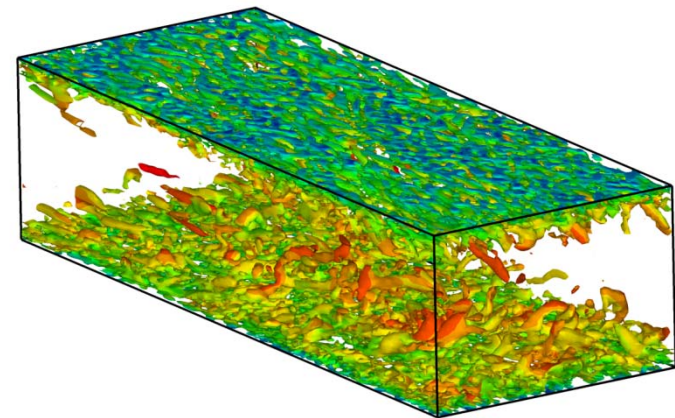
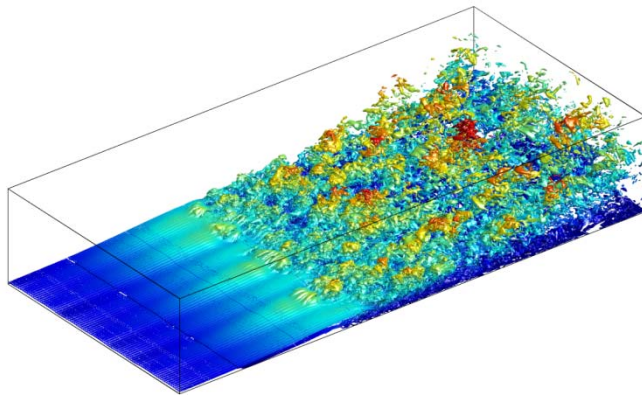


Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Моделирование турбулентности»
(http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/turb_models)

