

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Моделирование турбулентности»
(http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/turb_models)

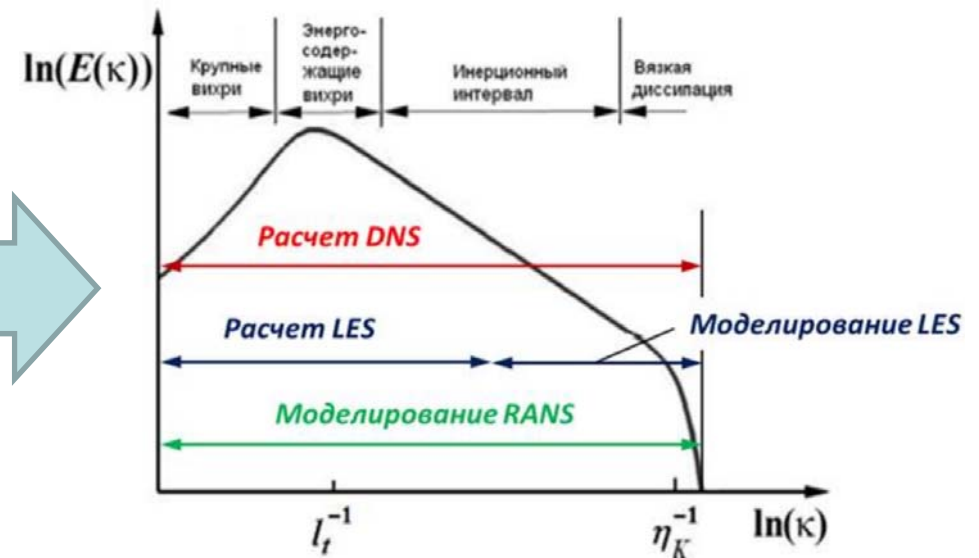
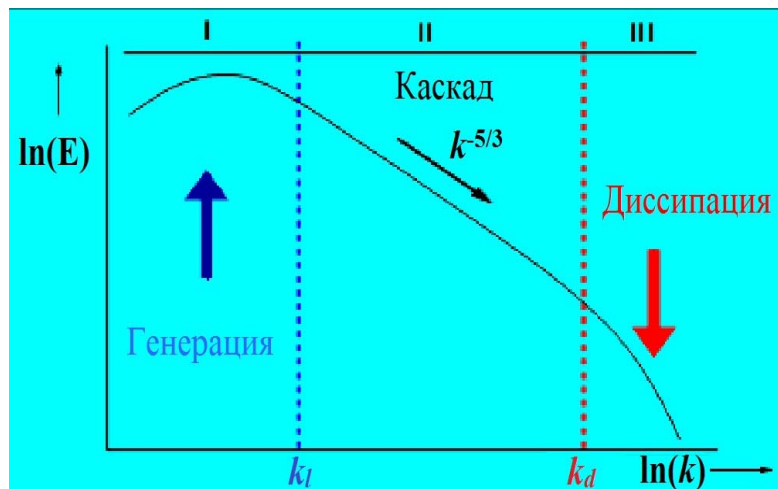
Лекция 4

