Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

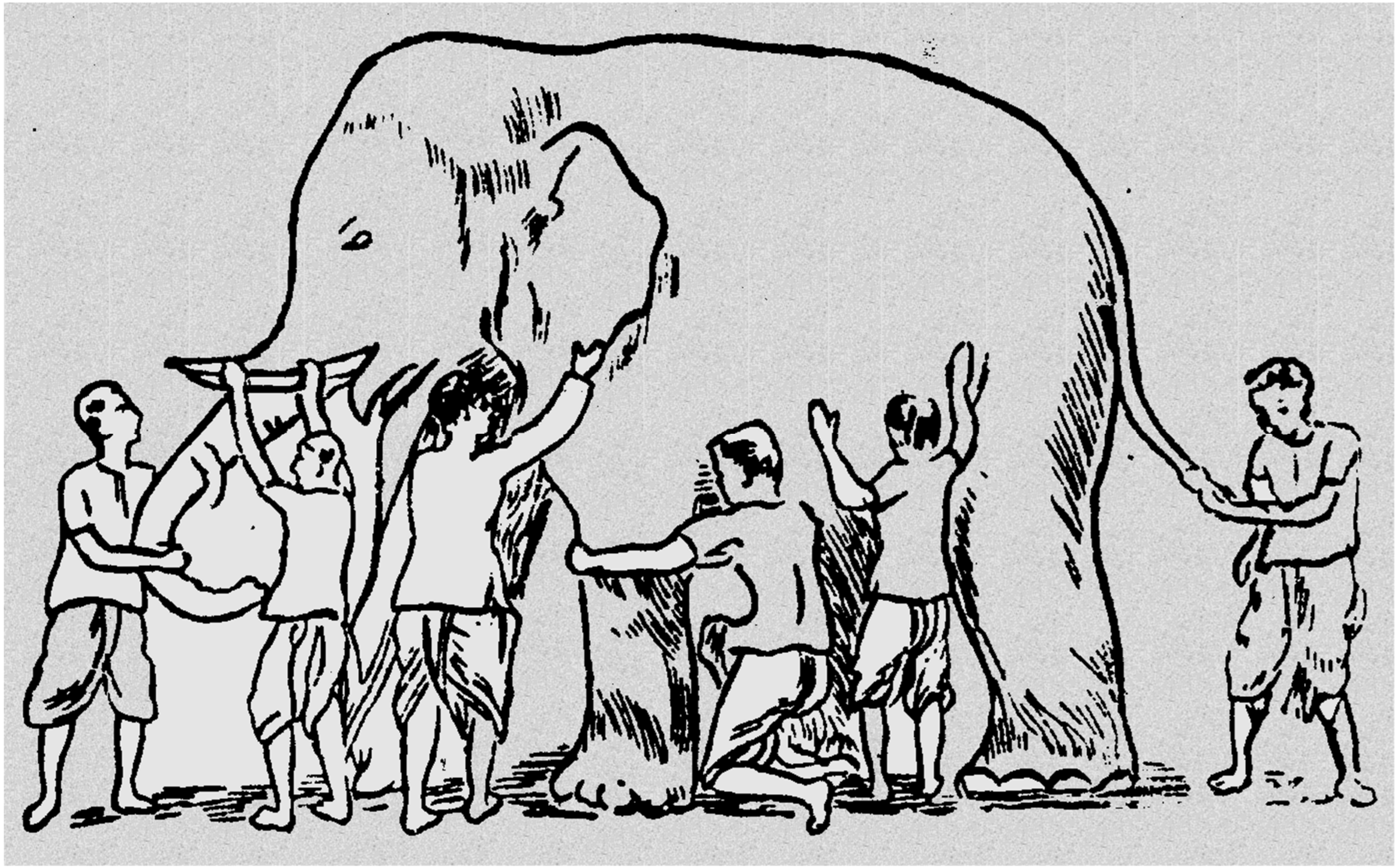
Курс лекций «Моделирование турбулентности»
(http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/turb_models)

Лекция 3

Характеристики турбулентности

Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2023

Характеристики турбулентности



Турбулентность - сложный и многообразный процесс, для описания которого используются различные подходы и понятия