Лекция 8

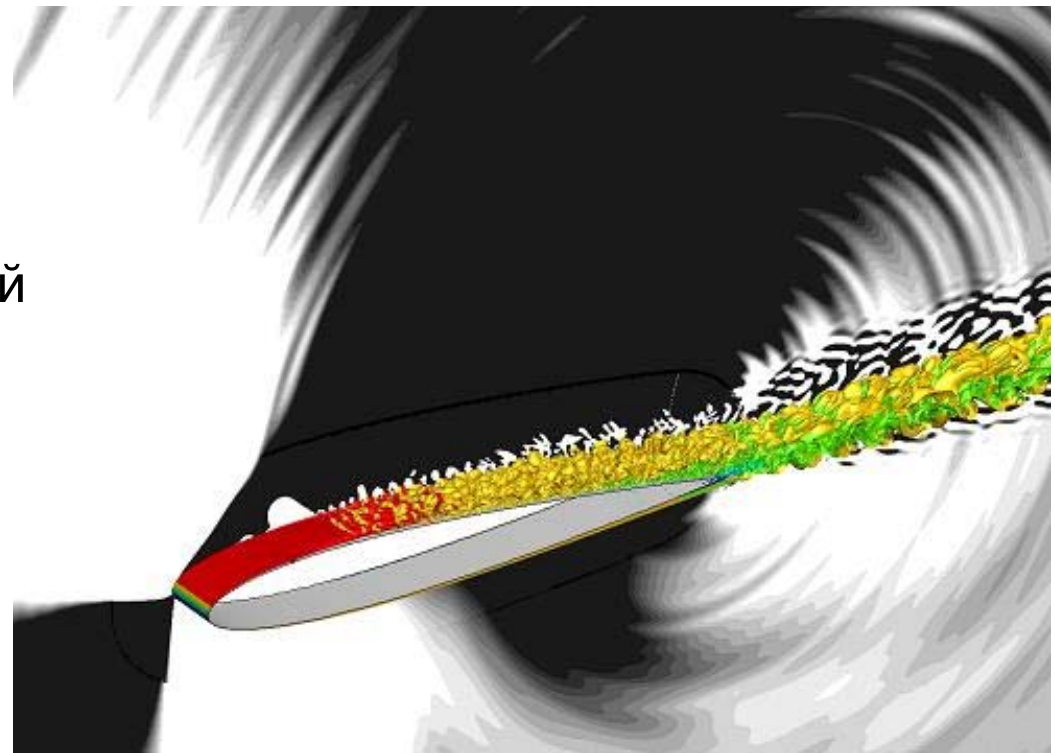
Пристенные турбулентные течения



Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2023

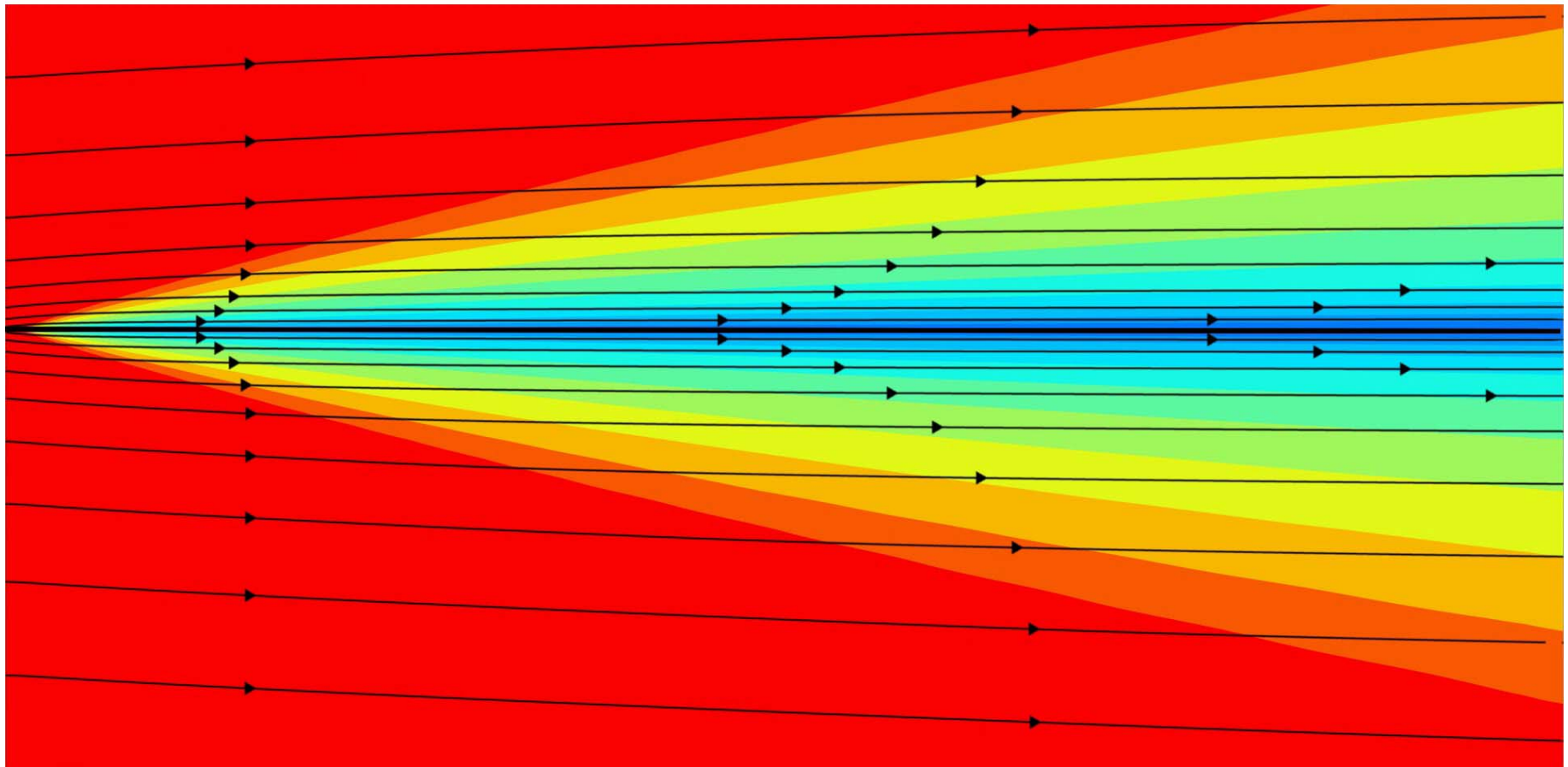
Пограничный слой

- При обтекании поверхностей газодинамические параметры меняются от значений на стенке до значений во внешнем потоке
 - Это происходит в тонкой области, называемой пограничным слоем
- Пограничных слой
 - Вынужденная конвекция
 - Свободная конвекция
- В большинстве практических приложений пограничный слой является турбулентным
 - Внешняя аэродинамика
 - ✓ Крыло
 - ✓ Фюзеляж
 - Турбомашиностроение
 - ✓ Турбинные лопатки



