

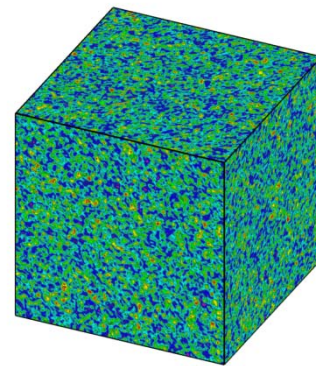
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Моделирование турбулентности»
(http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/turb_models)

Лекция 6

Однородная изотропная турбулентность

Decaying Homogeneous Isotropic Turbulence (DHIT)



Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2023

Однородная изотропная турбулентность

- Наиболее простой вид турбулентного движения
 - Предложен Тейлором в 1935 году
- Позволяет изучить ряд свойств, присущих всем турбулентным течениям
 - Мелкомасштабная турбулентность в значительной степени однородна и изотропна
 - ✓ Причина - каскадный перенос энергии
- Однородная изотропная турбулентность
 - Однородна по пространству
 - Изотропна по направлению
- Некоторые свойства
 - Напряжение $\overline{u_i'^2}$ одинаково для всех направлений x_i
 - Корреляция компоненты скорости и скаляра равна 0
 - ✓ $\overline{u_i' p'} = 0$

Экспериментальные исследования

Исследуется течение за решеткой

- Чаще всего используют эксперимент Comte-Bellot и Corrsin

- Обтекание решетки с размером ячейки $L=2'$ потоком со скоростью $U_0=10$ м/с

- Число Рейнольдса $Re = \frac{LU_0}{\nu} = 3.4 \cdot 10^4$

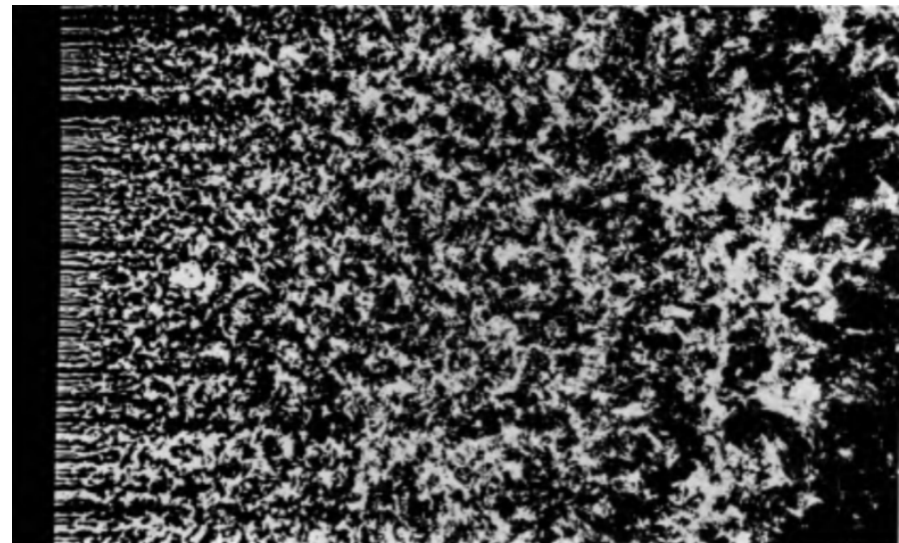
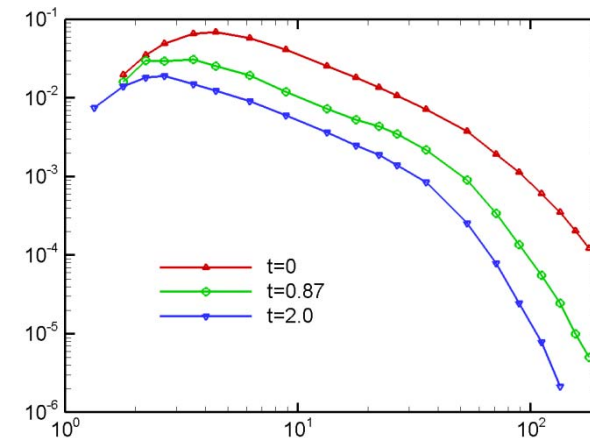
- Уровень турбулентности $Tu = \frac{\sqrt{u'^2}}{U_0} \approx 2.2\%$

- Практически нет влияния вверх по потоку

- Можно установить соответствие между временем и продольной координатой $x = U_0 \cdot t$

- Со временем (координатой по потоку) турбулентность затухает

- $K_f \sim t^{1.2}$



Теория однородной изотропной турбулентности

- Введем обозначение $b(t) = \overline{u_i'^2}$
- Рассмотрим двухточечную корреляцию $\overline{u_i'(A)u_j'(B)}$
 - Выберем систему координат, в которой точки A и B лежат на оси x
 - ✓ $A = (0,0,0); B = (r,0,0)$
 - Из изотропности турбулентности следует
 - ✓ $\overline{u_i'(A)u_j'(B)} = 0$ при $i \neq j$
 - ✓ $\overline{u_2'(A)u_2'(B)} = \overline{u_3'(A)u_3'(B)}$
 - Корреляционный тензор определяется двумя независимыми элементами
- Введем коэффициенты корреляции

$$f(r,t) = \frac{\overline{u_1'(A)u_1'(B)}}{\sqrt{\overline{u_1'^2(A)}} \cdot \sqrt{\overline{u_1'^2(B)}}} = \frac{\overline{u_1'(A)u_1'(B)}}{b(t)} \quad g(r,t) = \frac{\overline{u_2'(A)u_2'(B)}}{\sqrt{\overline{u_2'^2(A)}} \cdot \sqrt{\overline{u_2'^2(B)}}} = \frac{\overline{u_2'(A)u_2'(B)}}{b(t)}$$