Турбулентные вихри

Турбулентность это совокупность турбулентных вихрей различного размера

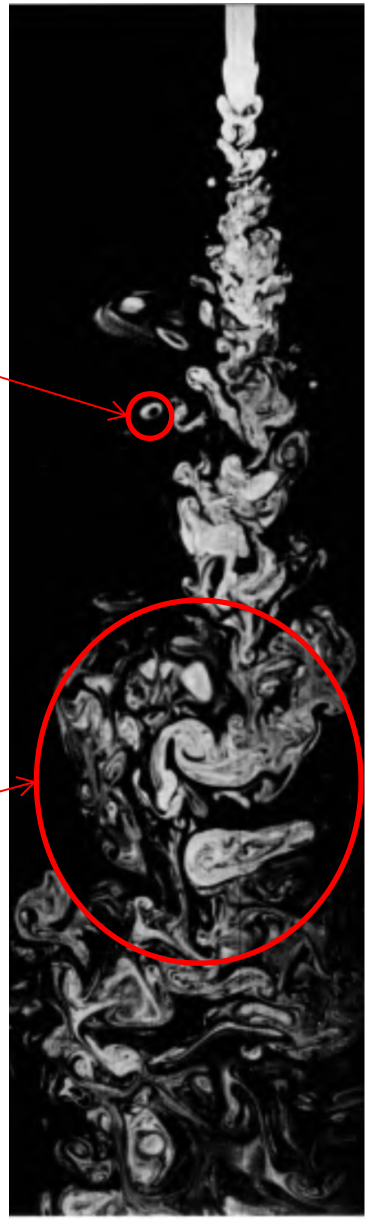
- Начиная с некоторого малого размера вихри диссипируют в тепло под воздействием вязкости. Характерный размер минимальных вихрей определяется колмогоровским масштабом

$$\eta_k = \left(\nu^3/\varepsilon\right)^{1/4}$$

ε – местная скорость диссипации на единицу массы

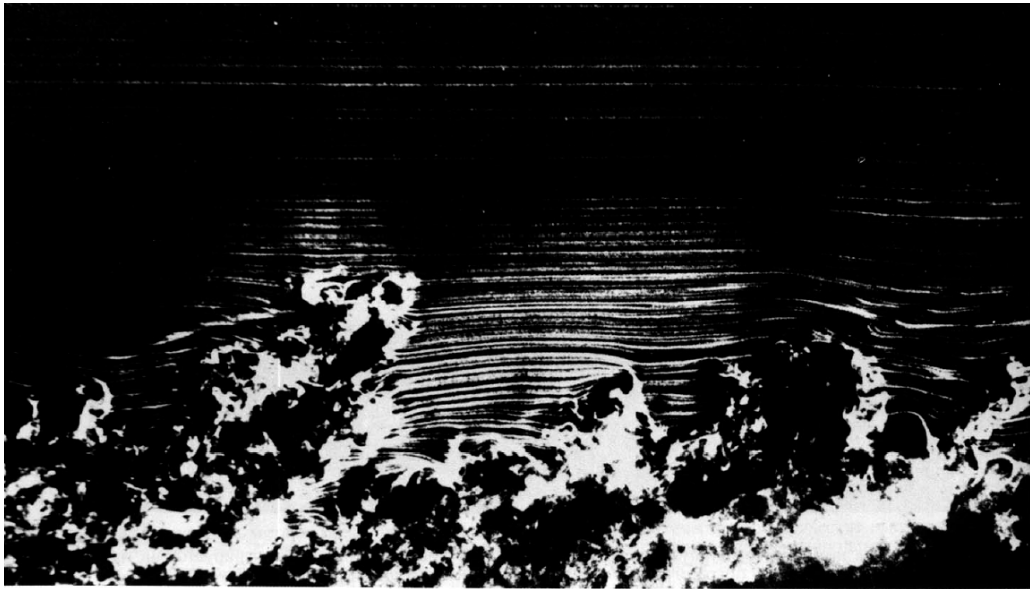
ν – кинематическая вязкость.

- Максимальный размер турбулентных вихрей, существующих в потоке, имеет порядок характерного линейного масштаба течения
  - Когерентные структуры

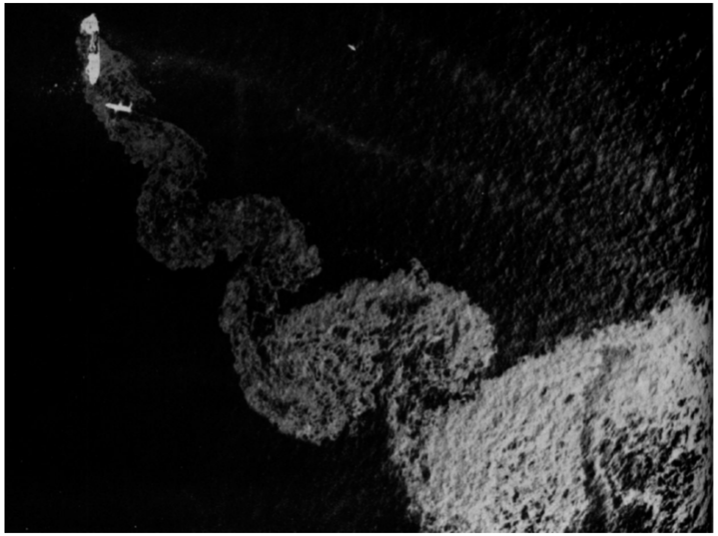


Турбулентные вихри

- Каждый вихрь характеризуется «размером» и «временем жизни», которые не могут быть определены точно.
- Вихри, которые переносят наибольшее количество энергии называются «энергонесущими»
    - ➢ Понятиями «характерный размер» и «характерное время жизни» вихрей обычно характеризуют средний размер и среднее время жизни «энергонесущих» вихрей
        - ✓ Линейный масштаб турбулентности (теория Прандтля)