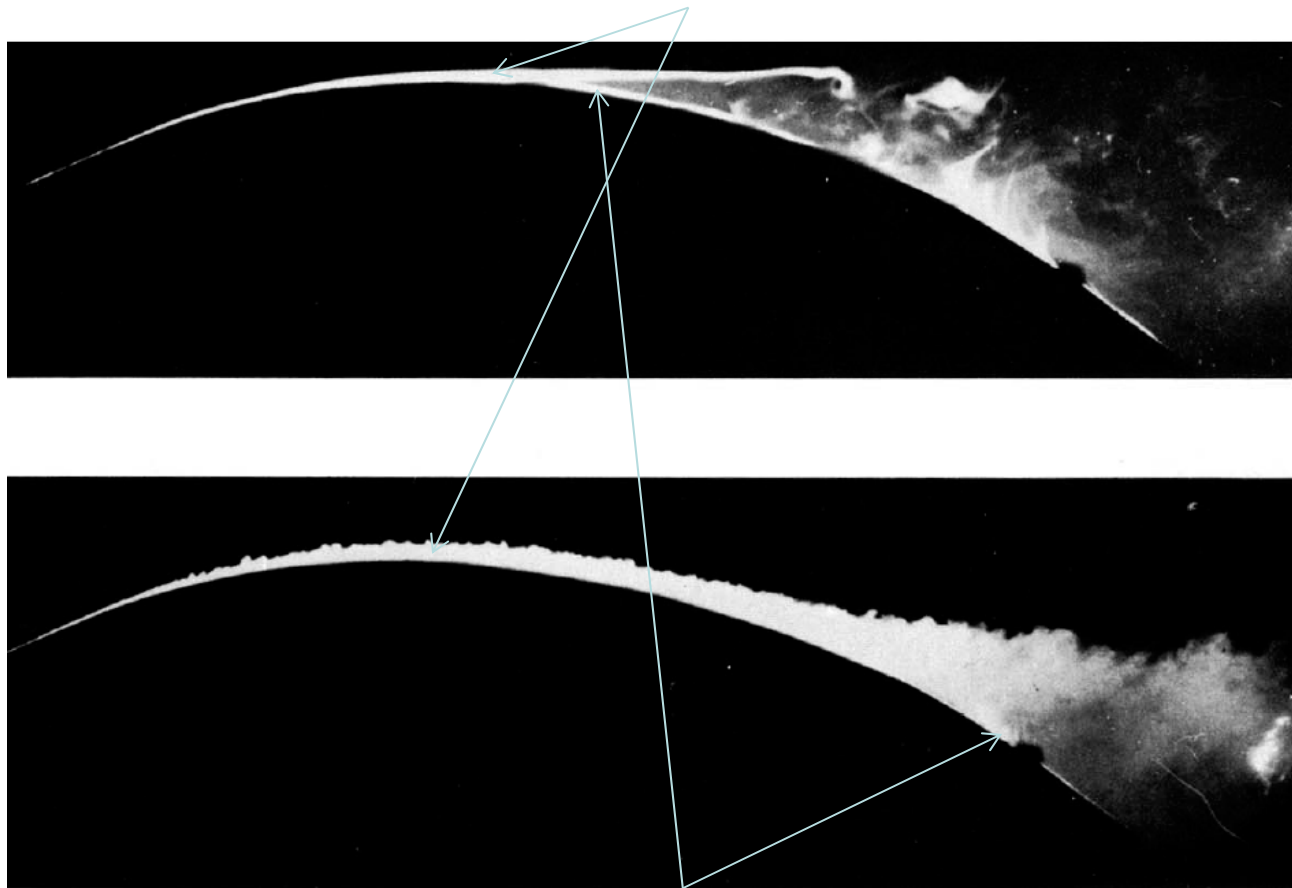
Пограничный слой

FLAT PLATE



Сравнение ламинарного и турбулентного пограничных слоев

- Турбулентный пограничный слой толще



- Ламинарный пограничный слой раньше отрывается

При расчете пристенных течений важно правильно описать пограничный слой

Ламинарный пограничный слой

- Хорошо изучен теоретически
- Описывается уравнениями пограничного слоя

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

- В ряде случаев эти уравнения имеют автомодельное решение

➤ При отсутствии градиента давления

✓ Профиль Блазиуса

✓ Толщина пограничного слоя растет $\sim \sqrt{x}$

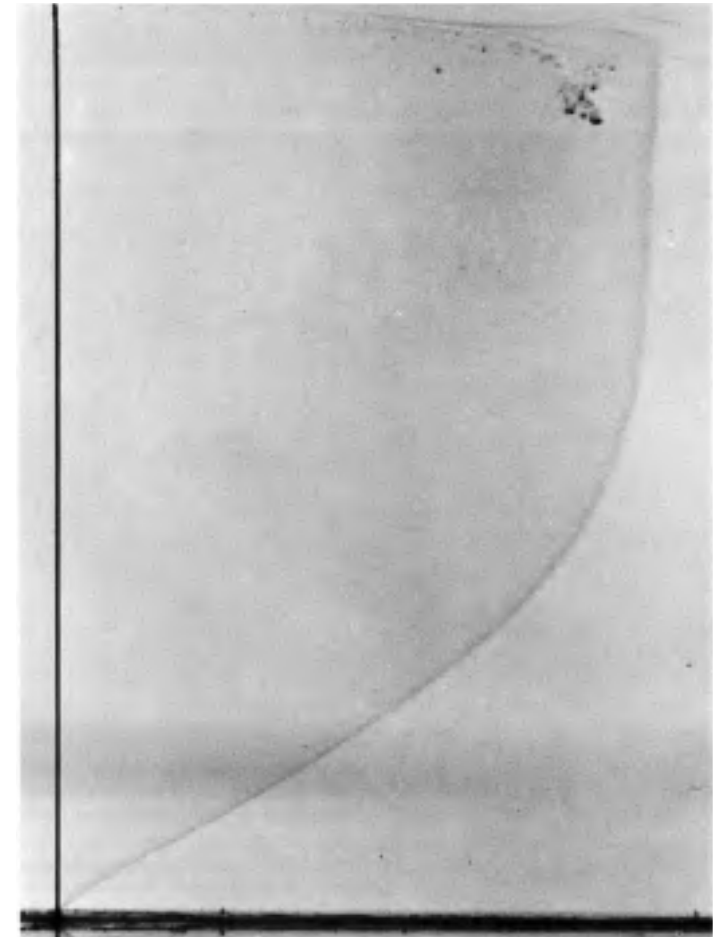
$$\delta_{0.99} \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad \delta^* \approx 1.721 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad \theta \approx 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