Обзор методов расчета турбулентных течений

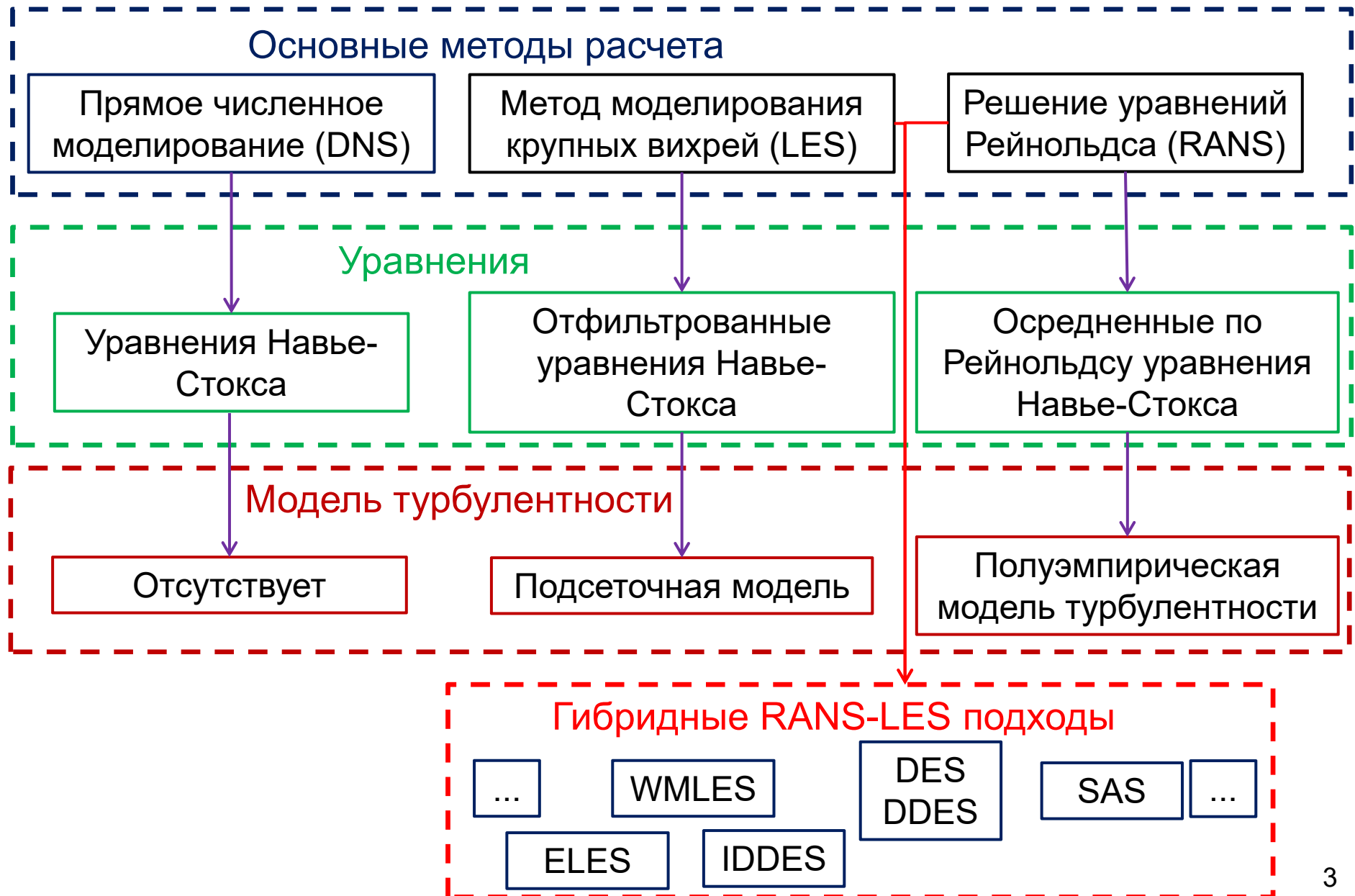
Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2023

Классификация методов расчета турбулентных течений

Один из возможных способов классификации методов расчета турбулентных течений базируется на соотношении “точно” разрешаемой и моделируемой частей энергетического спектра турбулентности



Методы расчета турбулентных течений



Прямое численное моделирование (DNS)

Решение уравнений Навье-Стокса на сетке с шагами (включая шаг по времени) достаточно малыми для точного разрешения всех турбулентных вихрей



Шаг сетки должен быть порядка колмогоровского масштаба

$$\eta_k = \left(\nu^3 / \varepsilon \right)^{1/4}$$



Вычислительные затраты пропорциональны количеству узлов в каждом направлении и количеству шагов по времени

Затраты $\sim \eta_k^{-4} \sim \nu^{-3} \sim Re^3$



Сегодня DNS применим только при весьма ограниченных числах Рейнольдса

Предел возможностей DNS в настоящий момент

- Возможности DNS ограничены не только затратами
 - Лишь некоторые CFD коды поддерживают массивно-параллельную работу
 - Узкими местами также является препроцессинг и постпроцессинг
 - ✓ Построение сеток и обработка результатов
- Для задач простой геометрии зачастую для DNS используют спектральные коды
 - Это невозможно для более сложных задач
- На настоящий момент предел примерно составляет
 - Для течений в трубе и плоском канале $Re_{\tau} \sim 5000-10000$ ($Re_{\tau} = u_{\tau} (H/2)/\nu$ или $Re_{\tau} = u_{\tau} R/\nu$)
 - ✓ Это примерно на порядок меньше того, что можно достичь в эксперименте
 - ✓ Размер сеток достигает 80 миллиардов !!!
 - Для крыловых профилей $Re \sim 10^6$
 - ✓ Размер расчетных сеток больше миллиарда