- Можно показать, что функции $f(r, t)$ и $g(r, t)$ связаны

$$f(r,t) = \frac{2}{r^2} \int_0^r r \cdot g(r,t) \cdot dr \quad g(r,t) = f(r,t) + \frac{1}{2} r \frac{\partial f(r,t)}{\partial r}$$

- Функции $b(t)$, $f(r, t)$ (или $g(r,t)$) полностью определяют свойства однородной изотропной турбулентности

Масштабы турбулентности

- На основе функций $f(r, t)$ и $g(r, t)$ можно построить **интегральные масштабы турбулентности**

- продольный $L_f(t) = \int_0^{\infty} f(r, t) \cdot dr$
- поперечный $L_g(t) = \int_0^{\infty} g(r, t) \cdot dr$

- Из связи между функциями $f(r, t)$ и $g(r, t)$ следует $L_f(t) = 2L_g(t)$

- Кроме того, можно определить **микромасштабы** (Тейлоровские масштабы, масштабы диссипации)

$$f''(0, t) = \frac{1}{\lambda_f(t)^2} \qquad g''(0, t) = \frac{1}{\lambda_g(t)^2}$$

- В однородной изотропной турбулентности диссипация $\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}$ может быть выражена через микромасштаб

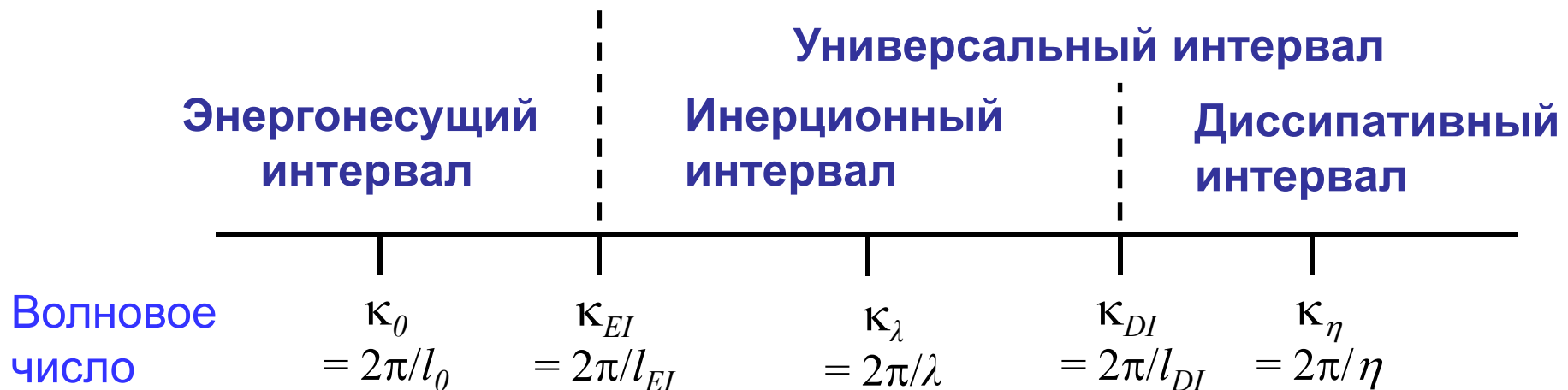
$$\varepsilon = 15 \cdot \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \right)^2} = -15 \cdot \nu \cdot b(t) \cdot f''(0, t) = 15 \cdot \nu \cdot \frac{b(t)}{\lambda_f(t)^2}$$

Масштабы турбулентности

- В однородной изотропной турбулентности можно выделить три различных масштаба
 - Макромасштаб (интегральный масштаб) $L \sim K_t^{3/2}/\varepsilon$
 - Микромасштаб (Тейлоровский масштаб) λ
 - Колмогоровский масштаб η
- С каждым из этих масштабов можно связать число Рейнольдса
 - Скоростной масштаб – интенсивность пульсаций $U_0 = \sqrt{b(t)} = \sqrt{u_i'^2}$

$$Re_\lambda \sim \sqrt{Re_L}$$

$$Re_\eta \approx 1$$



Трехмерный энергетический спектр

- Для его вычисления необходимо трехмерное преобразование Фурье

для векторного поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum \sum \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$

➤ $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$ – волновой вектор

➤ $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \int \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ – Фурье-образ

- Трехмерный энергетический спектр может быть определен как

$$E(k) = \frac{1}{\Delta k} \iiint_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{q}| \leq k+\Delta k/2} 0.5 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{q}) d\mathbf{q}$$