Вихри в турбулентном пограничном слое



Вихри в следе за плохо обтекаемым телом

Линейный масштаб турбулентности

- Прандтль, основываясь на аналогии молекулярного и турбулентного переноса, ввел понятие “mixing length” l_{mix} (путь смешения или путь перемешивания)
  - Расстояние, которое «турбулентный вихрь» пролетает, не теряя своей идентичности
    - ✓ Аналог длины свободного пробега молекул
- Со временем понятие «путь смешения» было вытеснено понятием «линейный масштаб турбулентности»
  - Размер наиболее типичного (среднего) вихря – «энергонесущего»

Статистическая теория турбулентности

- Поскольку пульсации газодинамических величин в турбулентном потоке являются случайными величинами, одним из подходов к изучению турбулентности является метод математической статистики
- В рамках статистической теории турбулентности мгновенное поле течения делится на осредненное и пульсационное

$$u = \bar{u} + u'$$

- Определение осредненного движения зависит от выбранного способа осреднения:
  - по ансамблю
  - по времени
  - по пространству
  - по фазе
- Наиболее корректным (но трудно реализуемым) является осреднение по ансамблю (по реализациям)
  - Обычно используют другие способы осреднения

Условия Рейнольдса

Одним из важнейших свойств осреднения, используемым при получении уравнений статистической теории турбулентности, являются условия Рейнольдса

$$\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$\overline{af} = a\overline{f}$$

$$\overline{a} = a$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s}$$

$$\overline{\overline{f}\,g} = \overline{f}\,\overline{g}$$

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}$$

$$\overline{f'} = 0$$

$$\overline{\overline{f}\,\overline{g}} = \overline{f}\,\overline{g}$$

$$\overline{\overline{f}\,h'} = 0$$

$$\overline{fg} = \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f'g'}$$

Осреднение по времени (по Рейнольдсу)

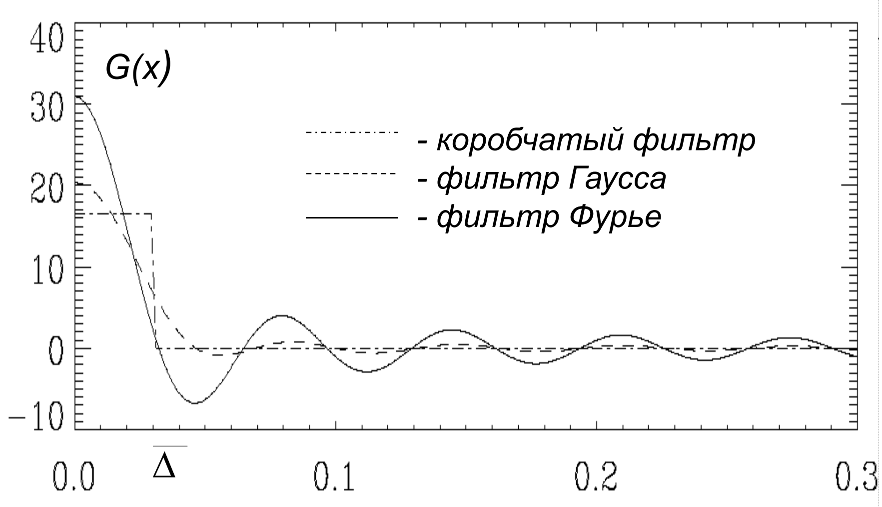
$$\overline{a}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} a(\tau) \cdot d\tau$$

- Для удовлетворения условиям Рейнольдса период осреднения должен быть много больше максимального периода турбулентных пульсаций – времени автокорреляции
  - При рассмотрении стационарных (в среднем) течений время осреднения может быть сколь угодно большим ($T = \infty$)
  - В нестационарном случае период осреднения должен быть много меньше характерных времен изменения нестационарных величин
    - ✓ В нестационарном случае не всегда возможно подобрать период T такой, чтобы выполнялись условия Рейнольдса

Осреднение по пространству (фильтрация)

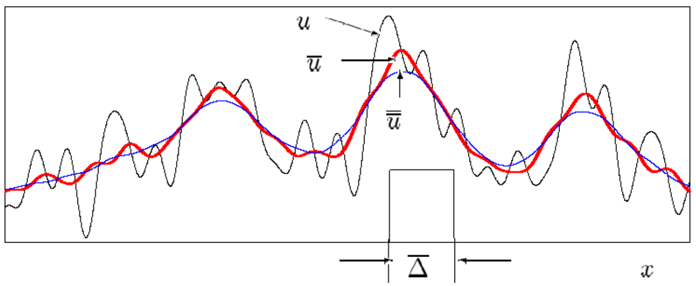
$$\overline{f}(r,t) = \int\limits_D G(r-r',\overline{\Delta}) f(r',t) dr'^3$$

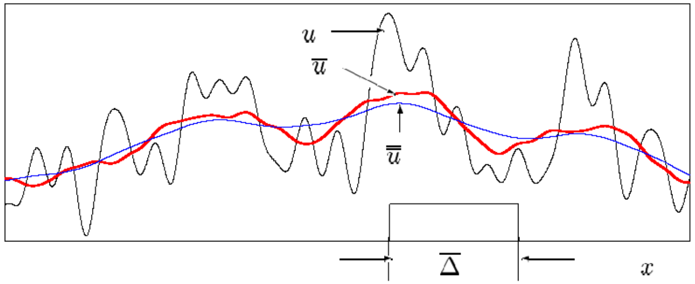
D - область решения,
$\underline{G}$ - функция фильтра,
Δ - ширина фильтра.