Наш опыт: трансзвуковое обтекание выпуклости на цилиндрической поверхности

- Постановка задачи соответствует эксперименту Vachalo-Johnson
- Характерной особенностью течения является отрыв пограничного слоя под влиянием скачка уплотнения
- Расчеты были выполнены с использованием зонного RANS-DNS-IDDES
 - Для этого расчета использовалась сетка размером 8.3 миллиарда узлов
 - Для расчета требуются все ресурсы кластера СПбПУ в течении нескольких месяцев

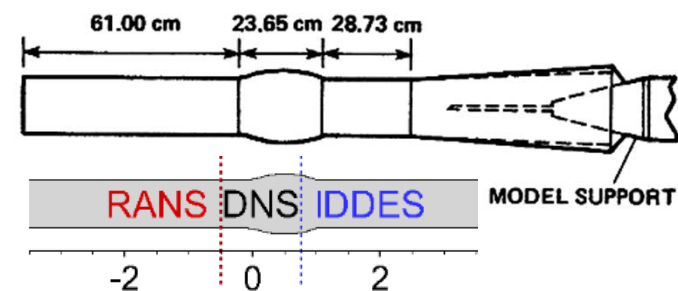
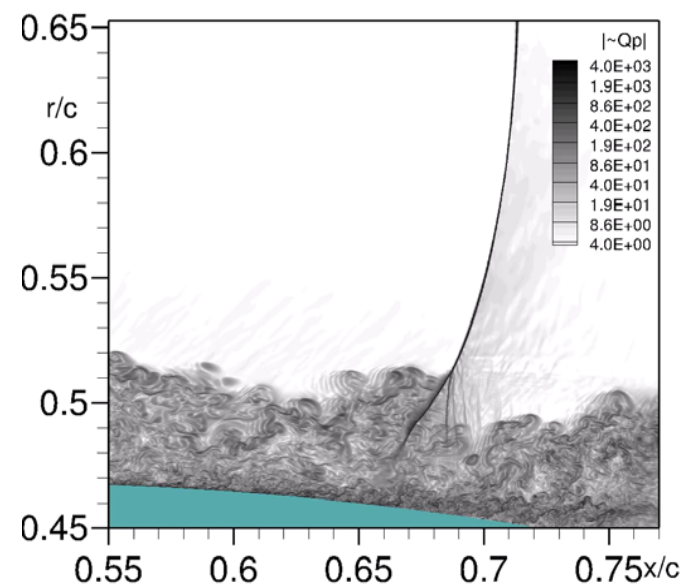


Схема экспериментальной установки и расчета двухстадийным зонным DNS-IDDES



Визуализация течения

Метод моделирования крупных вихрей Large Eddy Simulation (LES)