✓ Коэффициент трения падает $\sim 1/\sqrt{x}$

$$C_f \approx \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

➤ При степенной зависимости скорости во внешнем потоке

✓ Профили Фолкнера-Скэн



Профиль Блазиуса,
наблюдаемый в эксперименте 5

**Что определяет характеристики
пограничного слоя?**

Внешний поток

- Внешний поток в значительной степени определяет характеристики пограничного слоя
- Внешний поток может быть неоднороден
 - Скорость во внешнем потоке меняется гораздо медленнее, чем в пограничном слое
- Скорость на внешней границе пограничного слоя U_e
 - В сложных потоках трудно определима
- Продольный градиент давления
 - Обычно давление поперек пограничного слоя не меняется
 - ✓ Следует из уравнений пограничного слоя
 - Внешний поток является потенциальным
 - ✓ Справедливо уравнение Бернулли $\frac{dp}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx}$
 - На практике для характеристики градиента давления используются различные безразмерные характеристики
 - ✓ Параметр равновесия Клаузера $\beta = \frac{\delta^*}{\tau_w} \left| \frac{dp}{dx} \right|$

Толщина пограничного слоя

- Асимптотический характер стремления всех характеристик в значениям во внешнем потоке
 - Процентная толщина пограничного слоя
 - ✓ Расстояние от стенки до точки, в которой скорость составляет заданное количество процентов скорости внешнего потока (от 0.1 до 5)
 - ✓ $\delta_{0.95}$, $\delta_{0.99}$, $\delta_{0.995}$
 - ✓ Трудно определима как в расчете так и в эксперименте
 - Интегральные толщины
 - ✓ Толщина вытеснения
$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$
 - ✓ Толщина потери импульса
$$\theta = \delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$
 - ✓ Безразмерный формпараметр
$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$
- Толщину ПС трудно определить при расчете течений сложной геометрии
 - Внешний поток неоднороден
 - Линии сетки не идут поперек пограничного слоя
- В турбулентном пограничном слое на плоской пластине растет линейно

Трение на стенке

- Напряжение трения на стенке $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_w$
 - Поток импульса от жидкости (газа) к поверхности
 - Интеграл по поверхности – сопротивление трения $\vec{F} = \int_S \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \Big|_w dS$
- Коэффициент трения $C_F = \frac{\tau_w}{0.5 \rho U_{SC}^2}$
 - Масштаб скорости может определяться по разному
 - ✓ Скорость на внешней границе ПС в данном сечении $U_{SC} = U_e$
 - ✓ Масштаб скорости внешнего потока $U_{SC} = U_0$
- Динамическая скорость $u_\tau \equiv v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$
 - Характерный скоростной масштаб для пристенной области ПС
 - Динамический линейный масштаб $l^* = \frac{\nu}{v^*}$
 - ✓ Соответствует минимальному размеру вихрей в пограничном слое
 - ✓ Примерно равен Колмогоровскому диссипативному масштабу η_k