Условие нормировки $\int\limits_D G\left(r-r',\overline{\Delta}\right) dr'^3 = 1$

приводит к $\lim\limits_{\overline{\Delta}\to 0} \overline{f}\left(r,t\right) = \lim\limits_{\overline{\Delta}\to 0} \int\limits_D G\left(r-r',\overline{\Delta}\right) f\left(r',t\right) dr'^3 = \int\limits_D \delta\left(r-r'\right) f\left(r',t\right) dr'^3 \equiv f\left(r,t\right)$





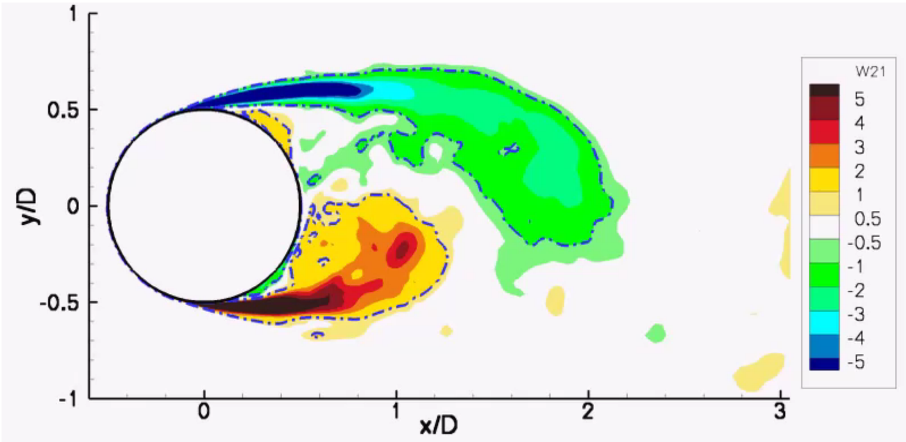
Для фильтрации $\overline{\overline{u}} \neq \overline{u}, \overline{u'} \neq 0, \overline{u\overline{v}} \neq \overline{u}\,\overline{v}$

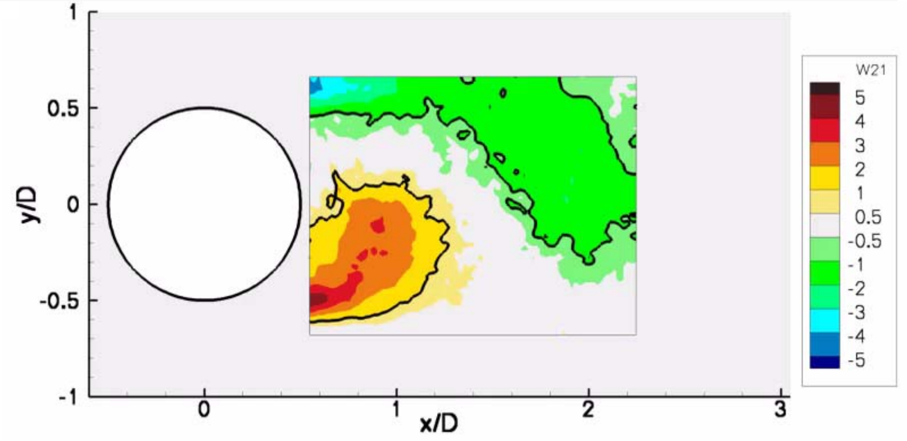
Процедура фильтрации не удовлетворяет условиям Рейнольдса

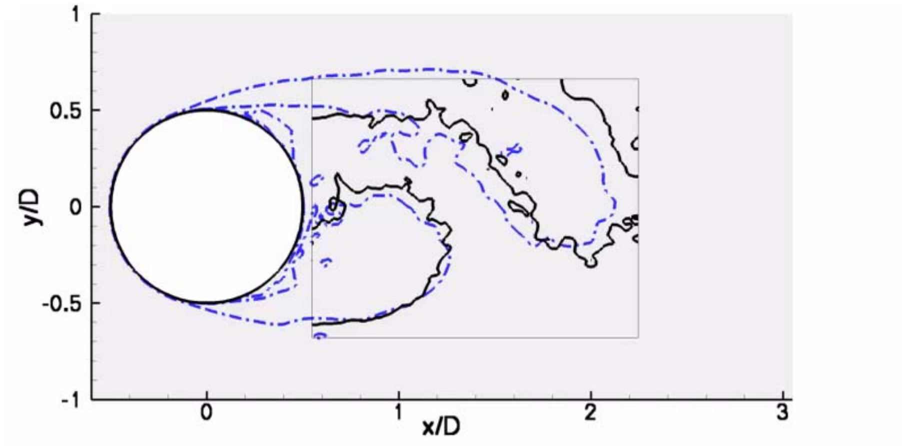
Осреднение по фазе

- Применяется в случае периодических течений
  - При отсутствии периода и достаточно большом N совпадает со средним по времени

$$\bar{f}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(t+nT)$$







Сравнение расчетных и экспериментальных осреднённых по фазе характеристик при турбулентном обтекании цилиндра