Крупные вихри получают энергию от осредненного потока



Структура крупных вихрей существенно зависит от рассматриваемого течения

Мелкие вихри получают энергию через каскадный перенос

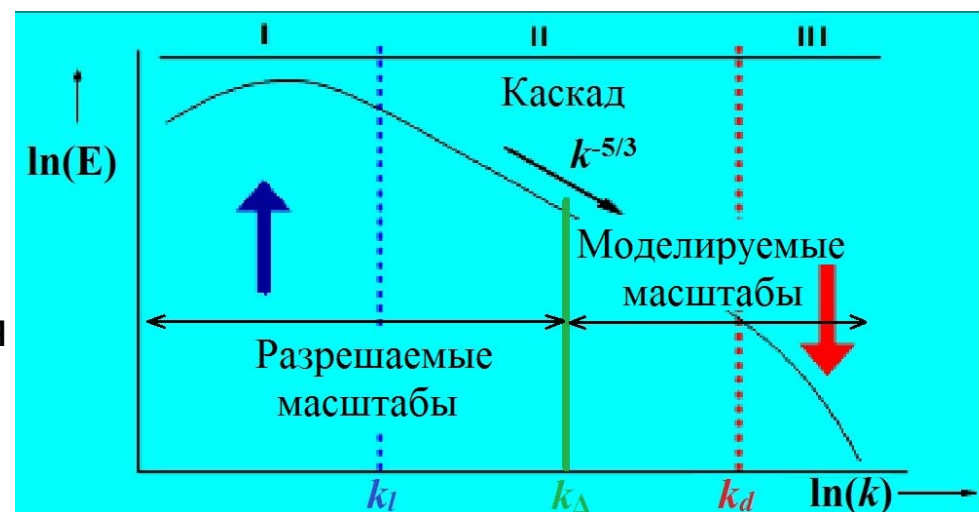


Их структура существенно более универсальна

Моделирование мелких вихрей гораздо более перспективно,
чем моделирование крупных

Метод моделирования крупных вихрей

- Процедура фильтрации: разделение вихрей на «крупные» (больше некоторого размера Δ) и «мелкие»
- Отфильтрованные уравнения: построение такой системы уравнений, в рамках которой крупные вихри будут разрешаться точно
- Подсеточная модель: Описание «мелких» вихрей и их взаимодействия с крупными моделируется. Для надежного универсального моделирования этих вихрей граница между «крупными» и «мелкими» вихрями должна лежать в автомодельной области спектра (обычно полагают, что в ней справедлив закон « $-5/3$ »)
 - При низких числах Рейнольдса спектр может не содержать автомодельной области
 - ✓ В частности, это всегда происходит в пристенной области пограничного слоя



Энергетический спектр турбулентности

Процедура фильтрации

- Процедура фильтрации позволяет отделить «крупные» вихри от «мелких»

$$\bar{f}(r, t) = \int_V G(r, r') f(r', t) dr'^3, \quad f = \bar{f} + f',$$

- Применение процедуры фильтрации к уравнениям Навье-Стокса приводит к получению так называемых отфильтрованных уравнений
- Отфильтрованные уравнения замыкаются при помощи «подсеточной» модели турбулентности

Моделируются вихри,
размер которых меньше
размера фильтра Δ



Размер фильтра Δ в
явном виде входит в
модель

Практическая реализация LES

Зачастую на практике не пользуются явными фильтрами, а роль фильтра играет размер ячейки сетки (например $\Delta = \sqrt[3]{V}$)



- Подсеточная модель содержит в явном виде размер ячейки сетки
- Вихри, которые меньше размера ячейки сетки естественным образом отфильтровываются
- Для точного разрешения вихрей, ненамного превосходящих размер ячейки, необходимо использование современных низкодиссипативных схем

Подсеточная модель Смагоринского

- Наиболее часто используется при проведении LES

- Основана на гипотезе Буссинеска $-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$

$$\overline{\Delta} = (\Delta_x \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z)^{1/3} = Vol^{1/3}$$
$$\nu_t = (C_{SMAG} \overline{\Delta})^2 |\overline{S}|$$
$$|\overline{S}| = \sqrt{2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

При расчете пристенных течений используют демпфирующую функцию и ограничивают линейный масштаб формулой Прандтля

$$\nu_t = f_{VD} \cdot (\Delta_{LES})^2 |\overline{S}| \quad f_{VD} = 1.0 - \exp(-(y^+ / A^+)^3), \quad A^+ = 25$$

$$\Delta_{LES} = \min(\kappa \cdot d_w, C_{SMAG} \Delta)$$

Калибровка константы

- в однородной изотропной турбулентности $C_{SMAG}=0.2$
- для пристенных течений используют $C_{SMAG}=0.1$

Свойства LES

- При использовании достаточно мелких сеток и хороших схем обеспечивает очень высокую точность
- Требует решения трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса на подробных сетках

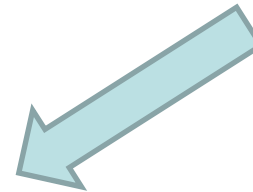


Использование LES сопряжено со значительными затратами

При приближении к стенке
характерный размер вихрей
уменьшается



Возрастают
требования к сетке



Вычислительные затраты особенно
существенны в окрестности стенки

Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS)

