

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

РАСЧЕТ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ANSYS FLUENT

Практикум



ПОЛИТЕХ-ПРЕСС

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург

2020

ББК 22.311
М74

А в т о р ы:

Е. А. Кузнецов, А. А. Матюшенко, А. В. Гарбарук, А. А. Смирновский

Моделирование турбулентности. Расчет сдвиговых течений с применением ANSYS FLUENT : практикум / Е. А. Кузнецов [и др.]. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. – 49 с.

Практикум посвящен описанию методики расчета турбулентных течений в программном пакете ANSYS FLUENT на примере простейших свободно-сдвиговых и пристеночных течений. В деталях изложены этапы нахождения численного решения для каждой из включенных в практикум задач и даны рекомендации по обработке полученных результатов и их представлению.

Практикум предназначен для студентов бакалавриата СПбПУ направления «Прикладные математика и физика», изучающих курс «Моделирование турбулентности» и выполняющих лабораторные работы по этому курсу, а также для студентов других специальностей, осваивающих методы инженерного анализа с применением пакета ANSYS FLUENT.

Печатается по решению

Совета по издательской деятельности Ученого совета

Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

ISBN 978-5-7422-7166-6

© Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого, 2020

Подготовка бакалавров и магистров по направлению **«Прикладная математика и физика»** ведется в Высшей школе прикладной математики и вычислительной физики СПбПУ и обеспечивается профессорско-преподавательским составом секции «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен».

Бакалаврская программа сформирована по профилю «Математические модели и вычислительные технологии в гидроаэродинамике и теплофизике». Студенты получают фундаментальную подготовку по высшей математике и общей физике, которая дополняется курсами математической физики, теоретической физики, химии, теоретической механики и др. На третьем курсе начинается преподавание профильных дисциплин, нацеленных на освоение как моделей и задач гидроаэродинамики и теплофизики, так и современных вычислительных методов, и технологий, включая различные программные пакеты.

Продолжение обучения проводится в магистратуре. Образование, получаемое по программе «Модели и высокопроизводительные вычисления в физической гидрогазодинамике», позволяет выпускникам заниматься решением комплексных проблем физической гидрогазодинамики, теплофизических проблем, междисциплинарных задач. В процессе обучения магистранты изучают и плодотворно применяют в учебно-научной работе и в исследованиях по грантам и заказам промышленности современные технологии компьютерного моделирования и инженерного анализа (*CAE-системы*), включая лицензионные (*ANSYS-Mechanical, ANSYS-CFD, ICEM*) и свободно распространяемые (*OpenFOAM*) программные пакеты общего назначения, а также специализированные пакеты вычислительной гидродинамики (Computational Fluid Dynamics, CFD).

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
Условные обозначения.....	7
1 Постановки задач и задания к лабораторным работам.....	8
1.1 Турбулентный слой смешения.....	9
1.2 Турбулентная затопленная струя.....	13
1.3 Установившееся течение в плоскопараллельном канале	17
1.4 Турбулентный пограничный слой на плоской пластине	20
2 Этапы решения задач	23
2.1 Создание расчетной области и построение сетки.....	23
2.2 Моделирование турбулентности	28
2.2.1 Выбор модели турбулентности.....	28
2.2.2 Постановка граничных условий для характеристик турбулентности на входных границах.....	30
2.3 Постановка периодических граничных условий.....	32
2.4 Проведение расчета	35
2.5 Обработка результатов	36
Список литературы.....	39
Приложение 1. Экспериментальные данные	40
Приложение 2. Индивидуальные варианты заданий	44

Введение

Сегодня невозможно представить себе разработку и проектирование различных технических устройств без проведения предварительного численного моделирования физических процессов, лежащих в основе их работы. Не исключением является и моделирование течений жидкости и газа, которое имеет решающее значение для проектирования в аэрокосмической отрасли, в турбомашиностроении и во многих других отраслях промышленности. Большинство важных для практики течений являются турбулентными, поэтому навык расчета именно турбулентных течений крайне важен для подготовки широкого круга специалистов.

В последние годы все больший объем расчетов проводится с использованием вычислительных кодов общего назначения, позволяющих решать широкий спектр задач. Одним из наиболее распространенных кодов такого типа является пакет ANSYS FLUENT [1], предоставляющий пользователю богатый набор методов расчета турбулентных течений. Владение этим пакетом и умение рассчитывать с его помощью различные турбулентные течения становится очень важным навыком для специалистов, решающих задачи в области механики сплошных сред.

Настоящий практикум предназначен для студентов четвертого курса бакалавриата по направлению «Прикладные математика и физика», изучающих в СПбПУ курс «Моделирование турбулентности» и выполняющих лабораторные работы по этому курсу. Практикум также будет полезен для студентов других специальностей, изучающих ANSYS FLUENT. Предполагается, что студенты ранее были ознакомлены с основами моделирования ламинарных течений в пакете

ANSYS FLUENT (освоили начальный курс «Программные средства вычислительной гидродинамики и теплофизики»), умеют строить расчетные сетки и производить обработку результатов.

Программа лабораторных работ по курсу «Моделирование турбулентности» предусматривает выполнение расчетов двух турбулентных свободных сдвиговых течений - слоя смешения и затопленной струи, - а также двух пристеночных течений, - установившегося течения в плоскопараллельном канале и пограничного слоя на плоской пластине при отсутствии градиента давления [2]. Расчеты выполняются на основе RANS подхода (Reynolds-Averaged Navier–Stokes - осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса), который на сегодняшний день является наиболее востребованным в различных отраслях промышленности, несмотря на активное развитие и использование более точных, но сравнительно дорогих с вычислительной точки зрения вихреразрешающих подходов [3].

Индивидуальные варианты заданий различаются выбором используемых моделей турбулентности и их опций.

Условные обозначения

C_f – коэффициент трения на стенке;

k – удельная кинетическая энергия турбулентности, КЭТ;

Re – число Рейнольдса;

Ti – интенсивность турбулентности;

u_τ – динамическая скорость;

ε – скорость диссипации КЭТ;

μ – молекулярная динамическая вязкость;

ν – молекулярная кинематическая вязкость;

ν_t – турбулентная кинематическая вязкость;

ρ – плотность;

ω – удельная скорость диссипации КЭТ;

τ_w – напряжение трения на стенке.

1 Постановки задач и задания к лабораторным работам

Все рассматриваемые в практикуме задачи, исходно формулируемые как двумерные, с применением трехмерной версии кода ANSYS FLUENT решаются в квазидвумерной постановке (одна ячейка расчетной сетки в третьем направлении). Моделирование течения выполняется в приближении несжимаемой жидкости (числа Маха при проведении соответствующих экспериментов были достаточно малы). Используются стационарные уравнения Рейнольдса, замкнутые при помощи различных полуэмпирических моделей турбулентности.

Для определенности при постановке задачи будем использовать систему координат, в которой течение рассматривается в плоскости XY , где ось X соответствует направлению потока. Соответственно, будем обозначать длину расчетной области через L_x , высоту - L_y , и ширину в третьем направлении - L_z ; обозначения U и V соответствуют продольной и поперечной компонентам скорости. Поскольку в направлении z используется одна ячейка сетки, величина L_z может быть любой, однако во избежание излишней анизотропии ячеек рекомендуется задавать L_z порядка величины шага сетки в плоскости XY .

1.1 Турбулентный слой смешения

Постановка задачи

Рассматривается течение в турбулентном слое смешения, возникающем между двумя параллельными потоками воздуха, двигающимися с различными скоростями: $U_1 = 15.18$ м/с и $U_2 = 9.18$ м/с (см. Рис. 1), что соответствует условиям эксперимента [4], проведенного при нормальных условиях ($\rho = 1.185$ кг/м³ и $\mu = 1.831 \cdot 10^{-5}$ Па·с).

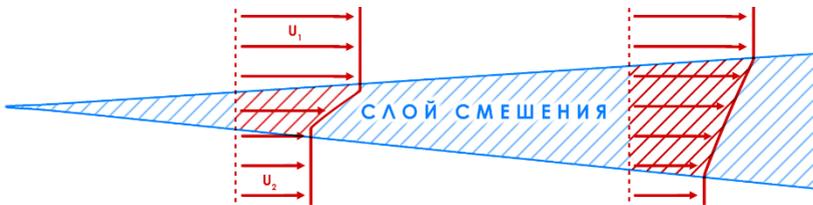


Рис. 1. Схема течения в турбулентном слое смешения.

