Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Моделирование турбулентности»
(http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/turb_models)

Лекция 5

Уравнения Рейнольдса

Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations (RANS)

Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2023

Уравнения Навье-Стокса

- Уравнения Навье-Стокса справедливы при выполнении двух условий:
  - Среда должна быть сплошной
    - ✓ (число Кнудсена $Kn = l_f / L << 1$)
  - Выполняется обобщенный реологический закон Ньютона
    - ✓ $P_{ij} = 2\mu S_{ij} - p\delta_{ij}$

- В случае несжимаемой жидкости

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \dfrac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \end{cases} \quad \text{где} \quad t_{ij} = 2\mu S_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

  - Конвективные слагаемые можно записать в консервативной форме

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}$$

  - Вязкие слагаемые можно упростить

$$\frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

Условия Рейнольдса

- Уравнения Рейнольдса получаются из уравнений Навье-Стокса при помощи осреднения
  - Осреднение может проводиться различными способами
    - по ансамблю
    - по времени
    - по пространству
- Независимо от типа осреднения для получения уравнений Рейнольдса необходимо, чтобы осреднение удовлетворяло условиям Рейнольдса

$$\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$\overline{af} = a\,\overline{f}$$

$$\overline{a} = a$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s}$$

$$\overline{\overline{f}\,g} = \overline{f}\,\overline{g}$$

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}$$

$$\overline{f'} = 0$$

$$\overline{\overline{f}\,\overline{g}} = \overline{f}\,\overline{g}$$

$$\overline{\overline{f}\,h'} = 0$$

$$\overline{fg} = \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f'g'}$$

Осреднение по Рейнольдсу (по времени)

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} a(\tau)\cdot d\tau$$

- Для удовлетворения условиям Рейнольдса период осреднения должен быть много больше максимального периода турбулентных пульсаций – времени автокорреляции
  - ➢ При рассмотрении стационарных (в среднем) течений время осреднения может быть сколь угодно большим ($T = \infty$)
  - ➢ В нестационарном случае период осреднения должен быть много меньше характерных времен изменения нестационарных величин
    - ✓ Не всегда возможно подобрать период T такой, чтобы выполнялись условия Рейнольдса

  - ➢ Применение нестационарных уравнений Рейнольдса (URANS) не всегда обосновано
    - ✓ Тем не менее, этот подход широко распространен

Уравнения Рейнольдса

Вывод уравнений см. в упражнениях по курсу

- Уравнения Рейнольдса получаются в результате осреднения по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i' u_j'}\right) \end{cases}$$

  - Отличаются от уравнений Навье-Стокса только слагаемым $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\rho\overline{u_i' u_j'}$
- Эти уравнения не замкнуты.
  - Для их замыкания необходимо определить тензор турбулентных (Рейнольдсовых) напряжений

$$\tau_{ij}^T = \rho\overline{u_i' u_j'}$$

    - ✓ Симметричный
      - 6 независимых компонент
  - След $\left\{\tau_{ij}^T\right\} = \left\{\rho\overline{u_i' u_j'}\right\} = \rho\overline{u_i' u_i'} = 2K_t$
- Рейнольдсовы напряжения по форме – вязкие, по природе конвективные

Уравнения движения сжимаемого газа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \\ \dfrac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \dfrac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} H) = \nabla \cdot [\vec{u} \cdot \boldsymbol{\tau} + \vec{q}] \\ \rho = pm/(RT) \end{cases}$$

- Полная энергия $E = e + 0.5(u^2 + v^2 + w^2) = C_v T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$
- Полная энтальпия $H = E + p/\rho = h + 0.5(u^2 + v^2 + w^2) = C_p T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$
- Тензор вязких напряжений $\boldsymbol{\tau} = 2\mu(T)\left(\mathbf{S} - \dfrac{1}{3}\mathbf{I}\,\nabla \cdot \vec{u}\right)$
  - ➢ Тензор скоростей деформаций $\mathbf{S} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla \vec{u} + [\nabla \vec{u}]^t\right)$
    - ✓ Иногда обозначают $\mathbf{S} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla \vec{u} + [\nabla \vec{u}]^t\right) - \dfrac{1}{3}\mathbf{I}\,\nabla \cdot \vec{u}$
- Тепловой поток $\vec{q} = -\lambda(T)\nabla T$
  - ➢ Аналогия Рейнольдса $\lambda(T) = \dfrac{C_P \mu(T)}{\Pr}$