➤ Такое определение обеспечивает $K_t = \int_0^{\infty} E(k) \cdot dk$

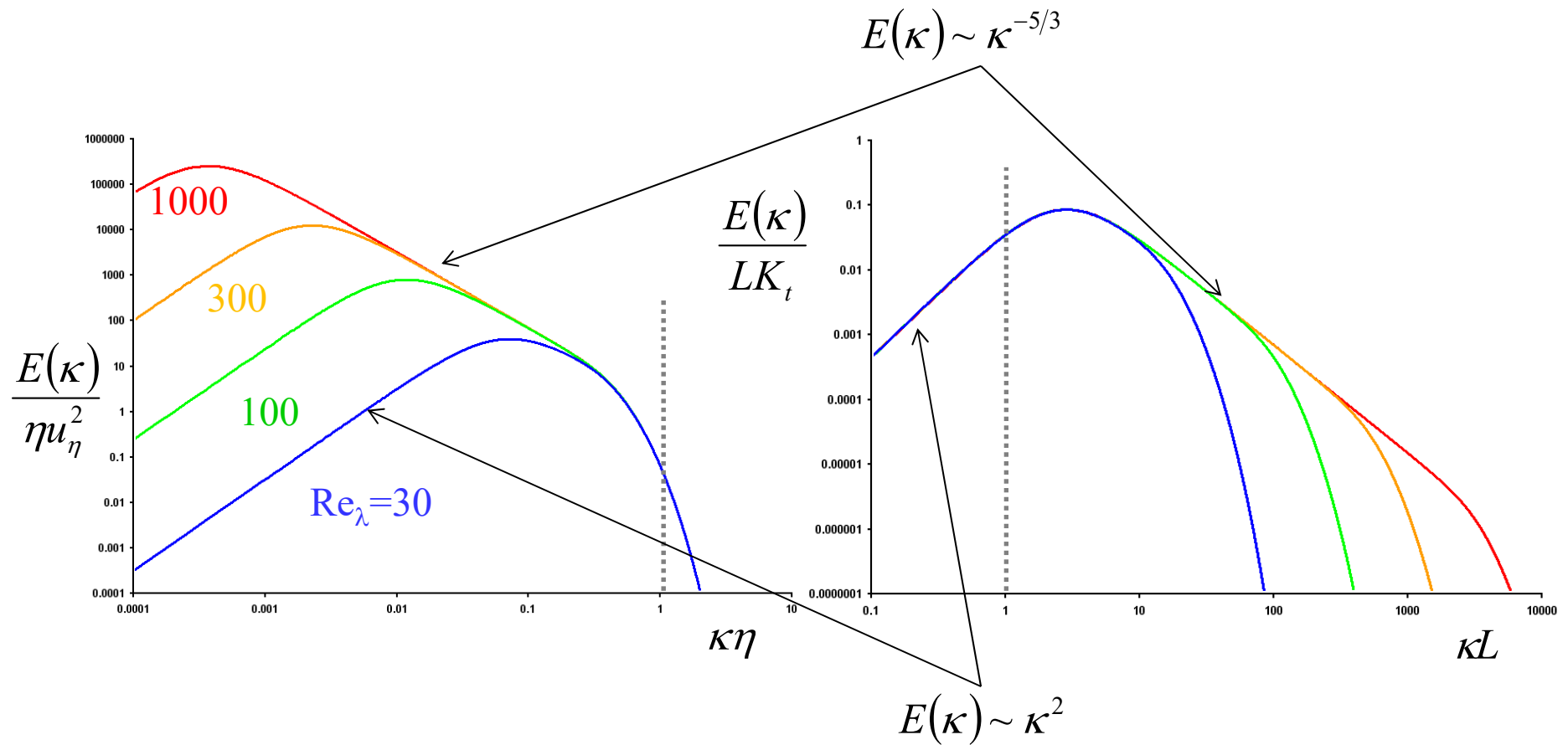
➤ Для приближенного вычисления интеграла можно взять сумму по сфере

единичной толщины $E(k) = \sum_{k-1/2 < |\mathbf{q}| \leq k+1/2} 0.5 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{q})$

➤ Можно определить долю энергии турбулентных вихрей заданного размера $[l_1, l_2]$

$$K_t[l_1, l_2] = \int_{k_2}^{k_1} E(k) \cdot dk, \quad k_1 = \frac{1}{l_1}, \quad k_2 = \frac{1}{l_2}$$

Зависимость спектра от числа Рейнольдса



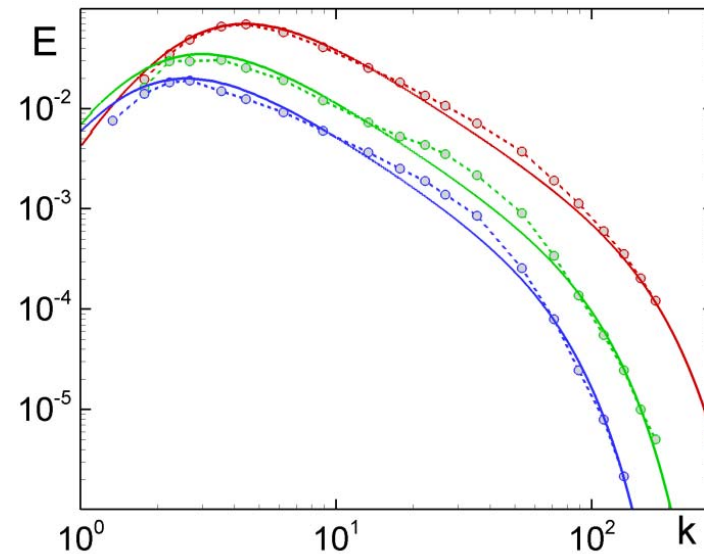
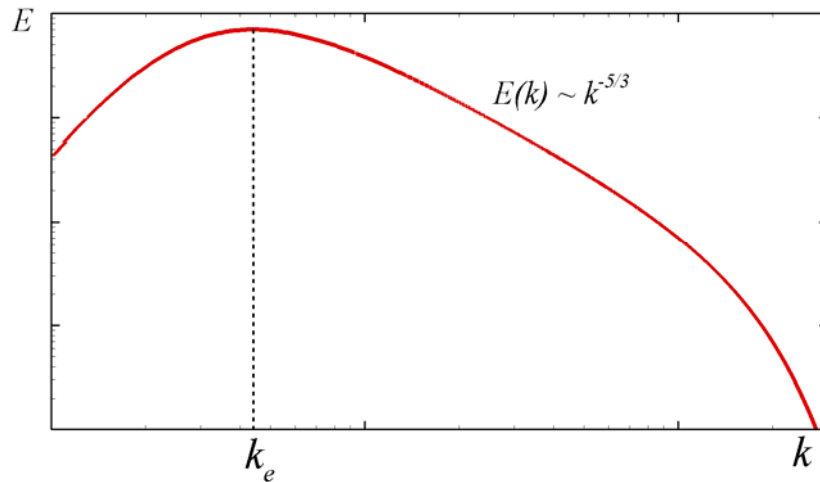
- С увеличением числа Рейнольдса инерционный интервал увеличивается
 - Отношение L/η растет