Расчетная область в плоскости XY представляет собой прямоугольник длиной $L_x = 2.5$ м и высотой $L_y = 1.2$ м (см. Рис. 2). Граничные условия задаются следующим образом. На верхней половине входной границы (ВХОД-1) задается однородный профиль скорости: $U_1 = 15.18$ м/с, $V = 0$ м/с, а на нижней (ВХОД-2) – $U_2 = 9.18$ м/с, $V = 0$ м/с. Кроме этого, на всех входных границах задаются значения характеристик турбулентности, соответствующие отношению турбулентной и молекулярной вязкости $\nu_t/\nu = 1$ и интенсивности турбулентности $Tu = 1\%$. На выходной границе задается постоянный уровень относительного (редуцированного) давления: $p = 0$. И, наконец, на верхней и нижней границах задается условие симметрии.

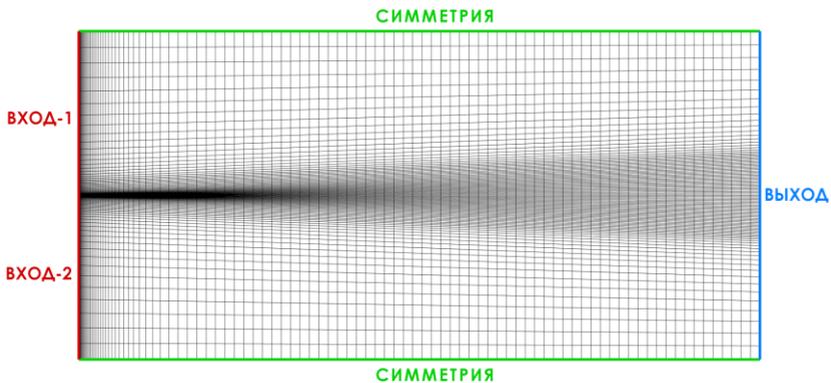


Рис. 2. Расчетная область, граничные условия и пример расчетной сетки для задачи моделирования турбулентного слоя смешения.

Задание к лабораторной работе

1. Построить серию последовательно сгущающихся сеток, получить на них сошедшее по итерациям решение с использованием моделей турбулентности из индивидуального варианта и показать, что получено сеточно-независимое решение.

2. Проверить автомодельность полученного решения и сравнить результаты расчета с экспериментальными данными [4] (таблицы 1 - 2 приложения 1). Для этого необходимо построить зависимость толщины слоя смешения δ от продольной координаты x и определить угол его расширения (см. пример на Рис. 3). Толщина слоя смешения для рассматриваемого (текущего) сечения определяется как расстояние между точками, скорости в которых равны $U_1 - 0.01U_{ref}$ и $U_2 + 0.01U_{ref}$, где $U_{ref} = |U_1 - U_2|$ – масштаб скорости. Кроме того, необходимо построить обезразмеренные по U_{ref} профили продольной и поперечной скорости, а также характеристик турбулентности (кинетической

энергии турбулентности, касательных напряжений Рейнольдса и их отношения) в зависимости от безразмерной координаты y/δ (см. пример на рисунке 4) в трех сечениях вниз по потоку от начала формирования слоя смещения: $x = 1.261$ м, 1.464 м и 2.074 м.

3. Выполнить оставшиеся задания согласно индивидуальному варианту.

4. Представить и защитить отчет по работе.

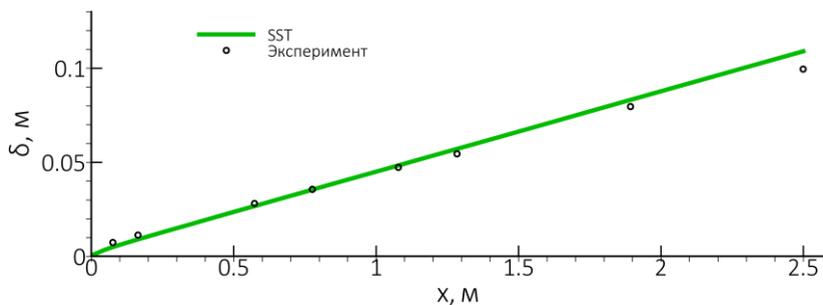


Рис. 3. Изменение толщины слоя смещения по продольной координате, рассчитанное с использованием модели турбулентности SST, в сопоставлении с экспериментальными данными [4].

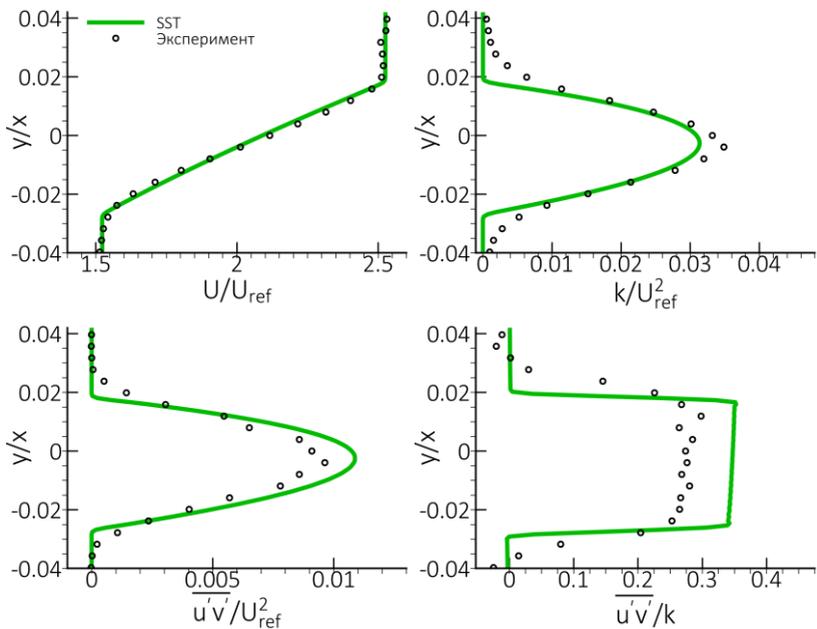


Рис. 4. Рассчитанные по SST модели турбулентности профили скорости (U/U_{ref}), кинетической энергии турбулентности (k/U_{ref}^2), касательного турбулентного напряжения ($\overline{u'v'}/U_{ref}^2$) и их отношения ($\overline{u'v'}/k$) в сопоставлении с экспериментальными данными [4].

1.2 Турбулентная затопленная струя

Постановка задачи

Рассматривается задача о плоской турбулентной струе несжимаемой жидкости, истекающей из стенки через отверстие шириной $2\delta_0$ с постоянной по сечению скоростью U_0 , в пространство, заполненное той же средой (затопленная струя, Рис. 5). Число Рейнольдса, построенное по входной скорости U_0 и полуширине отверстия δ_0 , составляет $Re = \frac{U_0 \delta_0}{\nu} = 10^5$.

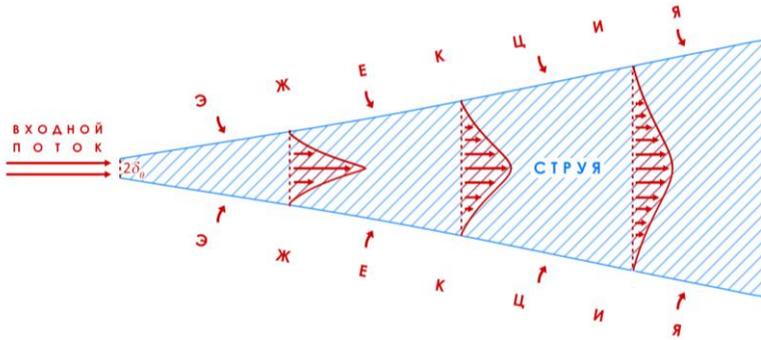


Рис. 5. Схема плоской турбулентной затопленной струи.

Требуемое значение единственного определяющего параметра задачи – числа Рейнольдса, – можно обеспечить, полагая, например, $U_0 = 1$ м/с, $\delta_0 = 1$ м и задавая подходящее значение кинематической вязкости.

Пусть начало системы координат XU совпадает с центром отверстия. С учетом симметрии рассматриваемой задачи относительно оси струи (ось x) решение задачи целесообразно проводить для половины пространства. Расчетная область в плоскости XU (Рис. 6) представляет собой трапецию длиной $L_x = 80\delta_0$, высотой меньшего основания трапеции $L_{y1} = 13\delta_0$ и большего (ВЫХОД) $L_{y2} = 40\delta_0$, при этом протяженность входной границы (ВХОД-1) составляет δ_0 .