Из-за переменной плотности эти уравнения существенно более нелинейные, чем уравнения для несжимаемой жидкости

Осреднение по Фавру

- В сжимаемом случае осреднение по Рейнольдсу приводит к появлению корреляций плотности вида $\overline{\rho' u'}$
  - ➢ Во многих случаях этими членами уравнений просто пренебрегают
    - ✓ Гипотеза Морковина: при не слишком высоких числах Маха при моделировании турбулентности можно не учитывать влияние пульсаций плотности
- Более оправданным подходом является использование взвешенного осреднения (осреднения по Фавру)

$$\tilde{a}(t) = \frac{\overline{\rho a}}{\overline{\rho}}$$

  - ➢ Не привносит дополнительного физического смысла, а просто удобное математическое упрощение
  - ➢ Свойства осреднения по Фавру

$$a = \tilde{a} + a''$$

$$\overline{\rho a''} = 0$$

$$\overline{\rho a} = \overline{\rho}\tilde{a} = \overline{\rho}\,\overline{a} + \overline{\rho' a'} \Rightarrow a - a'' = \tilde{a} = \overline{a} + \frac{\overline{\rho' a'}}{\overline{\rho}} \Rightarrow \overline{a''} = -\frac{\overline{\rho' a'}}{\overline{\rho}} \neq 0$$

Уравнения Рейнольдса сжимаемого газа

При получении уравнений часть переменных осредняется по Рейнольдсу

$$\begin{cases} \rho = \overline{\rho} + \rho_i' \\ p = P + p' \\ q_i = \overline{q_i} + q_i' \end{cases}$$

а другая часть по Фавру

$$\begin{cases} u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \\ h = \tilde{h} + h'' \\ e = \tilde{e} + e'' \\ T = \tilde{T} + T'' \end{cases}$$

Подстановка этого разложения в уравнения сжимаемого газа и осреднение последних по Рейнольдсу дает
уравнения Рейнольдса для сжимаемого газа

Уравнения Рейнольдса для сжимаемого газа

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_i\right) = 0 \\
\dfrac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_i\right)}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j\right) = -\dfrac{\partial P}{\partial x_i} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\tau_{ji}} + \overline{\tau_{t,ji}}\right] \\
\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\bar{\rho}\left(\tilde{e} + \dfrac{\tilde{u}_i\tilde{u}_i}{2}\right) + \bar{\rho}k\right] + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\bar{\rho}\tilde{u}_j\left(\tilde{h} + \dfrac{\tilde{u}_i\tilde{u}_i}{2}\right) + \bar{\rho}\tilde{u}_j k\right] = \\
= \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{q_j} + \overline{q_{t,j}} + \overline{\tau_{ji}u_i''} - \dfrac{\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}}{2}\right] + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\tilde{u}_i\left(\overline{\tau_{ji}} + \overline{\tau_{t,ji}}\right)\right] \\
\bar{\rho} = Pm/(R\tilde{T})
\end{cases}
$$

- Тензор турбулентных напряжений $\tau_{t,ij} = -\overline{\rho u_i'' u_j''}$
- Турбулентный тепловой поток $q_{t,i} = -\overline{\rho u_i'' h''}$
- Отличия исходных и полученных уравнений более существенны, чем в несжимаемом случае
  - В уравнение энергии входят конвекция и диффузия кинетической энергии турбулентности $k = \dfrac{1}{\bar{\rho}}\dfrac{\tau_{t,ii}}{2} = \dfrac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2\bar{\rho}}$
    - ✓ Этими слагаемыми обычно пренебрегают