Корреляции и корреляционные коэффициенты

При выбранном способе осреднения можно определить

- корреляции (статические моменты) $\overline{u'_i u'_j}$
- корреляционные коэффициенты $R_{ij} = \dfrac{\overline{u'_i u'_j}}{\sqrt{\overline{u'^2_i}}\sqrt{\overline{u'^2_j}}}$

Применение процедуры осреднения к уравнениям Навье-Стокса позволяет получить систему уравнений для осредненных характеристик вида $\overline{u_i}$.

- RANS - уравнения Рейнольдса (осреднение по времени)
- LES - отфильтрованные уравнения Навье-Стокса (фильтрация)

К сожалению, эти системы уравнений не замкнуты

- Необходимо построение замыкающих соотношений
  - Полуэмпирические модели турбулентности

Интегральные масштабы турбулентности

Можно определить двухточечные корреляционные коэффициенты. Точки могут быть разнесены

в пространстве
$$R_{ij}^{x}(\Delta x)=\frac{\overline{u_i'(x)u_j'(x+\Delta x)}}{\sqrt{\overline{u_i'^2(x)}}\sqrt{\overline{u_j'^2(x+\Delta x)}}}$$

во времени
$$R_{ij}^{t}(\Delta t)=\frac{\overline{u_i'(t)u_j'(x+\Delta t)}}{\sqrt{\overline{u_i'^2(t)}}\sqrt{\overline{u_j'^2(x+\Delta t)}}}$$

На их основе можно определить интегральные масштабы турбулентности

$$\Lambda=\int_0^\infty R_{ij}^{x}(dx)dx \qquad \mathrm{T}=\int_0^\infty R_{ij}^{t}(dt)dt$$

Такие масштабы используются в теории однородной изотропной турбулентности. При моделировании турбулентности эти масштабы не используются из-за сложности их вычисления.

Кинетическая энергия турбулентности

Одной из наиболее важных характеристик является

кинетическая энергия турбулентности $K_t = \dfrac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$

Инвариантна (не зависит от выбора системы координат)

- Является инвариантом тензора вторых одноточечных моментов
  - тензор Рейнольдсовых напряжений $\overline{u_i' u_j'}$

Большинство полуэмпирических моделей турбулентности содержат уравнения для определения кинетической энергии турбулентности

Одномерный энергетический спектр

- Пульсации в точке можно разложить в ряд Фурье

$$u'(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot \cos(2\pi f_k t) + b_k \cdot \sin(2\pi f_k t)\right]$$

где $T=t_1\text{-}t_2$ – используемый временной промежуток,
$f_k=k/T$ – адресуемый набор частот.

- Коэффициенты ряда Фурье определяются как

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} u'(\tau)\cdot\cos(2\pi f_k \cdot \tau)\cdot d\tau, \quad b_k = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} u'(\tau)\cdot\sin(2\pi f_k \cdot \tau)\cdot d\tau$$

- Амплитуда $B_k = B(f_k) = 2\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ неудобна при рассмотрении сплошных спектров.
  - Зависит от используемого временного промежутка T
- Более удобной величиной является спектральная плотность (одномерный энергетический спектр) $E_1(f_k) = \frac{T}{2}(B(f_k))^2$
  - Интеграл равен дисперсии (среднему квадрату $\overline{u'^2} = \int_0^{\infty} E_1(f)\cdot df$ пульсаций - удвоенной кинетической энергии)
  - Можно определить энергию, приходящуюся на интервал частот $[f_1, f_2]$ $\quad \mathrm{E}[f_1, f_2] = \frac{1}{2}\int_{f_1}^{f_2} E_1(f)\cdot df$

Трехмерный энергетический спектр

Аналогично можно определить пространственный одномерный спектр

$$u'(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot \cos(2\pi\lambda_k x) + b_k \cdot \sin(2\pi\lambda_k x)\right], \quad L = x_2 - x_1, \quad \lambda_k = \frac{k}{L}$$ - волновое число