Граничные условия задаются следующим образом (см. Рис. 6). На входной границе (ВХОД-1), соответствующей отверстию, задается однородный профиль скорости ($U_0 = 1$ м/с, $V_0 = 0$ м/с) и значения характеристик турбулентности, соответствующие отношению турбулентной и молекулярной вязкости $\nu_t/\nu = 1$ и интенсивности турбулентности $Tu = 1\%$. Пограничным слоем на стенке, в котором проделано отверстие, можно пренебречь, и на этой границе, для имитации скользкой стенки, задается условие симметрии. На верхней границе, через которую входит эжектируемая струей жидкость, (ВХОД-2) задается давление торможения во внешнем потоке (граничное условие pressure-inlet) и направление течения (вертикально вниз). На выходной границе задается постоянное значение относительного (редуцированного) давления $p = 0$. Наконец, на оси струи задается условие симметрии.

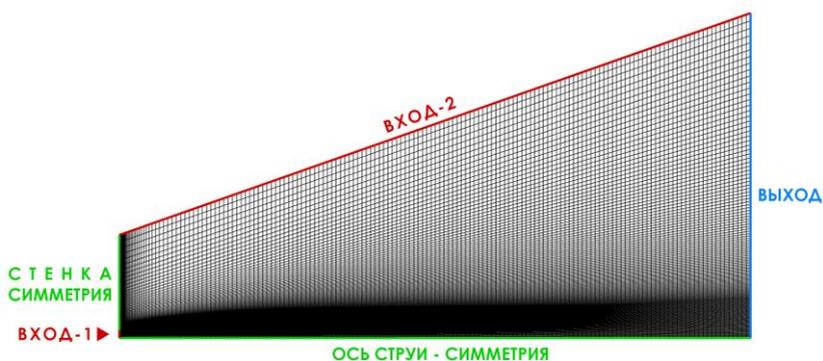


Рис. 6. Расчетная область, граничные условия и пример расчетной сетки для задачи моделирования турбулентной плоской затопленной струи.

Задание к лабораторной работе

1. Построить серию последовательно сгущающихся сеток, получить на них сошедшее по итерациям решение с использованием моделей турбулентности из индивидуального варианта и показать, что получено сеточно-независимое решение.

2. Проверить автомодельность полученного решения на основном участке струи и сравнить результаты расчетов с экспериментальными данными [5] (таблицы 3 - 6 приложения 1). Для этого необходимо построить зависимость ширины затопленной струи $\delta_{0.5}/\delta_0$ от продольной координаты x/δ_0 (см. Рис. 7, слева) и определить угол расширения струи на автомодельном (основном) участке. Граница струи, $\delta_{0.5}$, определяется координатой, в которой скорость равна половине скорости на оси струи в данном сечении. Также следует построить зависимость безразмерной скорости на оси струи от продольной координаты $U/U_0(x/\delta_0)$ (см. Рис. 7 справа) и безразмерные профили скорости $U/U_{axis}(y/\delta_{0.5})$ (см. пример на Рис. 8) в трех сечениях вниз по потоку от входа: $x/\delta_0 = 30, 50$ и 70 . Здесь U_{axis} – скорость на оси струи в данном сечении.

3. Выполнить оставшиеся задания согласно индивидуальному варианту.

4. Представить и защитить отчет по работе.

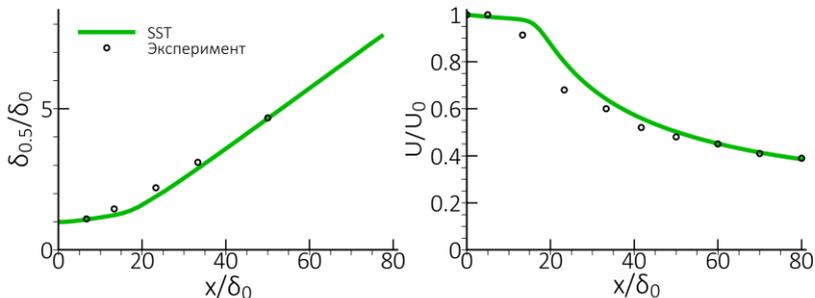


Рис. 7. Сравнение расчетных зависимостей для ширины плоской струи (слева) и скорости на ее оси (справа), полученных по модели SST, с экспериментальными данными [5].

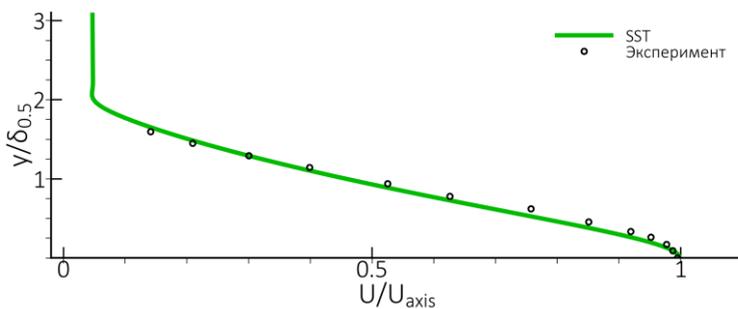


Рис. 8. Сравнение профиля скорости плоской струи в сечении $X/\delta_0 = 50$, полученного по модели SST, с экспериментальными данными [5].

1.3 Установившееся течение в плоскопараллельном канале

Постановка задачи

Рассматривается задача об установившемся (полностью развитом) течении несжимаемой жидкости в плоскопараллельном канале при числе Рейнольдса, построенном по динамической скорости u_τ и полувысоте канала $H/2$, $Re_\tau = \frac{u_\tau H/2}{\nu} = 10^3$.

На рисунке 9 представлена схема течения в плоскости XY для постановки задачи. На стенках канала задается условие прилипания (поскольку моделируется полностью развитое течение, протяженность стенок может быть произвольной). На левой и правой боковых границах используется условие периодичности с заданным перепадом давления, который однозначно определяется выбранным значением числа Рейнольдса Re_τ и вычисляется по формуле:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\mu^2}{\rho H^3} Re_\tau^2 \quad (1.1)$$

Эту связь можно найти самостоятельно, проинтегрировав уравнение, описывающее развитое движение, по высоте канала и приняв во внимание граничные условия. Подробное описание постановки граничных условий периодичности с заданным перепадом давления в ANSYS FLUENT приведено в разделе 2.3.



Рис. 9. Схема течения и граничные условия для задачи моделирования течения в плоскопараллельном канале.

Задание к лабораторной работе

1. Построить серию последовательно сгущающихся сеток, получить на них сошедшее по итерациям решение с использованием моделей турбулентности из индивидуального варианта и показать, что получено сеточно-независимое решение.

2. Проверить адекватность решения, полученного для осредненного течения, используя переменные «закона стенки».

Для этого необходимо построить зависимость скорости от расстояния до стенки в переменных «закона стенки» $u^+ = u^+(y^+)$, где $y^+ = \frac{d_w u_\tau}{\nu}$, d_w – расстояние до ближайшей стенки, $u^+ = \frac{u}{u_\tau}$ и $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$, а также сравнить с линейным профилем скорости $u^+ = y^+$ в вязком подслое и с логарифмическим профилем $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5.2$ в остальной области.

Далее требуется построить зависимости рассчитанных характеристик турбулентности от безразмерного расстояния до стенки, вводя локальную нормировку на значения, которые вычисляются по известным полуэмпирическим формулам (1.2) - (1.5), полученным для логарифмической области пограничного слоя с «равновесной» турбулентностью при высоких значениях числа Рейнольдса:

$$v_t = \kappa d_w u_\tau \quad (1.2)$$

$$k = u_\tau^2 / \sqrt{C_\mu} \quad (1.3)$$

$$\varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa d_w} \quad (1.4)$$

$$\omega = \frac{u_\tau}{\kappa d_w \sqrt{C_\mu}} \quad (1.5)$$

где приняты следующие значения эмпирических констант: $C_\mu = 0.09$ и $\kappa = 0.41$. Для наглядности и полноты анализа, на каждом из графиков для характеристик турбулентности следует

построить горизонтальную линию, соответствующую единичному значению функции (см. пример на рисунке 10).

3. Выполнить оставшиеся задания согласно индивидуальному варианту.
4. Представить и защитить отчет по работе.

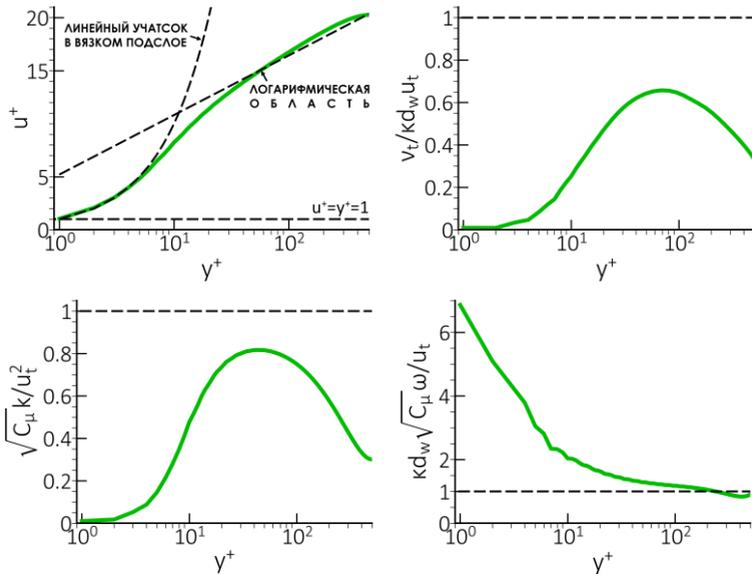


Рис. 10. Профили скорости и характеристик турбулентности в переменных «закона стенки», рассчитанные с использованием модели турбулентности SST.