Уравнения для рейнольдсовых напряжений
(вторых одноточечных моментов)

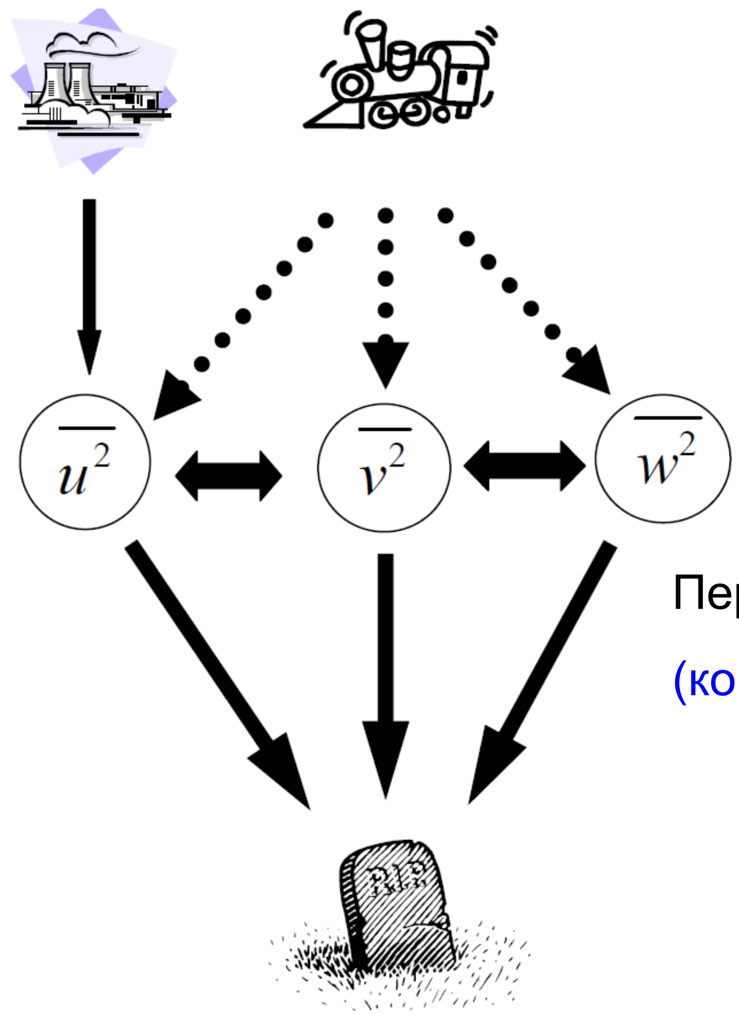
- Эти уравнения могут быть получены из уравнений Навье-Стокса с использованием процедуры осреднения по Рейнольдсу
- В случае несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i'u_j'} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'} = \frac{\partial}{\partial x_k} D_{ijk} + P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}$$

- ➢ Диффузия $D_{ijk} = \nu \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'} - \overline{u_i'u_j'u_k'} - \frac{1}{\rho}\left(\delta_{ik}\overline{u_j'p'} + \delta_{jk}\overline{u_i'p'}\right)$
  - ✓ Молекулярный и турбулентный диффузионный перенос
- ➢ Генерация $P_{ij} = -\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j'u_k'}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}$
  - ✓ Получение энергии от осредненного течения
- ➢ Корреляция давление-скорость деформации $\Phi_{ij} = \overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)}$
  - ✓ Перераспределение энергии между компонентами тензора
- ➢ Диссипация $\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$
  - ✓ Передача энергии в тепло за счет вязких сил
- ➢ Для замыкания системы уравнений необходимо промоделировать турбулентную диффузию, корреляцию давление – скорость деформации и диссипацию

Уравнения для рейнольдсовых напряжений

Генерация Конвекция и диффузия основным потоком



Перераспределение пульсациями давления

(корреляция давление-скорость деформации)

