14}{H_{12} - 1} - 9.24\right) + \frac{2.492}{(H_{12} - 1)^{0.43}} + 0.62 \quad (4.11)$$

$$\frac{d\tilde{n}}{dR_{\delta 2}} = 0.028(H_{12} - 1) - 0.0345 \cdot \exp\left(-\left[\frac{3.87}{H_{12} - 1} - 2.52\right]\right) \quad (4.12)$$

Уравнение модели SA может быть записано в виде

$$\frac{D\tilde{v}}{Dt} = \frac{1}{\sigma} \left( [\nabla \cdot ((v + \tilde{v}) \nabla \tilde{v})] + C_{b2} [(\nabla \tilde{v}) \cdot (\nabla \tilde{v})] + C_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{v} - \left( C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left( \frac{\tilde{v}}{d} \right)^2 + f_{t1} (\Delta U)^2 \right) \quad (4.13)$$

Функция

$$f_{t2} = C_{t3} \cdot \exp(-C_{t4} (\tilde{v}/v)^2) \quad (4.14)$$

позволяет существование участков с нулевой турбулентной вязкостью в решении. Функция  $f_{t1}$  служит для перехода к турбулентности в предписанном месте.

При имплементации описанной модели перехода функция  $f_{t1}$  удаляется из уравнения, а функция  $f_{t2}$  модифицируется и принимает вид:

$$f_{t2} = C_{t3} \cdot [1 - \exp(2(\tilde{n} - N_{crit}))] \cdot \exp(-C_{t4} \chi^2) \quad (4.15)$$

Критическое значение  $N_{crit}$  в модели получается из формулы Маск и равно

$$N_{crit} = -8.43 - 2.4 \ln(Tu / 100) \quad (4.16)$$