1.4 Турбулентный пограничный слой на плоской пластине

Постановка задачи

Рассматривается задача о продольном обтекании плоской пластины [6] однородным набегающим потоком несжимаемой жидкости (см. Рис. 11) при числе Рейнольдса, построенном по скорости набегающего потока U_0 и длине пластины L , составляющем $Re = \frac{U_0 L}{\nu} = 10^7$. В этих условиях практически на всей длине пластины пограничный слой можно полагать турбулентным.



Рис. 11. Схема течения в пограничном слое на плоской пластине.

Расчет производится в прямоугольной области, размером $L_x = L = 5$ м и $L_y = 1$ м (Рис. 12). На входной границе задается однородный профиль скорости $U_0 = 10$ м/с, $V = 0$ м/с и значения характеристик турбулентности, соответствующие отношению турбулентной и молекулярной вязкости $\nu_t/\nu = 0.2$ и интенсивности турбулентности $Tu = 1\%$. На стенке (нижняя граница) задается условие прилипания, а на свободной верхней границе – условие симметрии. Наконец, на выходной границе задается постоянный уровень относительного давления (редуцированного) $p = 0$.

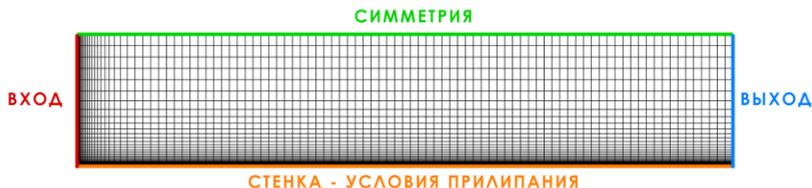


Рис. 12. Расчетная область, граничные условия и пример расчетной сетки для задачи моделирования турбулентного пограничного слоя на плоской пластине.

Задание к лабораторной работе

1. Построить серию последовательно сгущающихся сеток, получить на них сошедшее по итерациям решение с использованием моделей турбулентности из индивидуального варианта и показать, что получено сеточно-независимое решение.

2. Проверить точность предсказания характеристик турбулентного пограничного слоя с использованием выбранной модели турбулентности. Для этого следует:

- Построить зависимость коэффициента трения C_f от продольной координаты (Рис. 13, слева) и сравнить с экспериментальными данными [3] (таблицы 6 - 7 приложения 1) и эмпирической корреляцией Karman-Schoenherr (1.5) – (1.6).

$$Re_x = 2Re_\theta \left(\frac{\log_{10}(2Re_\theta)}{0.242} \right)^2 \quad (1.6)$$

$$C_f = \frac{0.242 \frac{2Re_\theta}{Re_x}}{0.242 + 0.868 \sqrt{\frac{2Re_\theta}{Re_x}}} \quad (1.7)$$

- Вычислить значение коэффициента трения при числе Рейнольдса, построенном по толщине потери импульса $Re_\theta = \frac{U_0 \theta}{\nu}$ и равном 10^4 , сравнить его с экспериментальным значением $C_f = 0.00262$;
- Построить в различных сечениях вдоль пластины зависимости скорости от расстояния до стенки в переменных «закона стенки» $u^+(y^+)$ (Рис. 13, справа), сравнить с экспериментальными данными в сечении $x/L = 0.8774$ [6] и с корреляцией [7]:

$$u^+ = \frac{\ln(1 + 0.4y^+)}{0.41} + 7.8 \left(1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \frac{y^+}{11} e^{-\frac{y^+}{3}} \right) \quad (1.8)$$

3. Выполнить оставшиеся задания согласно индивидуальному варианту.

4. Представить и защитить отчет по работе.

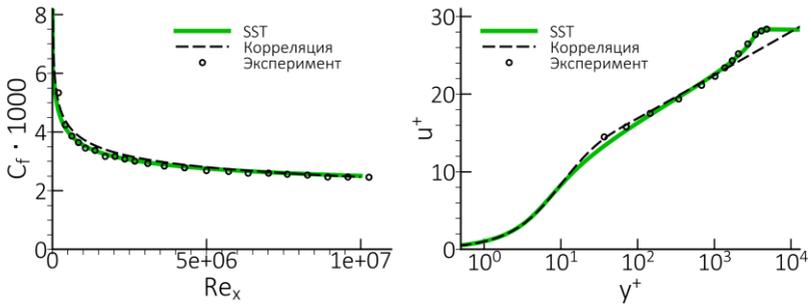


Рис. 13. Сравнение значений коэффициента трения в пограничном слое (слева) и профиля скорости в переменных «закона стенки» при $x/L = 0.8774$ (справа), полученных с использованием модели SST, с экспериментальными данными [6] и корреляциями (1.6) и (1.7).

2 Этапы решения задач

Решение каждой из рассматриваемых задач проводится в следующей последовательности:

1. Создание расчетной области и построение сетки;
2. Настройка параметров расчета:
 - а. выбор модели турбулентности;
 - б. задание граничных и начальных условий;
3. Запуск процесса вычислений и контроль сходимости решения по итерациям;
4. Обработка результатов расчета.

2.1 Создание расчетной области и построение сетки

Построение расчетной области и расчетных сеток можно выполнять в различных программных пакетах, например, таких как Ansys Workbench Meshing, Fluent Meshing Mode, Ansys Gambit и Ansys ICEM CFD (описание работы с ними не входит в цели данного методического пособия). Для решения предлагаемых задач может быть использован любой из этих пакетов. После построения сетки она должна быть импортирована в ANSYS FLUENT через меню команд *File* → *Read* → *Mesh* и выбора соответствующего файла с расширением *.msh.

В данном разделе приведены основные рекомендации, предъявляемые к расчетным сеткам для моделирования турбулентных течений с применением RANS подхода.

При построении сетки необходимо обеспечить достаточное пространственное разрешение всех особенностей течения. При этом наиболее подробная сетка требуется в областях с большими градиентами, таких как слои смещения и область пограничного слоя. К сожалению, зачастую невозможно до проведения расчета сказать, является ли используемая сетка достаточно мелкой для

решения рассматриваемой задачи или нет. В данных условиях обычно проводят исследование сеточной чувствительности получаемого решения.

Для этого строят серию последовательно сгущающихся сеток и получают на них сошедшиеся по итерациям решения. Далее проводят сравнение решений, полученных на различных сетках. При этом обычно сравнивают не только интегральные характеристики (например, толщину струи или пограничного слоя), но и распределения локальных характеристик (профили скорости). Важно, чтобы решения на, как минимум, двух наиболее подробных сетках были практически одинаковы. Сравнение с решением, полученным на наиболее подробной сетке, позволяет оценить погрешность решения на остальных сетках. Выбор подходящей сетки является компромиссом между точностью решения и вычислительными затратами.

Для простых течений к настоящему времени накоплен богатый опыт расчетов, на основе которого можно сформулировать рекомендации по построению сеток.

В частности, для свободных сдвиговых течений рекомендуется обеспечить не менее 20-30 ячеек поперек слоя смещения и не менее 30-40 поперек струи. При этом продольный шаг не должен превышать толщины слоя смещения или струи, обеспечивая разрешение их развития.

Для разрешения всего пограничного слоя, включающего вязкий подслой и логарифмический участок, необходимо не менее 50 точек поперек слоя при умеренных числах Рейнольдса. Использование пристенных функций позволяет сократить количество точек поперек слоя, но их должно быть не менее 10-15. Также, в зависимости от использования условий прилипания или пристенных функций, предъявляются требования к расположению

первого пристеночного узла. Последнее условие обычно формулируется с использованием безразмерного расстояния до стенки y^+ , определяемого, как и в параграфах 1.3-1.4, следующим образом:

$$y^+ = \frac{d_w u_\tau}{\nu} \quad (2.9)$$

d_w – расстояние до стенки, ν – кинематическая вязкость, и u_τ – динамическая скорость, определяемая соотношением:

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho} \quad (2.10)$$

где $\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_w$ – трение на стенке.