Формула Кармана

- Формула Кармана хорошо аппроксимирует энергонесущий и инерционный интервалы энергетического спектра:

$$E(k) = \frac{(k/k_e)^4}{(1 + 2.4 \cdot (k/k_e)^2)^{17/6}}$$

➤ k_e – волновое число, при котором достигается максимум функции $E(k)$



Сравнение формулы Кармана с экспериментальными данными Comte-Bellot и Corrsin

Динамическое уравнение энергетического спектра

- На основе уравнения для вторых двухточечных моментов в однородной изотропной турбулентности можно вывести динамическое уравнение энергетического спектра

$$\frac{dE(k,t)}{dt} - F(k,t) + 2\nu k^2 E(k,t) = 0$$

- $F(k,t)$ отражает действие сил инерции $\int_0^{\infty} F(k,t) \cdot dk = 0$

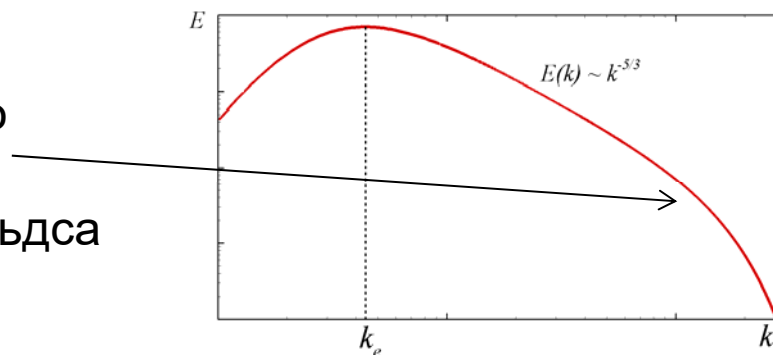
- Можно показать, что $\int_0^{\infty} 2\nu k^2 E(k,t) \cdot dk = \varepsilon$

➤ $2\nu k^2 E(k,t)$ - плотность распределения диссипации по волновым числам

➤ На инерционном интервале $2\nu k^2 E(k,t) \sim k^2 \cdot k^{-5/3} = k^{1/3}$ - растет

✓ Максимум плотности распределения диссипации лежит в конце инерционного интервала

✓ При высоких числах Рейнольдса выполняется: $k_{\varepsilon} \gg k_e$



Каскадный перенос энергии Колмогорова-Ричардсона

- При высоком числе Рейнольдса $k_\varepsilon \gg k_e$
 - Энергия содержится в энергетическом интервале, а диссипирует в тепло в диссипативном интервале

- ✓ Существует механизм передачи энергии между интервалами

- Существует волновое число k_d

- ✓ $\int_0^{k_d} 2\nu k^2 E(k,t) \cdot dk \ll \int_{k_d}^{\infty} 2\nu k^2 E(k,t) \cdot dk \approx \varepsilon$

- ✓ $\int_{k_d}^{\infty} E(k,t) \cdot dk \ll \int_0^{k_d} E(k,t) \cdot dk \approx K_t$

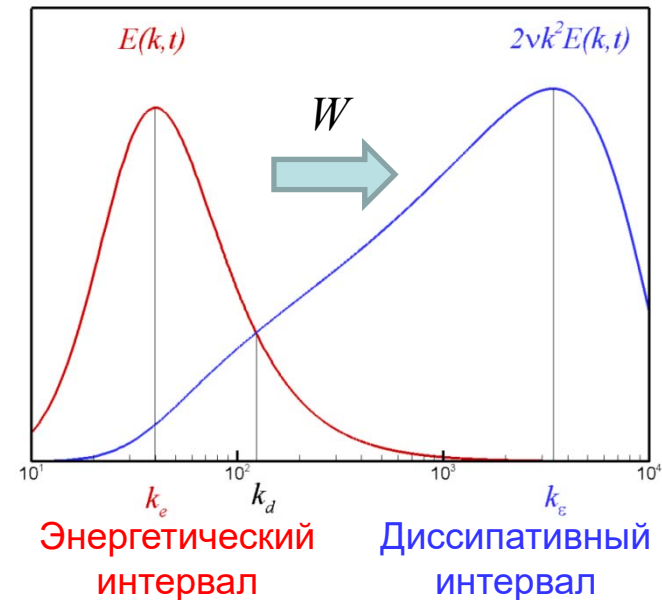
- Обозначим $W = \int_0^{k_d} F(k,t) \cdot dk$

- ✓ $\int_0^{\infty} F(k,t) \cdot dk = 0 \Rightarrow \int_{k_d}^{\infty} F(k,t) \cdot dk = -W$