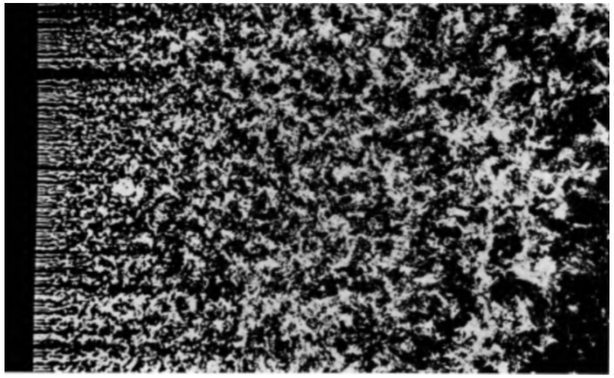
$$E_1(f_k) = \frac{T}{2}\left(2\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\right)^2 \qquad \overline{u'^2} = \int_0^{\infty} E_1(\lambda)\cdot d\lambda \qquad \mathrm{E}[\lambda_1, \lambda_2] = \frac{1}{2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_1(\lambda)\cdot d\lambda$$

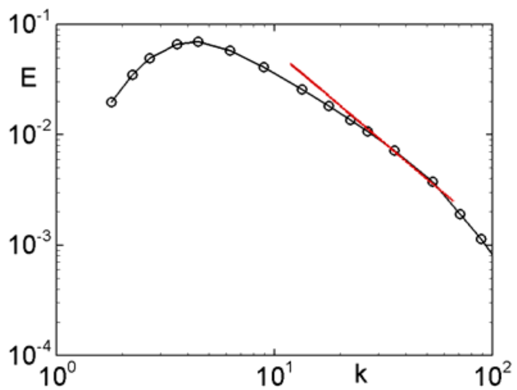
На практике обычно используют пространственный трехмерный энергетический спектр $E(k)$, k – волновое число

- Для его вычисления необходимо трехмерное преобразование Фурье
- Интеграл равен кинетической энергии турбулентности $K_t = \int_0^{\infty} E(k)\cdot dk$
- Можно определить долю энергии турбулентных вихрей заданного размера $[l_1, l_2]$ $K_t[l_1, l_2] = \int_{k_2}^{k_1} E(k)\cdot dk, \quad k_1 = \frac{1}{l_1}, \quad k_2 = \frac{1}{l_2}$

Типы энергетических спектров

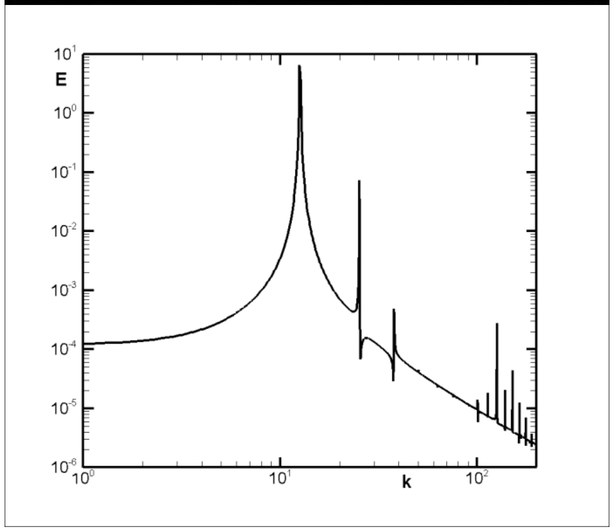
Сплошной





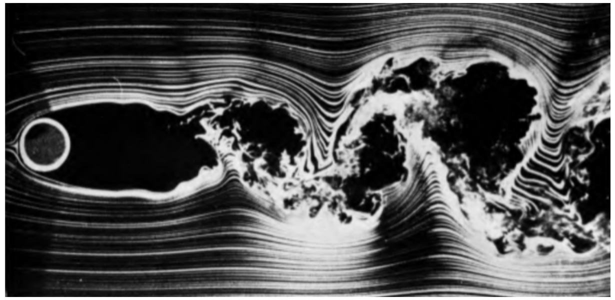
вырождение однородной изотропной турбулентности