При использовании условий прилипания и низкорейнольдсовых моделей турбулентности для разрешения вязкого подслоя и правильного описания трения на стенке необходимо наличие не менее двух точек в вязком подслое ($y^+ < 5$). Обычно в этом случае требуют, чтобы для безразмерного расстояния от центра первой пристеночной ячейки до стенки было выполнено условие $y_1^+ \leq 1$ (Рис. 14, низкорейнольдсовая сетка).

Если применяются высокорейнольдсовые модели турбулентности совместно с пристенными функциями, то центр первой пристеночной ячейки должен находиться в логарифмической области $30 \leq y_1^+ \leq 100$ (Рис. 14, высокорейнольдсовая сетка). Пристенные функции учитывают универсальный «закон стенки» в вязком подслое и буферной области, поэтому их использование позволяет избежать решения уравнений Рейнольдса в непосредственной окрестности стенки.

Следует отметить, что подходы пристенного моделирования EWT (Enhanced Wall Treatment для моделей $k-\varepsilon$) и AWT (Automatic Wall Treatment для моделей $k-\omega$), реализованные в ANSYS FLUENT, обеспечивают автоматическое переключение между

условиями прилипания и пристенными функциями. Это позволяет снять ограничения на величину первого пристеночного шага при использовании низкорейнольдсовых моделей турбулентности.

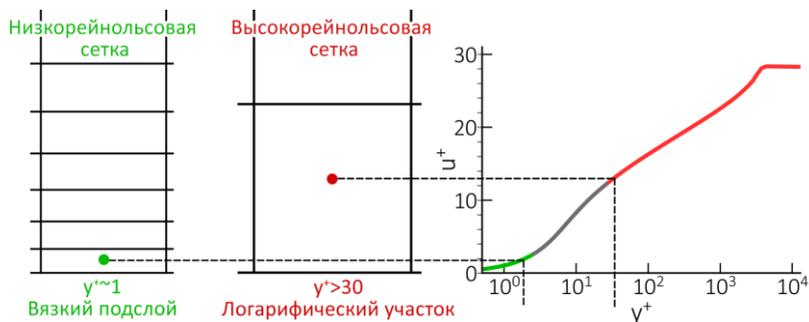


Рис. 14. Характерный вид сеток в пристеночной области, используемых при расчетах с численным разрешением (слева) или без разрешения (справа) вязкого подслоя.

При построении сетки высоту первой пристеночной ячейки Δy_1 для обеспечения необходимого значения y_1^+ можно оценить по известным экспериментальным или расчетным значениям коэффициента трения. На его основе можно рассчитать характерную величину напряжения трения на стенке τ_w и затем использовать выражение $\Delta y_1 = 2 \frac{y_1^+}{\sqrt{\rho \tau_w}}$. В дальнейшем величина первого пристеночного шага может быть скорректирована по результатам расчета.

Для контроля величины y_1^+ ANSYS FLUENT позволяет вывести как поле, так и график распределения безразмерного расстояния до стенки для данной сетки и полученного на ней решения. Для этого в окне выбора физических величин для построения результатов необходимо найти в выпадающих списках *Turbulence* и *Wall Yplus*, как показано на рисунке 15.

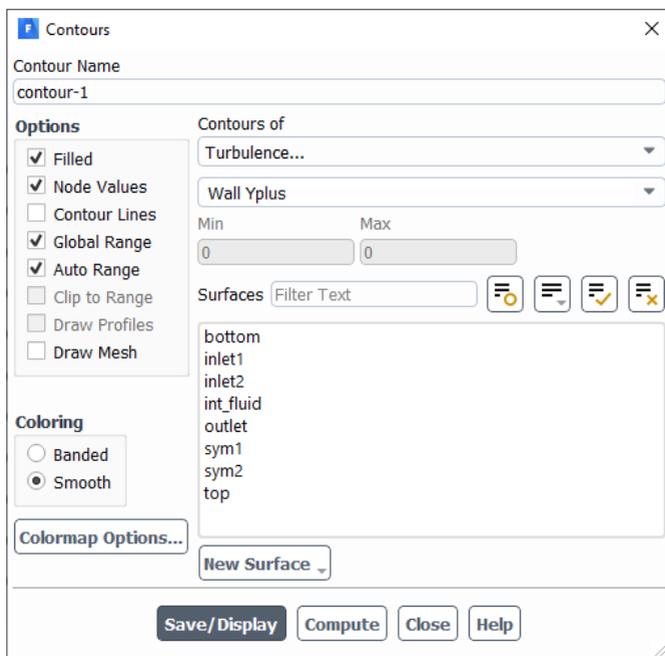


Рис. 15. Окно выбора физических величин для построения полей.

Наконец, важно отметить, что при использовании неструктурированных сеток в пограничных слоях следует использовать так называемые призматические слои. В противном случае точность расчета пограничного слоя может быть очень низкой.

2.2 Моделирование турбулентности

Настройка параметров расчета включает в себя выбор и активацию необходимой модели турбулентности, а также задание граничных условий.

2.2.1 Выбор модели турбулентности

Достаточно полную информацию по полуэмпирическим моделям турбулентности, а также по результатам расчетов различных течений можно найти на сайте NASA [8] (<https://turbmodels.larc.nasa.gov/>).

В пакете ANSYS FLUENT выбор модели турбулентности осуществляется через окно *Viscous Model*, доступ к которому можно получить либо через меню слева (*Outline View*): *Setup* → *Models* → *Viscous*, либо через панель управления сверху: *Physics* → *Models* → *Viscous*...

На 16 показан пример выбора k - ω SST модели турбулентности и набор ее опций. За выбор модели отвечают области, обозначенные цифрами (1) и (2). В области (3) показаны различные настройки модели, а в области (4) есть возможность изменить константы модели.

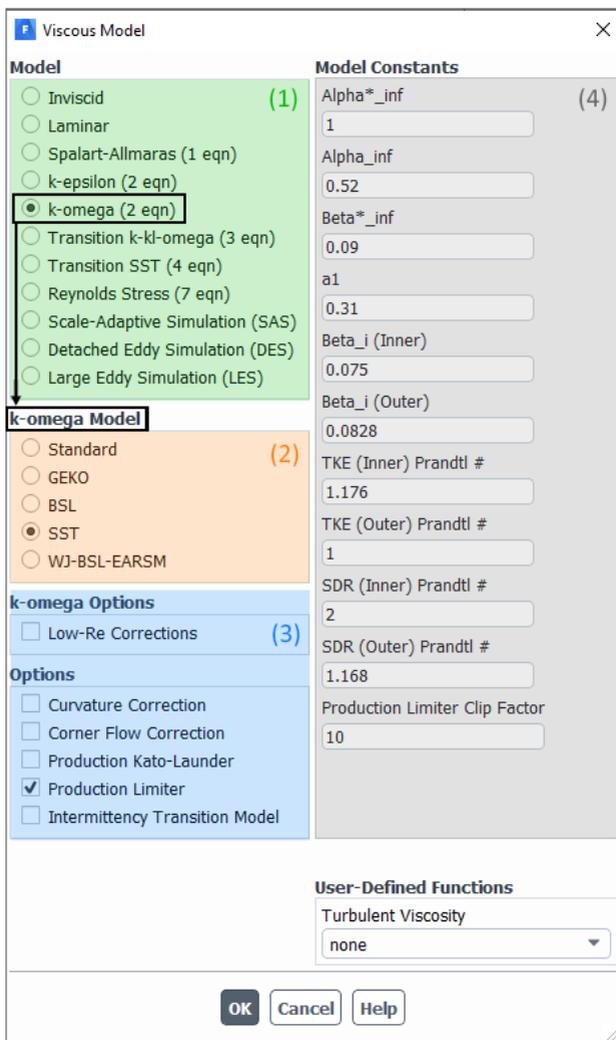


Рис. 16. Окно выбора модели турбулентности и ее настроек на примере k - ω SST модели.

2.2.2 Постановка граничных условий для характеристик турбулентности на входных границах.

В задачах, включенных в программу лабораторных работ, исходными данными при постановке граничных условий для характеристик турбулентности являются интенсивность турбулентности Tu и отношение турбулентной и молекулярной вязкости ν_t/ν , которые связаны с основными переменными моделями турбулентности следующими соотношениями:

$$Tu = \frac{\sqrt{2/3k}}{U_0}, \frac{\nu_t}{\nu} = \frac{k}{\nu\omega} = C_\mu \frac{k^2}{\nu\varepsilon} \quad (2.11)$$

где U_0 - скорость набегающего (входящего) потока.

Используя известные значения этих параметров и выражение (2.10), можно также вычислить кинетическую энергию турбулентности k , скорость ее диссипации ε и удельную скорость диссипации ω , которые необходимы для постановки граничных условий для моделей с двумя уравнениями.