- Рассмотрим динамическое уравнение

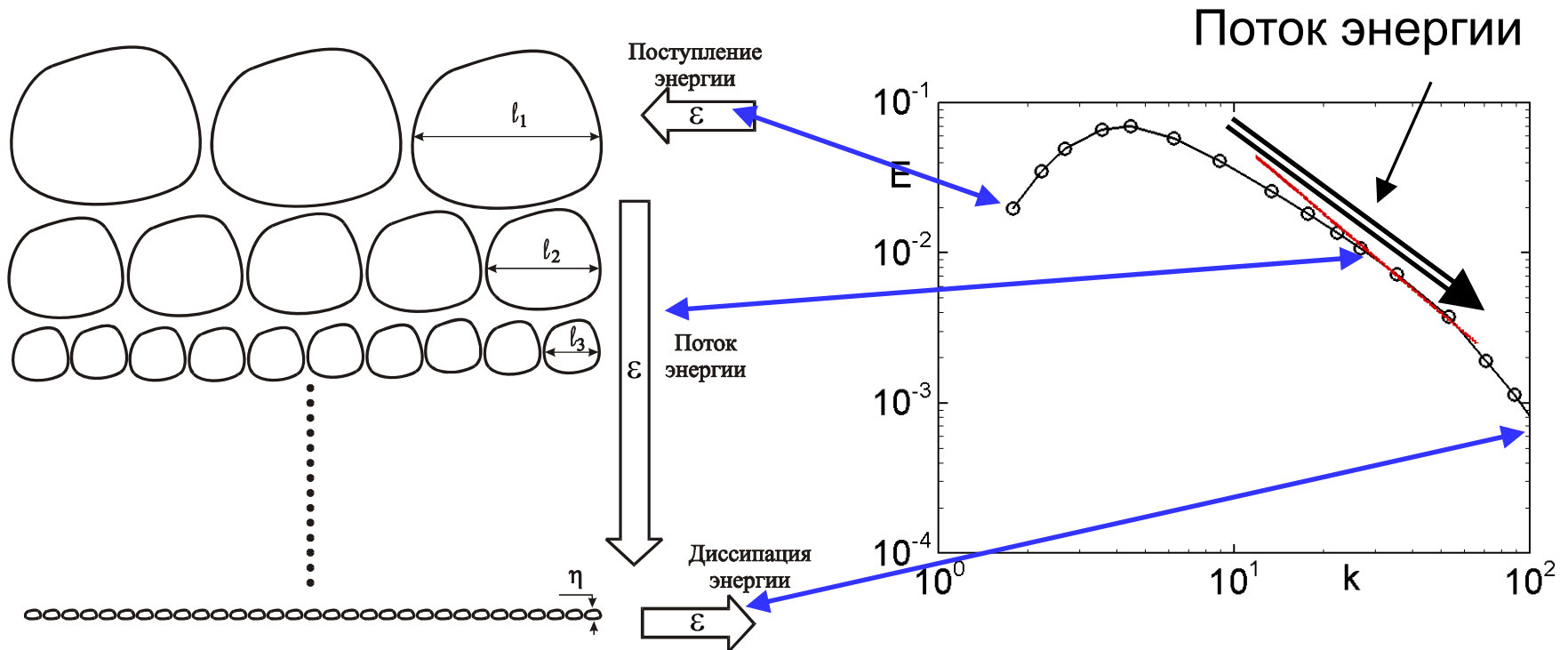
- Интеграл $[0, k_d]$ $\Rightarrow \frac{dK_t(t)}{dt} = -W$

- Интеграл $[k_d, \infty]$ $\Rightarrow W = \varepsilon$



$$\frac{dE(k,t)}{dt} - F(k,t) + 2\nu k^2 E(k,t) = 0$$

Как устроен каскадный перенос энергии



- Энергия поступает от осредненного потока к наиболее крупным вихрям
- Последовательно передается все более и более мелким вихрям (“каскадный перенос”)
 - «Дробление» и «вытягивание» вихрей
- Наиболее мелкие вихри диссипируют и передают энергию тепловому движению

Формула Колмогорова

- Величина $W = \int_0^{k_d} F(k,t) \cdot dk$ определяется только инерцией и не зависит от вязкости

➤ Она должна определяться интегральными характеристиками турбулентности

✓ Кинетическая энергия турбулентности $K_t = \int_0^{\infty} E(k) \cdot dk$

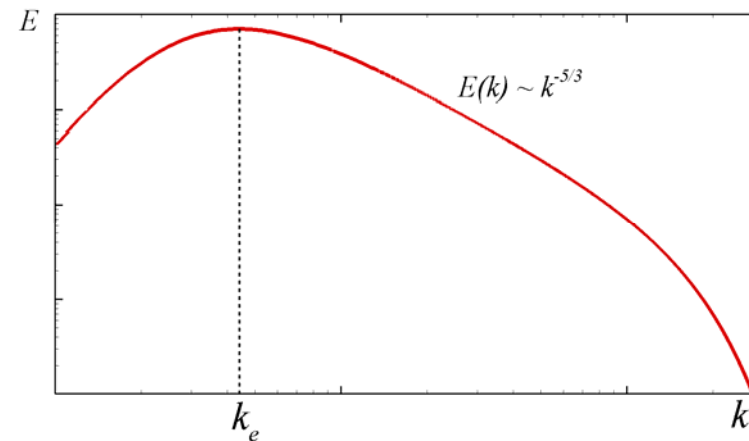
✓ Линейный масштаб $L_t = 1/k_e$

➤ Из размерности $W = C_d \frac{K_t^{3/2}}{L_t}$

➤ Из $\varepsilon = W$ следует формула

Колмогорова $\varepsilon = C_d \frac{K_t^{3/2}}{L_t}$

✓ Используется в большинстве моделей турбулентности

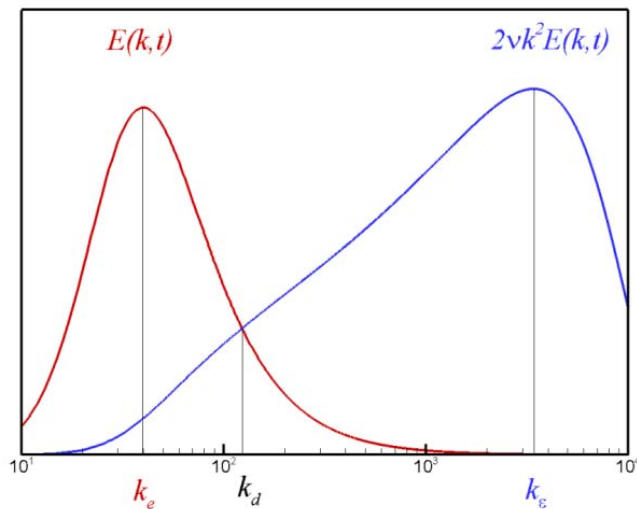


Гипотезы Колмогорова (I)