- Использование процедуры осреднения по Рейнольдсу

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} a(\tau) \cdot d\tau$$

- Применение осреднения по Рейнольдсу к уравнениям Навье-Стокса приводит к получению уравнений Рейнольдса, которые не замкнуты
- Замыкание уравнений Рейнольдса (определение турбулентных напряжений $\tau_{ij}^T = \rho \overline{u'_i u'_j}$) производится с помощью полуэмпирических моделей турбулентности

В RANS все турбулентные вихри моделируются

Гипотеза Буссинеска

- Буссинеск (1877) предложил ввести дополнительную (турбулентную) вязкость
- Большинство моделей турбулентности используют обобщенную гипотезу Буссинеска

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

- Линейная связь между тензором Рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций
 - Аналог реологического закона Ньютона для молекулярной вязкости
- Достоинства
 - Использование гипотезы Буссинеска позволяет сократить количество определяемых в процессе моделирования переменных с 6 до 1.
 - Недостатки
 - В некоторых случаях гипотеза Буссинеска несправедлива и ее использование приводит к получению качественно неверного результата

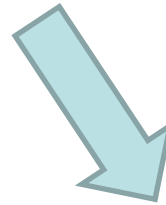
Полуэмпирические модели турбулентности

- Модели, использующие гипотезу Буссинеска (линейные модели, EVM). Обычно классифицируются по количеству дифференциальных уравнений переноса
 - Алгебраические модели
 - Модели с одним уравнением
 - ✓ модель Спаларта-Аллмареса SA
 - ✓ модель Секундова ν_t -92
 - Модели с двумя уравнениями
 - ✓ Модели типа $k-\varepsilon$
 - ✓ Модели типа $k-\omega$
 - Модель Ментера SST
 -
- Модели рейнольдсовых напряжений (нелинейные модели)
 - Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений (DRSM)
 - Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (ARSM)
 - Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM)
 - ✓ Нелинейные модели (NLM)

Достоинства RANS

Позволят использовать упрощенные уравнения

- двумерные
- стационарные



RANS гораздо более экономичен,
чем LES и, тем более, DNS



Является наиболее широко
применяемым методом при
практических расчетах
турбулентных течений

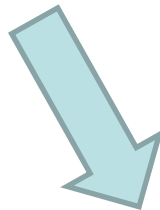
Недостатки RANS

Не существует «универсальной модели турбулентности»,
каждая модель имеет свою «область применимости»



Даже при тщательном выборе модели невозможно
гарантировать высокую точность расчета

Накоплен огромный опыт применения моделей турбулентности



Лучшие модели турбулентности обеспечивают достаточно высокую
точность расчета некоторых классов течений, в частности,
пограничных слоев

Гибридные методы

Создание метода объединяющего преимущества RANS и LES

RANS

Высокая точность расчета пристенных течений при скромных требованиях к сетке

LES

Высокая точность расчета отрывных течений



Гибридные методы

Компромисс:

Позволяют получать достаточно точные результаты для сложных (в первую очередь отрывных) течений при приемлемых затратах

**Вычислительные ресурсы и перспективы
практического применения различных методов
моделирования турбулентных течений
(P. Spalart, 2000)**

Метод	Необходимое число узлов сетки	Необходимое число шагов по времени	Готовность
2D Steady RANS	10^5	$10^{3.5}$	1980
3D Steady RANS	10^7	10^3	1985
3D Unsteady RANS	10^7	$10^{3.5}$	1995
DES (гибридный метод)	10^8	10^4	2000
LES	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
DNS	10^{16}	$10^{7.7}$	2080

Резюме

- Существует множество методов расчета турбулентных течений. Обычно чем точнее метод, тем больше вычислительных ресурсов требуется для его использования
- В прямом численном моделировании (DNS) разрешаются все турбулентные масштабы, поэтому применять его возможно только при низких числах Рейнольдса
- Метод моделирования крупных вихрей (LES) тоже достаточно точен, но затраты пока неприемлемы для решения прикладных задач
- В настоящее время активно развиваются гибридные методы – поиск компромисса между точностью и экономичностью
- На практике чаще всего используется метод решения уравнений Рейнольдса
- Уравнения Рейнольдса замыкаются при помощи полуэмпирических моделей турбулентности
- Обычно используется гипотеза Буссинеска – линейная связь между напряжениями Рейнольдса и тензором скоростей деформаций