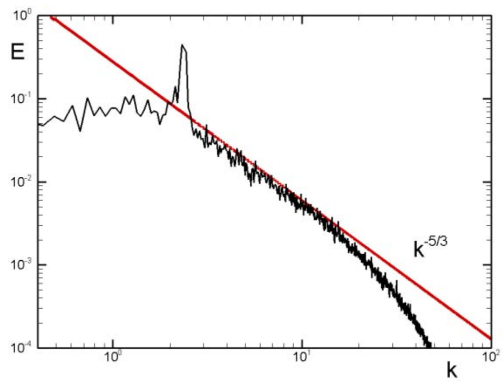
Линейчатый



ламинарное обтекание цилиндра

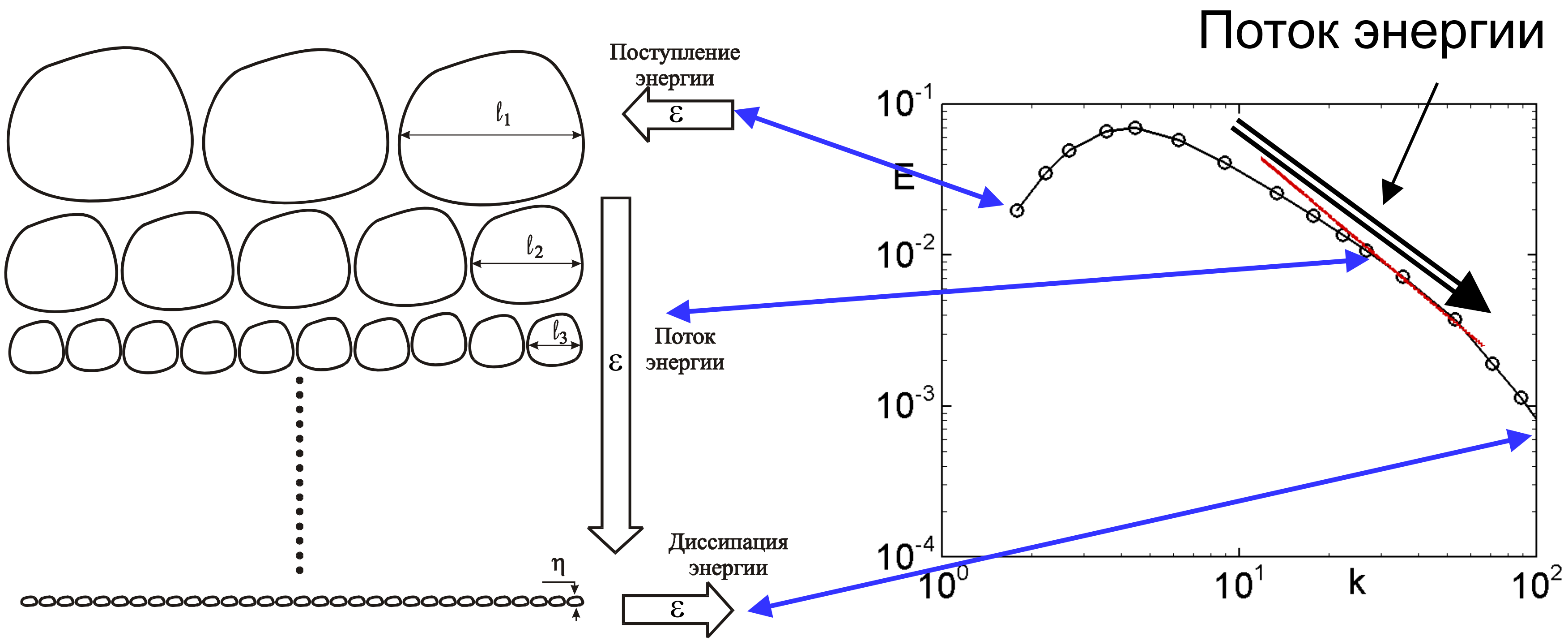
Смешанный





турбулентное обтекание цилиндра

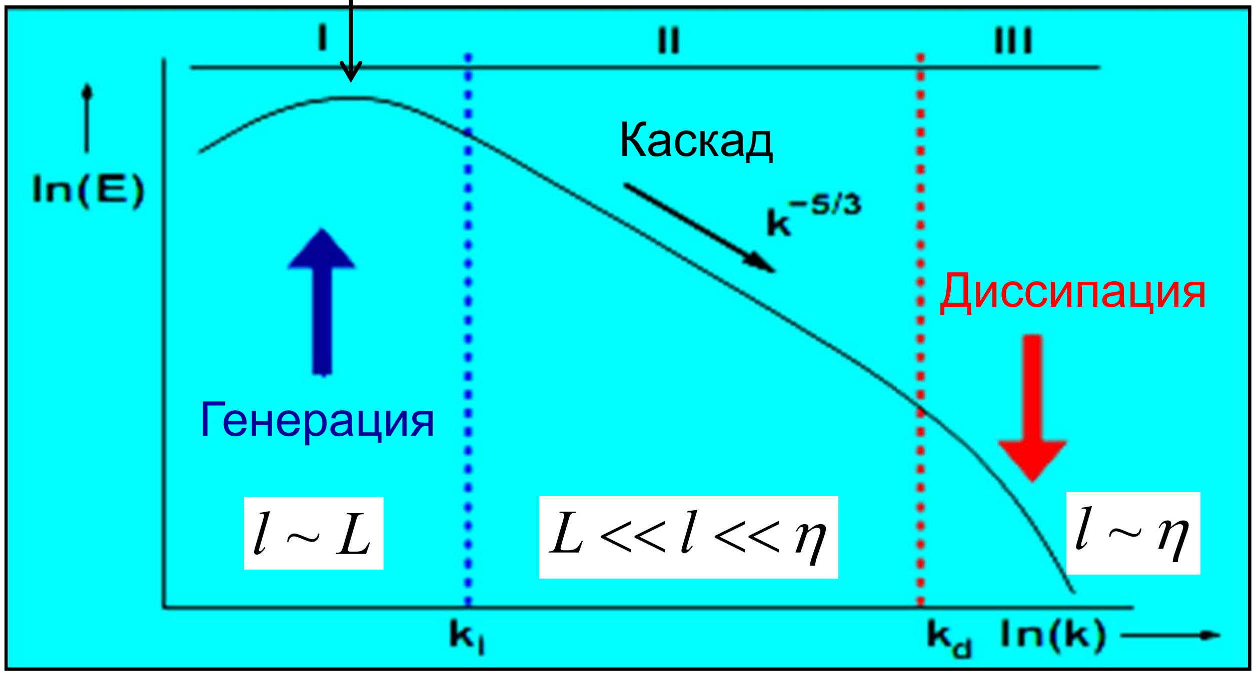
Каскадный перенос энергии



- Энергия поступает от осредненного потока к наиболее крупным вихрям
- Последовательно передается все более и более мелким вихрям (“каскадный перенос”)
- Наиболее мелкие (колмогоровские) вихри диссипируют и передают энергию тепловому движению