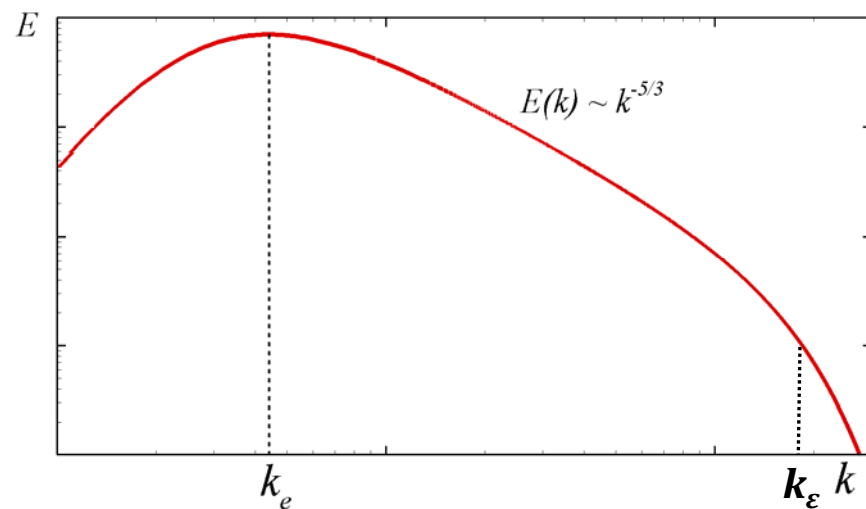
Характеристики турбулентности в диссипативном интервале универсальны

- Эти характеристики определяются двумя величинами: скоростью поступления энергии $W(=\varepsilon)$ и вязкостью ν
- Более удобны колмогоровские масштабы

- ✓ Характерный размер минимальных вихрей $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \sim \frac{1}{k_\varepsilon}$
- ✓ Характерная скорость минимальных вихрей $v_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4}$



Энергетический спектр и плотность диссипации в линейном масштабе



Энергетический спектр в логарифмическом масштабе

Гипотезы Колмогорова (II)

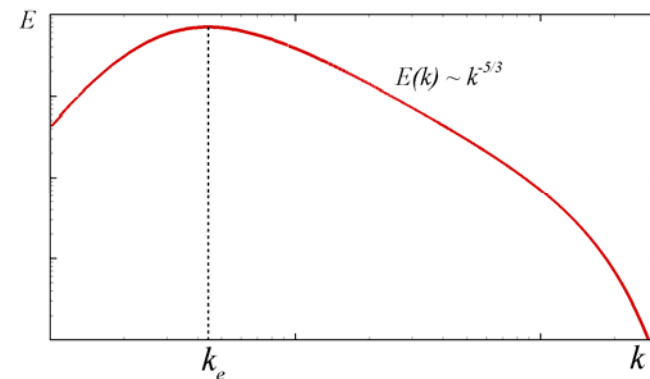
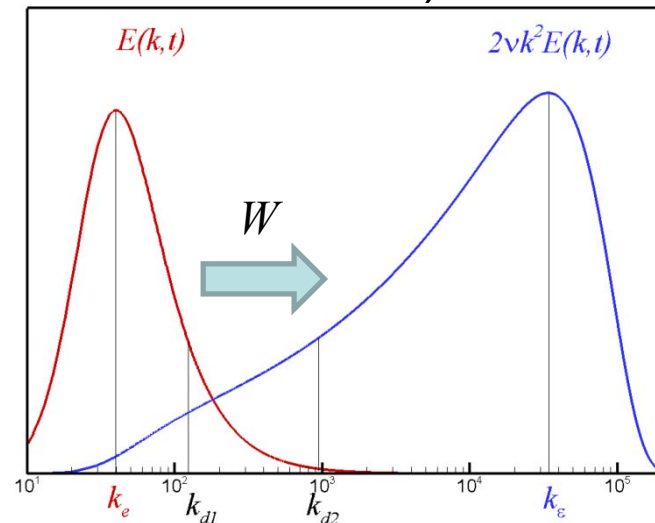
При достаточно высоком числе Рейнольдса существует интервал $[k_{d1}, k_{d2}]$, в котором малы как доля энергии, так и доля диссипации

- В этом интервале пульсационное движение является универсальным (не зависит от особенностей крупных вихрей и от вязкости ν)

- Энергетический спектр определяется только $W (= \varepsilon)$ и волновым числом k (А.М. Обухов)
 - ✓ Из соображений размерности следует закон “-5/3”

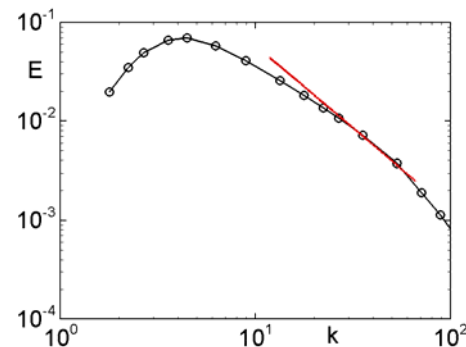
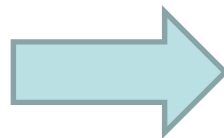
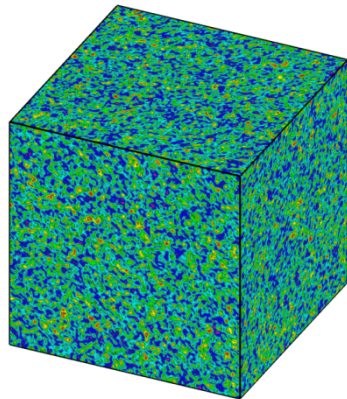
$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$$