В ANSYS FLUENT при активации RANS моделей турбулентности в граничных условиях для открытых границ появляется дополнительная область, где необходимо выбрать способ задания параметров и ввести значения характеристик турбулентности (см. Рис. 17). Доступны следующие варианты:

Модели с одним уравнением для турбулентной вязкости			
<i>Modified Turbulent Viscosity</i>	<i>Turbulent Viscosity Ratio</i>	<i>Intensity and Length Scale</i>	<i>Intensity and Hydraulic Diameter</i>
Модели с двумя уравнениями семейства k - ε/k - ω			
<i>K and Epsilon/ K and Omega</i>	<i>Turbulent Viscosity Ratio</i>	<i>Intensity and Length Scale</i>	<i>Intensity and Hydraulic Diameter</i>

Здесь

Turbulent Viscosity Ratio (ν_t/ν) - отношения турбулентной и молекулярной вязкости.

Intensity ($Tu = \frac{\sqrt{2/3k}}{U_0}$) - интенсивность турбулентности.

Length Scale ($l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{k}}{C_\mu\omega}$) - «турбулентный» масштаб

длины.

Hydraulic Diameter - гидравлический диаметр.

Modified Turbulent Viscosity - модифицированная турбулентная вязкость при использовании модели турбулентности Спаларта-Аллмараса (SA).

K - кинетическая энергия турбулентности.

Epsilon - скорость диссипации для моделей семейства *k*- ε .

Omega - удельная скорость диссипации для моделей семейства *k*- ω .

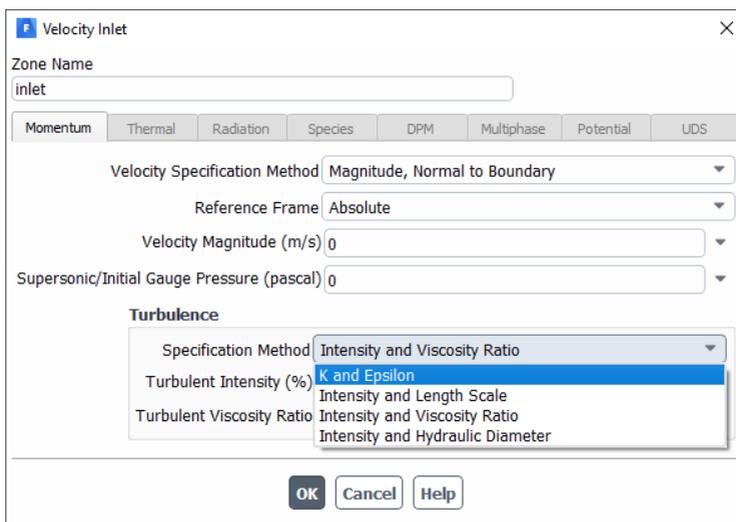


Рис. 17. Выбор способа задания и соответствующих значений характеристик турбулентности на входе в расчетную область.

2.3 Постановка периодических граничных условий

В задаче моделирования установившегося течения в плоскопараллельном канале используются периодические граничные условия с заданным градиентом давления. Алгоритм создания такого типа граничных условий в ANSYS FLUENT заключается в следующем.

Пусть имеются две поверхности расчетной области с именами *periodic-side-1* и *periodic-side-2*, которые представляют собой границы периодического течения. Сначала требуется определить их идентификационные номера *ID*, которые можно посмотреть через меню слева (*Outline View*) в пункте *Boundary Conditions*, выделив соответствующую границу (см. Рис. 18).

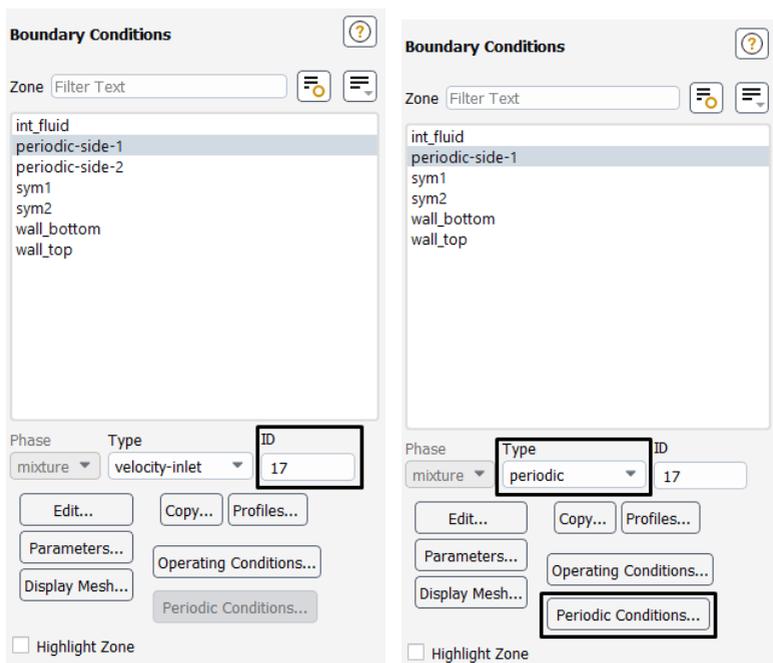


Рис. 18. Окно граничных условий: слева – до создания периодических граничных условий, справа – после.

Далее в консоли ANSYS FLUENT (Text-User-Interface, TUI) выполняется команда `mesh/modify-zones/make periodic` и на запросы последовательно вводятся *ID* номера границ (17 и 13 в примере на рисунке 19) или их названия (*periodic-side-1* и *periodic-side-2*), *no*, *yes*, *yes*. В результате вместо двух границ *periodic-side-1* и *periodic-side-2* останется только та, *ID* номер/название которой был введен первым. При этом, как видно на рисунке 18, тип граничного условия изменится на *periodic* и стала активной кнопка *Periodic Conditions*....

```
> mesh/modify-zones/make-periodic
Periodic zone [()] 17
Shadow zone [()] 13
Rotationally periodic? (if no, translationally) [yes] no
Create periodic zones? [yes] yes
Auto detect translation vector? [yes] yes

      computed translation deltas: 0.150000 0.000000 0.000000
      zone 13 deleted

      created periodic zones.
```

Рис. 19. Пример выполнения команды для создания периодических граничных условий.

При нажатии на кнопку *Periodic Conditions* откроется окно (см. Рис. 20), где необходимо ввести компоненты вектора направления потока (*Flow Direction*), а также градиент давления в Па/м или массовый расход в кг/с. При задании последнего, можно указать начальное приближение для градиента давления, но это не обязательно.

Periodic Conditions [Close]

Type

Specify Mass Flow

Specify Pressure Gradient

Flow Direction

X 1

Y 0

Z 0

Mass Flow Rate (kg/s)

0

Relaxation Factor

0.5

Pressure Gradient (pascal/m)

0

Number of Iterations

1

Upstream Bulk Temperature (k)

300

OK **Update** **Cancel** **Help**

Рис. 20. Окно задания параметров для периодических граничных условий.

2.4 Проведение расчета

При проведении расчета во вкладке методов, меню слева (*Outline View*) пункт *Methods*, можно оставить настройки по умолчанию, пункт *Pseudo Transient* рекомендуется включить. Контроль сходимости решения осуществляется с помощью мониторинга невязок и оценки адекватности получаемых полей рассматриваемой задаче. По умолчанию ANSYS FLUENT останавливает расчет в том случае, когда (некоторым образом нормированные) невязки падают ниже значения 10^{-3} . Рекомендуется уменьшить данное значение до 10^{-5} , 10^{-6} или отключить автоматический контроль невязок и самостоятельно останавливать расчет, когда решение достигнет желаемого уровня сходимости. Последнее производится в окне *Residual Monitors*, доступ к которому можно получить через меню слева (*Outline View*) *Solution* → *Monitors* → *Residual*, либо через панель управления сверху *Solution* → *Reports* → *Residuals*.... Изменение уровня невязок для каждого из решаемых уравнений производится под пунктом *Absolute Criteria* (см. Рис. 21). Отключить контроль невязок можно путем переключения пункта *Convergence Criterion* в положение *None*.

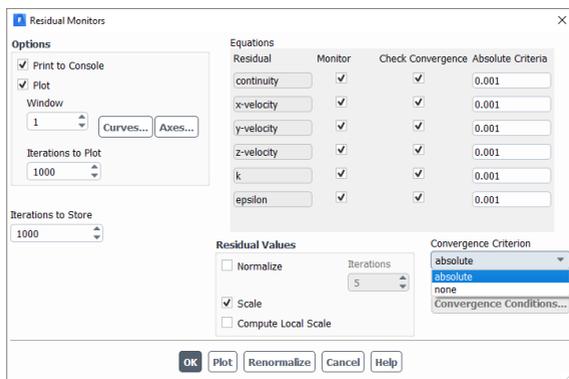


Рис. 21. Окно настройки контроля невязок.