Диссипация в тепло за счет вязкости

Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности

- Уравнение для кинетической энергии турбулентности $k = \dfrac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$ получается путем свертки уравнений для рейнольдсовых напряжений
- В случае несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} + D_j\right) - \varepsilon$$

  - Турбулентная диффузия $D_j = -\overline{u'_j\left(\dfrac{u'_i u'_i}{2} + \dfrac{p'}{\rho}\right)}$
    - ✓ Молекулярный и турбулентный диффузионный перенос
  - Генерация $P_k = -\overline{u'_i u'_j}\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}$
    - ✓ Получение энергии от осредненного течения
  - Диссипация $\varepsilon = -\nu\overline{\dfrac{\partial u'_i}{\partial x_j}\dfrac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$
    - ✓ Передача энергии в тепло за счет вязких сил
- В этом уравнении также много неизвестных: турбулентная диффузия, диссипация и замыкающие соотношения для напряжений Рейнольдса

Эффекты сжимаемости

- В сжимаемом случае в уравнении для кинетической энергии турбулентности появляются два новых слагаемых
  - Равны нулю в несжимаемом случае

$$\bar{\rho}\frac{\partial k}{\partial t}+\bar{\rho}\tilde{u}_j\frac{\partial k}{\partial x_j}=\tau_{t,ji}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}-\overline{\tau_{ji}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tau_{ji}u_i''}-\frac{1}{2}\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}-\overline{p' u_i''}\right)-\overline{u_i''}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}+\overline{p'\frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}$$

    - ✓ Работа давления
    - ✓ Давление-растяжение
  - Работа давления есть и в уравнении переноса рейнольдсовых напряжений

$$\frac{\partial \tau_{t,ij}}{\partial t}+\frac{\partial \tilde{u}_j\tau_{t,ij}}{\partial x_j}=P_{ij}+\varepsilon_{ij}-\Phi_{ij}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\left(\overline{\tau_{kj}u_i''+\tau_{ki}u_j''}\right)+D_{ijk}\right)+\overline{u_i''}\frac{\partial P}{\partial x_j}+\overline{u_j''}\frac{\partial P}{\partial x_i}$$

  - Давление-растяжение следует из свертки корреляции давление-скорость деформации $\Phi_{ij}=\overline{p'\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right)}$

Модели турбулентности

- Попытка замкнуть уравнения для рейнольдсовых напряжений на основе формализма Рейнольдса приводит к появлению еще большего числа неизвестных
    - ➢ Необходимо привлекать дополнительные соображения
        - ✓ Эмпирические закономерности
- Формулы для замыкания уравнений Рейнольдса (для определения $\tau_{ij}^T = \rho\overline{u_i' u_j'}$) называются полуэмпирические модели турбулентности
    - ➢ Устанавливают связь между тензором Рейнольдсовых напряжений τ_{ij}^T и параметрами осредненного потока.
- В настоящее время разработаны сотни моделей турбулентности, но ни одна из них не является универсальной, т.е. подходящей для любых течений

Проблемы полуэмпирических моделей турбулентности

- Полуэмпирические модели турбулентности выражают тензор рейнольдсовых напряжений через параметры осредненного потока
  - Наличие такой зависимости неочевидно
- В большинстве моделей эта связь является локальной
  - Удобно для использования в расчетах
  - Вызывает еще больше вопросов

Пример:

- Рассмотрим модельную задачу, в которой $u' = \sin(\omega t), v' = \sin(\omega t + \varphi_0)$
  - Рассмотрим корреляцию $\overline{u'v'} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u'v' \cdot dt \xrightarrow{T\to\infty} 0.5 \cdot \cos(\varphi_0)$
- Видно, что искомая корреляция зависит только от сдвига фазы и не связана со средними величинами
  - Причина такого поведения в значительной степени состоит в неслучайности рассмотренных пульсаций
    - ✓ В этом случае статистические подходы плохо применимы

Несовершенство моделей турбулентности

- В отличие от уравнений движения модели турбулентности не являются универсальными физическими законами