- Инерционный интервал наблюдается в спектре большинства турбулентных течений при достаточно высоком числе Рейнольдса



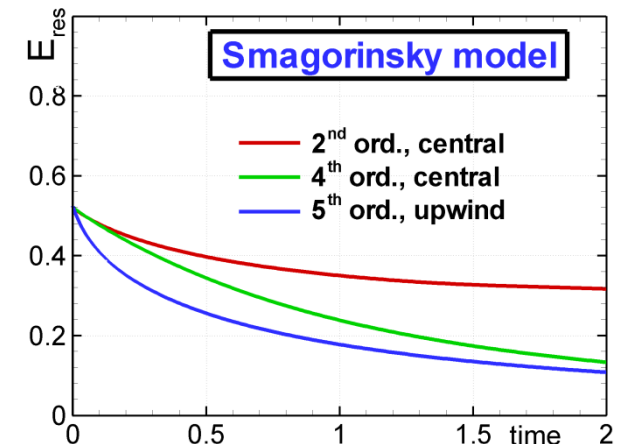
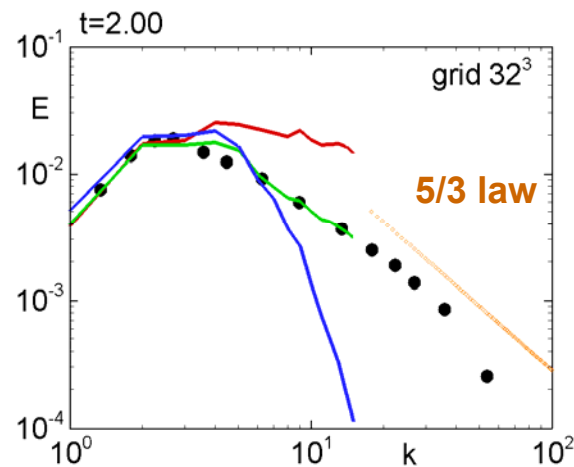
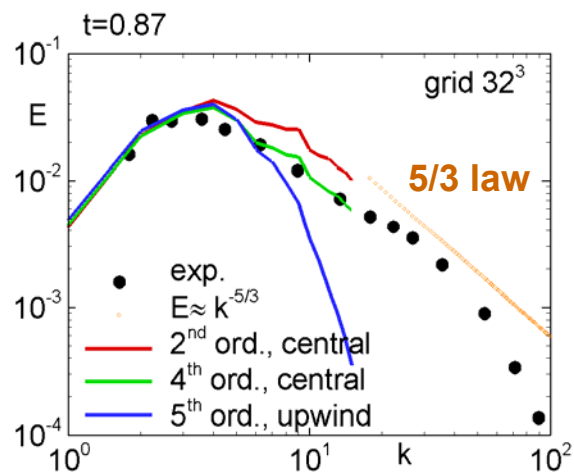
Применение ДИТ

- RANS (см. упражнения по курсу)
 - Для калибровки полуэмпирических моделей турбулентности
 - В моделях с двумя уравнениями (k - ε и k - ω) константы подбираются так, чтобы обеспечить правильную скорость вырождения турбулентности $K_t \sim t^{1.2}$
- LES
 - Для выбора численной схемы
 - Для подбора константы подсеточной модели
 - Схема и константа подбираются так, чтобы обеспечить правильный наклон энергетического спектра (закон $-5/3$)
 - Производится нестационарный расчет вырождения однородной изотропной турбулентности и анализируется эволюция энергетического спектра во времени



Влияние разностной схемы

- Результаты расчетов сильно зависят от используемой схемы
 - Значение константы зависит от схемы
 - ✓ В первую очередь необходимо выбрать схему

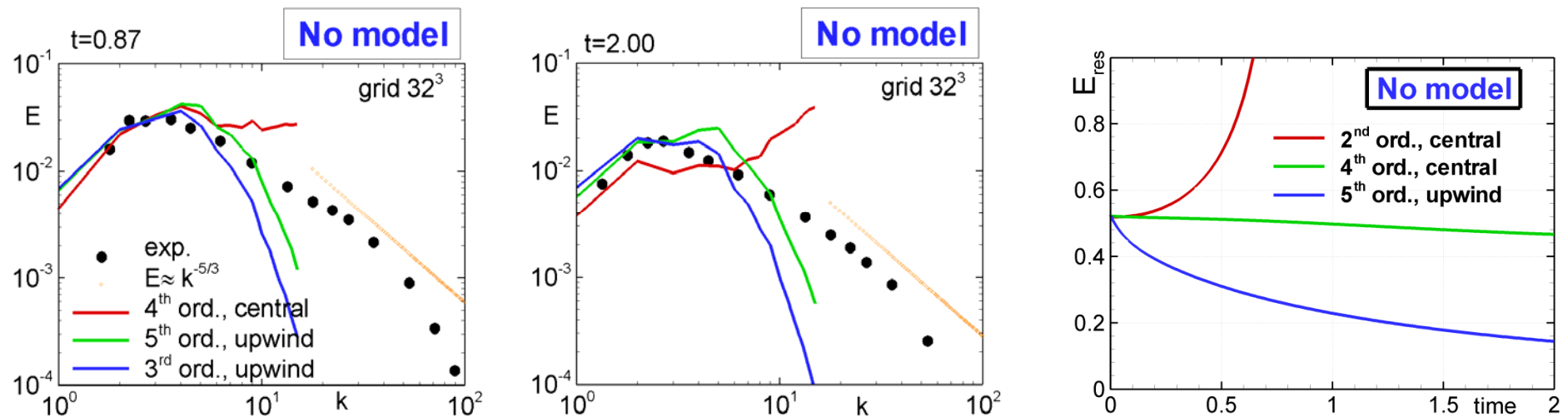


Сравнение результатов расчетов, полученных по модели Смагоринского при $C_{SMAG}=0.2$ с экспериментальными данными (Comte-Bellot и Corrsin)