2.5 Обработка результатов

Первичную обработку результатов можно проводить средствами постпроцессора ANSYS FLUENT – пункт *Results* в меню слева (*Outline View*). Для построения графиков и полей для отчета необходимо выгрузить данные в отдельные файлы и дальнейшую работу и анализ проводить с использованием специализированных программных пакетов для 2D и 3D графики, таких как ANSYS CFDPost, Grapher, Origin, GraphPad Prism, SciDAVis, Tecplot, Paraview и т.д.

Экспорт графиков производится в окне их построения, доступ к которому можно получить в меню слева (*Outline View*) или через панель управления сверху *Results* → *Plots* → *XY Plot*. После выбора необходимых переменных надо активировать пункты *Write to File* и *Order Points*, как показано на 22, затем нажать кнопку *Write...*, ввести имя файла и сохранить его. Результаты моделирования, относящиеся к характеристикам турбулентности, можно найти, если выбрать в выпадающем списке пункт *Turbulence...*.

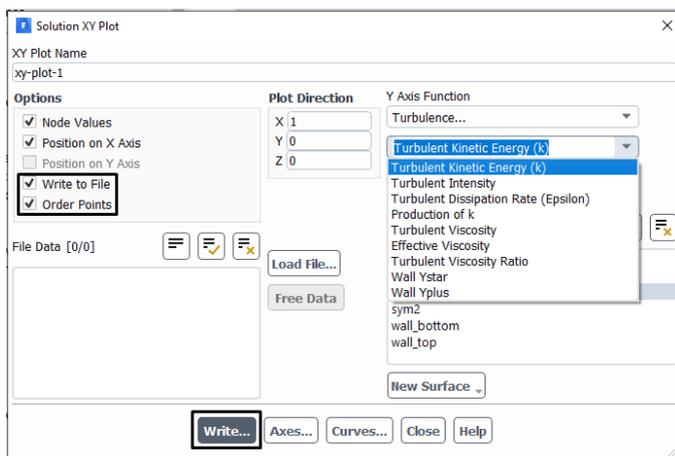


Рис. 22. Окно построения двумерных графиков.

Создание пользовательских переменных на основе полученного решения производится в окне *Custom Field Function Calculator* (см. Рис. 23), доступ к которому можно получить через панель управления сверху *User-Defined* → *Field* → *Functions* → *Custom...*. Здесь необходимо ввести формулу для новой переменной, а также ее название и нажать кнопку *Define*. После этого она будет доступна под своим названием для построения графиков и полей при выборе пункта *Custom Field Functions*.

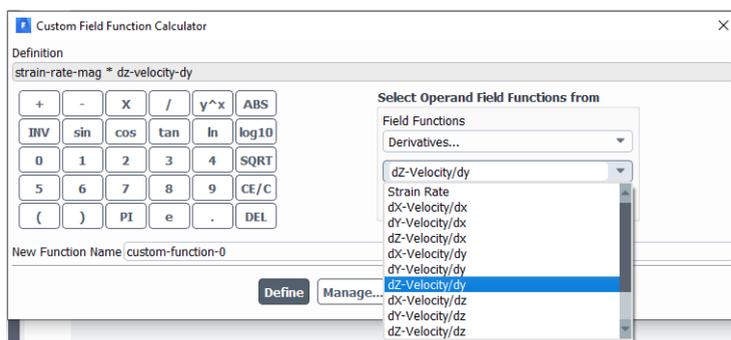


Рис. 23. Окно создания пользовательских переменных на основе полученного решения.

Экспорт полей для Tecplot рекомендуется производить через окно *Export* (см. Рис. 24), доступ к которому можно получить через пункт меню *File* → *Export* → *Solution Data...*. Здесь нужно выбрать тип файла Tecplot, выгружаемые поверхности и результаты решения. Затем нажать кнопку *Write...*, ввести имя файла и сохранить его. Этот способ позволяет сократить размер выгружаемых данных за счет выбора только необходимых переменных для анализа результатов, по сравнению с использованием прямой загрузки **.cas* и **.dat* файлов в Tecplot. Следует отметить, что в некоторых версиях (например, ANSYS FLUENT 2019R3/2020R1) такая возможность

экспорта в Tecplot отсутствует, поэтому построение полей можно проводить в Ansys CFD Post или Paraview.

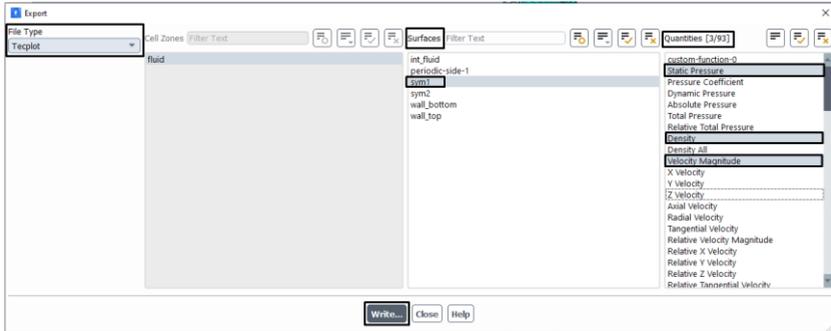


Рис. 24. Окно экспорта полей.

При построении графиков безразмерных переменных (например, коэффициента трения) следует внимательно проверить используемые для этого масштабы. Они доступны к изменению в пункте меню слева (*Outline View*) *Setup* → *Reference Values* или через панель управления сверху *Results* → *Reports* → *Reference Values*....

Список литературы

1. ANSYS Fluent Theory Guide // ANSYS, Inc., 275 Technology Drive Canonsburg, PA 15317, November 2013
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. // 7-е изд., испр. - М.: Дрофа, 2003. - 840 с
3. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л. Современные подходы к моделированию турбулентности // учеб. Пособие – СПб. Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 234 с.
4. Bell J. H. and Mehta R. D. Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers // AIAA Journal, 28(12), 1990. pp. 2034-2042.
5. Albertson M. L., Dai Y. B., Jensen R. A. and Rouse H. Diffusion of submerged jets // Proc. of ASME, Vol. 74, Issue 10, 1948. pp. 1571-1596.
6. Wieghardt K. and Tillmann W. On the turbulent friction layer for rising pressure // NASA TM 1314, 1951. p. 47.
7. Reichardt H. Vollständige darstellung der turbulenten geschwindigkeitsverteilung in glatten leitungen // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 31, 1951. pp. 208–219.
8. [Электронный ресурс] <https://turbmodels.larc.nasa.gov/>

Приложение 1. Экспериментальные данные

Слой смешения [4]

Таблица 1. Толщина слоя смешения.

$x, \text{ м}$	$\delta, \text{ м}$	$x, \text{ м}$	$\delta, \text{ м}$
0.075	0.007	1.077	0.047
0.164	0.011	1.284	0.055
0.573	0.028	1.893	0.080
0.776	0.036	2.499	0.100

Таблица 2. Профили скорости, напряжений Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности.

y/x	U/U_{ref}	V/U_{ref}	$\overline{u'v'}/U_{ref}^2$	k/U_{ref}^2
0.03968	2.5309	-0.00620	-0.00001	0.00054
0.03571	2.5269	-0.00398	-0.00002	0.00082
0.03175	2.5094	-0.00298	0.00000	0.00113
0.02778	2.5153	-0.00107	0.00005	0.00185
0.02381	2.5184	-0.00003	0.00051	0.00354
0.01984	2.5125	0.00247	0.00144	0.00636
0.01587	2.4777	0.00085	0.00305	0.01140
0.01190	2.4023	0.00261	0.00547	0.01835
0.00794	2.3147	-0.00298	0.00651	0.02467
0.00397	2.2152	-0.00140	0.00858	0.03012
0.00000	2.1161	-0.00795	0.00909	0.03318
-0.00397	2.0122	-0.00494	0.00963	0.03484
-0.00794	1.9042	-0.00635	0.00857	0.03197
-0.01190	1.8027	-0.00379	0.00779	0.02781
-0.01587	1.7104	-0.00933	0.00570	0.02138
-0.01984	1.6329	-0.00055	0.00403	0.01521
-0.02381	1.5748	-0.00209	0.00235	0.00928
-0.02778	1.5433	0.00077	0.00107	0.00523
-0.03175	1.5275	0.00083	0.00023	0.00282
-0.03571	1.5207	0.00310	0.00002	0.00156
-0.03968	1.5143	0.00115	-0.00002	0.00100
-0.04762	1.5164	0.00321	-0.00001	0.00042

Турбулентная затопленная струя [5]

Таблица 3. Ширина полоской струи.

x/δ_0	$\delta_{0.5}$
6.7	1.1
13.3	1.45
23.3	2.20
33.3	3.1
50.0	4.68

Таблица 4. Скорость струи на оси.

x/δ_0	U/U_0
0.0	1.0
5.0	1.0
13.3	0.91
23.3	0.68
33.3	0.60
41.7	0.52
50.0	0.48
60.0	0.45
70.0	0.41
80.0	0.39

Таблица 5. Профиль скорости на автомоделном участке в сечении $X/\delta_{0.5} = 50$.