- Большинство моделей турбулентности базируются на закономерностях, характерных для простых «канонических» течений
    - ✓ Закон стенки
    - ✓ Формула Колмогорова
    - ✓ …
  - ➢ Как только эти закономерности перестают выполняться – точность расчета падает

- Константы в моделях турбулентности «настраиваются» на определенный набор течений
  - ➢ Часто приходится при настройке идти на компромисс

- Не существует универсальных моделей турбулентности, каждая модель имеет свою «область применимости»

Проблема выбора моделей турбулентности

- При расчете конкретных течений необходимо не только выбрать наиболее подходящую модель турбулентности, но и оценить степень достоверности полученных с ее помощью результатов.
- Проводятся многочисленные работы по тестированию моделей турбулентности
  - Стэнфордские конференции
  - Международные проекты
  - Workshop
  - Академические исследования

- Лучшие современные модели турбулентности хорошо изучены
  - Известна их способность предсказывать свойства тех или иных течений
  - Для многих течений известны наиболее надежные модели

Гипотеза Буссинеска

- Буссинеск (1877) предложил ввести дополнительную (турбулентную) вязкость
- Большинство моделей турбулентности используют обобщенную гипотезу Буссинеска

$$-\overline{u_i'u_j'} = \nu_T\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}k\delta_{ij} = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}$$

  - Линейная связь между тензором Рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций
  - Аналог реологического закона Ньютона для молекулярной вязкости

- Достоинства
  - Использование гипотезы Буссинеска позволяет сократить количество определяемых в процессе моделирования переменных с 6 до 1.

- Недостатки
  - В некоторых случаях гипотеза Буссинеска несправедлива и ее использование приводит к получению качественно неверного результата

В таких случаях необходимо использование моделей рейнольдсовых напряжений или нелинейных моделей

Особенности, возникающие в сжимаемом газе

- Дивергенция скорости не равна нулю
  - Cлед тензора скоростей деформаций не равен нулю
    - ✓ Гипотеза Буссинеска преобразуется в

$$\boldsymbol{\tau}_t = 2\mu_t\left(\mathbf{S} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\,\nabla\cdot\vec{u}\right) + \frac{2}{3}k\,\mathbf{I}$$

  - Иногда обозначают

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)$$

- Турбулентный тепловой поток $q_{t,i} = -\overline{\rho u_i'' h''}$
  - Закон Фурье (частный случай градиентной диффузии)

$$\vec{q}_t = -\lambda_t \nabla T$$

    - ✓ Турбулентная теплопроводность выражается при помощи аналогии Рейнольдса $\lambda_t = \dfrac{C_P \mu_t}{\mathrm{Pr}_t}$,

Турбулентная вязкость

- Величина ν_T в гипотезе Буссинеска $-\overline{u_i'u_j'} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}$ называется турбулентной вязкостью
  - Не фундаментальная физическая величина, а лишь коэффициент пропорциональности
- Уравнения Рейнольдса с использованием гипотезы Буссинеска

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho(\nu + \nu_T)\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \end{cases}$$

- В них входит модифицированное давление $\tilde{p} = p + \frac{2}{3}\rho k$
  - В несжимаемой жидкости может влиять только около границ
  - В сжимаемом газе все сложнее…
- Турбулентное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_t = \dfrac{\nu_T}{\nu}$
  - Характеризует соотношение турбулентного и молекулярного переноса
    - ✓ Часто используется в моделях турбулентности

Резюме

- Уравнения Рейнольдса получаются путем осреднения уравнений Навье-Стокса по Рейнольдсу
- В этом подходе вся турбулентность моделируется и ее влияние учитывается через напряжения Рейнольдса, которые необходимо определить
- Определение напряжений Рейнольдса – задача модели турбулентности
- В основе моделей турбулентности лежат уравнения для напряжений Рейнольдса (незамкнутые) и эмпирическая информация
- В большинстве моделей используется гипотеза Буссинеска – линейная связь между напряжениями Рейнольдса и тензором скоростей деформаций