Области энергетического спектра

Наиболее энергонесущие вихри
(их размер равен линейному масштабу турбулентности)



Генерационный интервал

Инерционная область

Диссипативный интервал

$$\eta = 1/k_D = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$$

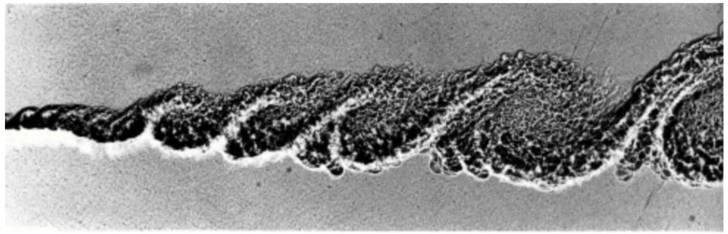
η - масштаб Колмогорова

ε - скорость диссипации энергии

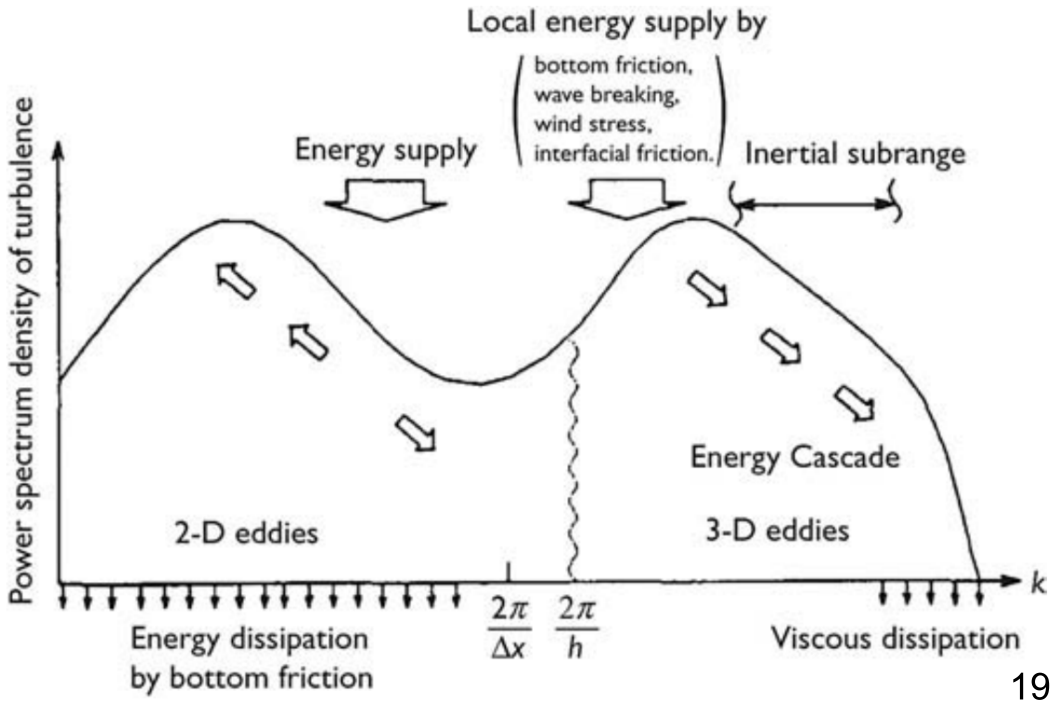
L – характерный размер задачи

«Двумерные» вихри

- В некоторых случаях в течении появляются упорядоченные двумерные вихри (часто называемые «когерентные структуры»)
  - ➢ Дорожка Кармана
  - ➢ Сворачивание слоя смешения



  - ➢ …
- Для этих вихрей характерны другие законы развития
  - ➢ Не «каскадный перенос энергии»!
    - ✓ Часто энергия передается от мелких вихрей к крупным – «vortex pairing»



Резюме

- Турбулентность – сложное явление и для его описания используются различные подходы
- Турбулентность можно рассматривать как совокупность вихрей различного размера, от колмогоровского масштаба до когерентных структур
- Все переменные в турбулентном потоке можно разделить на осредненную и пульсационную составляющие
- Турбулентные пульсации как случайные величины рассматриваются в рамках статистической теории турбулентности, дисперсия характеризует их интенсивность
- Энергетический спектр характеризует распределение энергии по волновым числам
- Процесс передачи энергии от крупных вихрей к мелким играет фундаментальную роль и называется каскадный перенос энергии