$y/\delta_{0.5}$	U/U_{axis}
0.0	0.995
0.091	0.987
0.172	0.977
0.263	0.952
0.333	0.919
0.455	0.851
0.621	0.758
0.778	0.626
0.939	0.525
1.141	0.399
1.293	0.301
1.449	0.210
1.596	0.141

Турбулентный пограничный слой на плоской пластине [6]

Таблица 6. Коэффициент трения на стенке.

Re_x	C_f
$1.93 \cdot 10^5$	$5.34 \cdot 10^{-3}$
$4.12 \cdot 10^5$	$4.24 \cdot 10^{-3}$
$6.31 \cdot 10^5$	$3.86 \cdot 10^{-3}$
$8.41 \cdot 10^5$	$3.64 \cdot 10^{-3}$
$1.07 \cdot 10^6$	$3.45 \cdot 10^{-3}$
$1.38 \cdot 10^6$	$3.37 \cdot 10^{-3}$
$1.71 \cdot 10^6$	$3.17 \cdot 10^{-3}$
$2.03 \cdot 10^6$	$3.17 \cdot 10^{-3}$
$2.34 \cdot 10^6$	$3.08 \cdot 10^{-3}$
$2.67 \cdot 10^6$	$3.01 \cdot 10^{-3}$
$3.09 \cdot 10^6$	$2.93 \cdot 10^{-3}$
$3.63 \cdot 10^6$	$2.84 \cdot 10^{-3}$
$4.29 \cdot 10^6$	$2.78 \cdot 10^{-3}$
$5.00 \cdot 10^6$	$2.69 \cdot 10^{-3}$
$5.71 \cdot 10^6$	$2.66 \cdot 10^{-3}$
$6.35 \cdot 10^6$	$2.60 \cdot 10^{-3}$
$7.01 \cdot 10^6$	$2.60 \cdot 10^{-3}$
$7.62 \cdot 10^6$	$2.56 \cdot 10^{-3}$
$8.28 \cdot 10^6$	$2.53 \cdot 10^{-3}$
$8.93 \cdot 10^6$	$2.47 \cdot 10^{-3}$
$9.59 \cdot 10^6$	$2.47 \cdot 10^{-3}$
$1.03 \cdot 10^7$	$2.46 \cdot 10^{-3}$

Таблица 7. Профиль скорости в переменных «закона стенки» в сечении $X/L = 0.8774$.

y^+	u^+
36.9	14.5
71.5	15.8
146	17.5
342	19.4
682	21.1
$1.02 \cdot 10^3$	22.3
$1.37 \cdot 10^3$	23.4
$1.71 \cdot 10^3$	24.3
$2.07 \cdot 10^3$	25.2
$2.72 \cdot 10^3$	26.5
$3.43 \cdot 10^3$	27.7
$4.11 \cdot 10^3$	28.2
$4.80 \cdot 10^3$	28.4

Приложение 2. Индивидуальные варианты заданий

Вариант 1

1. Рассчитать задачи о турбулентном слое смешения и струе, с использованием трех моделей турбулентности: Spalart-Allmaras, Realizable k - ϵ и k - ω SST.
2. Рассчитать задачи об установившемся турбулентном течении в плоскопараллельном канале и о турбулентном пограничном слое с использованием тех же самых моделей турбулентности, при этом для модели Realizable k - ϵ использовать пристенное моделирование Enhanced Wall Treatment. Для обеих задачи провести исследование влияния первого пристеночного шага на результаты решения с использованием низкорейнольдсовых ($y_1^+ \leq 1$) и высокорейнольдсовых ($y_1^+ \geq 30$) сеток.
3. Провести сравнительный анализ результатов моделей и представить отчет о каждой задаче.

Вариант 2

1. Рассчитать задачи о турбулентном слое смешения и струе с использованием моделей k - ε Standard и k - ω SST.
2. Рассчитать задачи об установившемся турбулентном течении в плоскопараллельном канале и о турбулентном пограничном слое на плоской пластине с использованием моделей k - ε Standard с пристенными функциями Standard Wall Functions и k - ω SST. Для обеих задач провести исследование влияния первого пристеночного шага на результаты решения с использованием низкорейнольдсовых ($y_1^+ \leq 1$) и высокорейнольдсовых ($y_1^+ \geq 30$) сеток.
3. Для течения в канале и пограничного слоя проверить работоспособность различных пристенных функций для модели k - ε Standard на низкорейнольдсовых и высокорейнольдсовых сетках. Проверяемые пристенные функции:
 - Standard Wall Functions;
 - Enhanced Wall Treatment;
 - Non-Equilibrium Wall Functions;
 - Scalable Wall Functions;
 - Menter-Lechner.
4. Провести необходимый анализ результатов и представить отчет о каждой задаче.

Вариант 3

1. Рассчитать задачи о турбулентном слое смешения и струе с использованием моделей k - ε RNG и k - ω SST.
2. Рассчитать задачи об установившемся турбулентном течении в плоскопараллельном канале и о турбулентном пограничном слое на плоской пластине с использованием моделей k - ε RNG с пристенными функциями Standard Wall Functions и k - ω SST. Для обеих задач провести исследование влияния первого пристеночного шага на результаты решения с использованием низкорейнольдсовых ($y_1^+ \leq 1$) и высокорейнольдсовых ($y_1^+ \geq 30$) сеток.
3. Для течения в канале и пограничного слоя проверить работоспособность различных пристенных функций для модели k - ε RNG на низкорейнольдсовых и высокорейнольдсовых сетках. Проверяемые пристенные функции:
 - Standard Wall Functions;
 - Enhanced Wall Treatment;
 - Non-Equilibrium Wall Functions;
 - Scalable Wall Functions;
 - Menter-Lechner.
4. Провести необходимый анализ результатов и представить отчет о каждой задаче.

Вариант 4

1. Рассчитать задачи о турбулентном слое смешения и струе с использованием моделей k - ε Realizable и k - ω SST.
2. Рассчитать задачи об установившемся турбулентном течении в плоскопараллельном канале и о турбулентном пограничном слое на плоской пластине с использованием моделей k - ε Realizable с пристенными функциями Standard Wall Functions и k - ω SST. Для обеих задач провести исследование влияния первого пристеночного шага на результаты решения с использованием низкорейнольдсовых ($y_1^+ \leq 1$) и высокорейнольдсовых ($y_1^+ \geq 30$) сеток.
3. Для течения в канале и пограничного слоя проверить работоспособность различных пристенных функций для модели k - ε Realizable на низкорейнольдсовых и высокорейнольдсовых сетках. Проверяемые пристенные функции:
 - Standard Wall Functions;
 - Enhanced Wall Treatment;
 - Non-Equilibrium Wall Functions;
 - Scalable Wall Functions;
 - Menter-Lechner.
4. Провести необходимый анализ результатов и представить отчет о каждой задаче.

Вариант 5

1. Рассчитать задачи о турбулентном слое смешения и струе с использованием моделей с использованием трех $k-\omega$ моделей турбулентности: Standard, BSL и SST.
2. Рассчитать задачи об установившемся турбулентном течении в плоскопараллельном канале и о турбулентном пограничном слое на плоской пластине и провести исследование влияния первого пристеночного шага на результаты решения с использованием низкорейнольдсовых ($y_1^+ \leq 1$) и высокорейнольдсовых сетках ($y_1^+ \geq 30$) для всех рассматриваемых моделей.
3. Для течения в канале и пограничного слоя проверить влияние поправки Low-Re Corrections для каждой рассматриваемой модели.
4. Провести необходимый анализ результатов и представить отчет о каждой задаче.

*Кузнецов Егор Александрович
Матюшенко Алексей Алексеевич
Гарбарук Андрей Викторович
Смирновский Александр Андреевич*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТУРБУЛЕНТНОСТИ**

**РАСЧЕТ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ
С ПРИМЕНЕНИЕМ ANSYS FLUENT**

Практикум

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать 28.12.2020. Формат 60×84/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 3,25. Тираж 50. Заказ 3635.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.