Выбор разностной схемы

Оценку различных схем можно провести на примере расчета той же задачи без модели турбулентности

- Противопоточные схемы слишком диссипативны
- Центральнo-разностная схема второго порядка неустойчива
- Центральнo-разностная схема четвертого порядка лучше других подходит для LES



Сравнение результатов расчетов, полученных без модели турбулентности, с экспериментальными данными (Comte-Bellot и Corrsin)

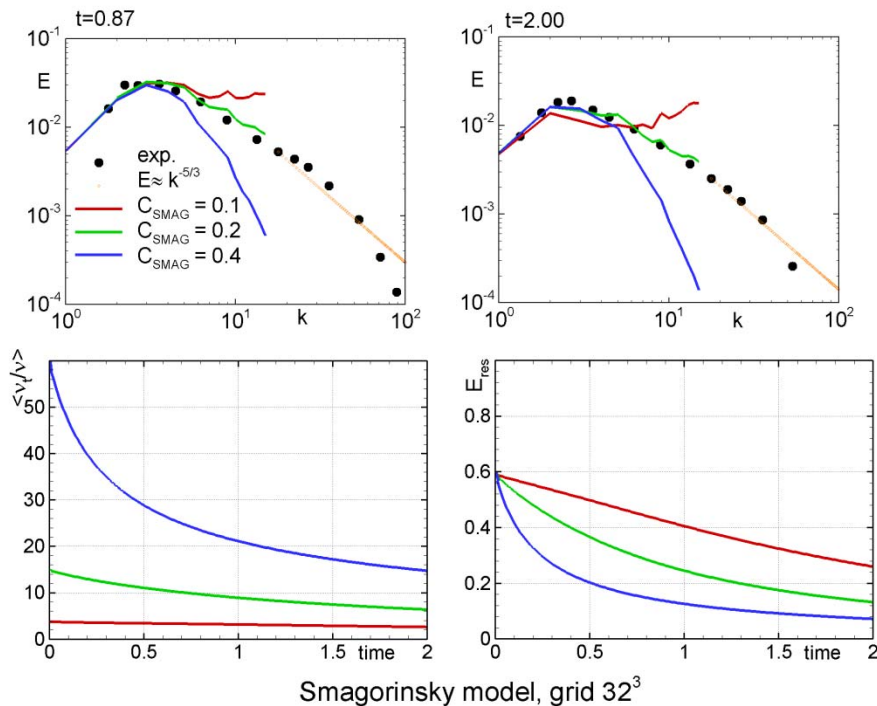
Свойства схемы зависят от деталей реализации



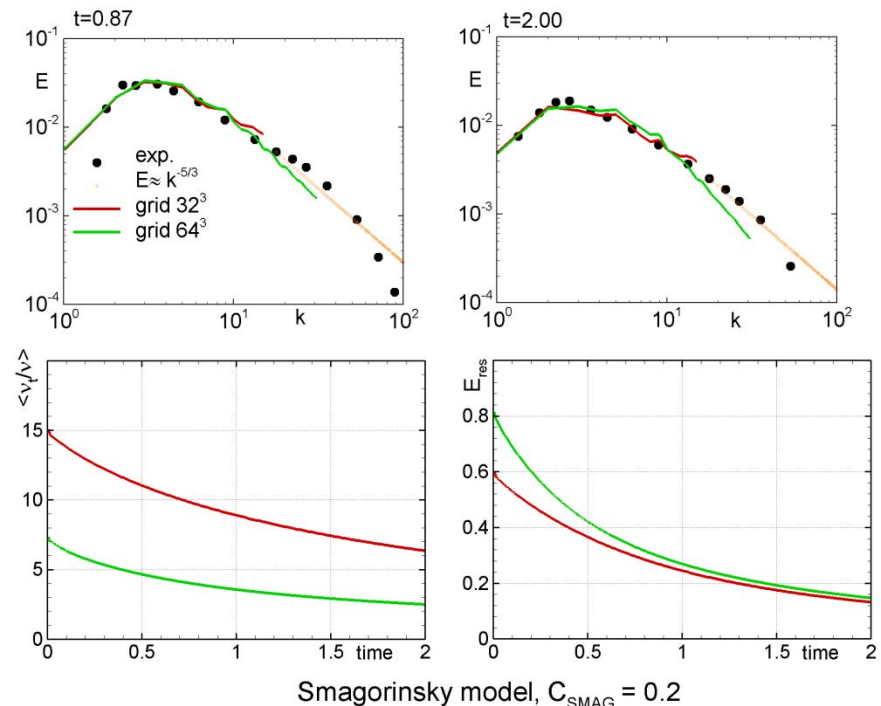
Подобное исследование должно проводиться для каждого кода 18

Калибровка константы модели Смагоринского

- Все расчеты выполнены с использованием ранее выбранной центрально-разностной схемы четвертого порядка
- Значение константы $C_{SMAG}=0.2$ обеспечивает правильный наклон спектра
- Результат не зависит от используемой сетки
 - Это не так для слишком диссипативных схем или «плохих» подсеточных моделей



Влияние константы



Влияние расчетной сетки

Резюме

- Однородная изотропная турбулентность – простейший вид турбулентного течения
- Законы, выявленные при ее рассмотрении, очень важны, поскольку мелкомасштабная турбулентность универсальна
- Турбулентные структуры разномасштабны
- Крупные вихри содержат максимальное количество энергии, при помощи каскадного переноса энергии передают ее все более мелким вихрям, откуда она диссипирует в тепло
- Используется для калибровки моделей турбулентности в RANS и LES