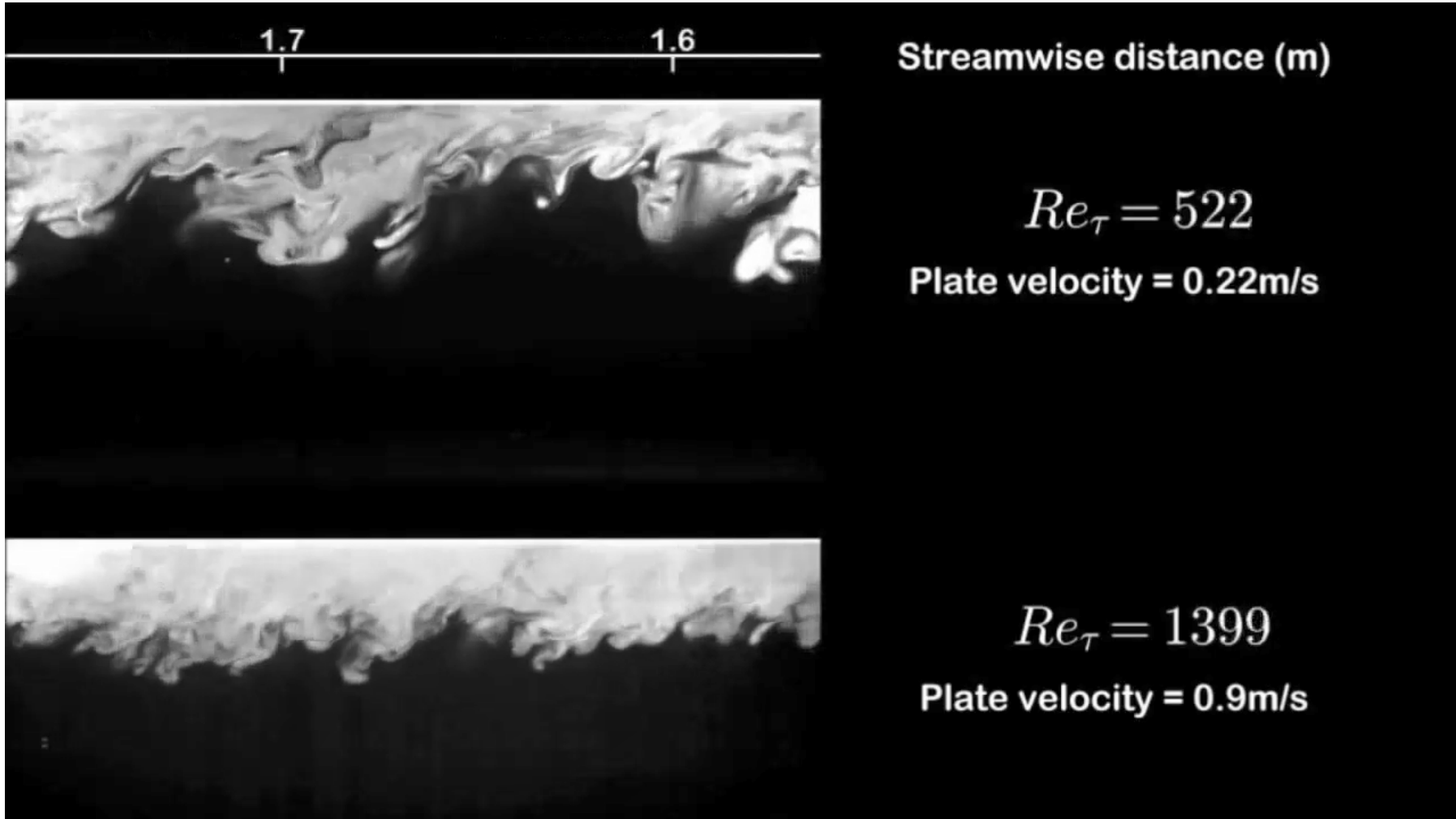
Число Рейнольдса

- Пограничный слой развивается вниз по потоку
 - Число Рейнольдса течения в целом
 - Число Рейнольдса в конкретном сечении
 - ✓ Может быть построено по разным масштабам
 - Расстояние от начала пластины x
 - Толщина пограничного слоя
 - ✓ Обычно используются $Re_x = \frac{xU_e}{\nu}$ и $Re_\theta = \frac{\theta U_e}{\nu}$
- Для турбулентного пограничного слоя без градиента давления существуют хорошие корреляции между числом Рейнольдса и коэффициентом трения
 - Karman-Schoenherr

$$Re_x = 2 \cdot Re_\theta \left(\frac{\log_{10}(2 \cdot Re_\theta)}{0.242} \right)^2$$

$$C_f = \frac{0.242(2 \cdot Re_\theta / Re_x)}{0.242 + 0.868 \sqrt{(2 \cdot Re_\theta / Re_x)}}$$

Число Рейнольдса



Зависимость характеристик пограничного слоя от числа Рейнольдса

Column (b) expressions are generally preferred for engineering analysis.

Summary of expressions for laminar and turbulent boundary layers on a smooth flat plate aligned parallel to a uniform stream*

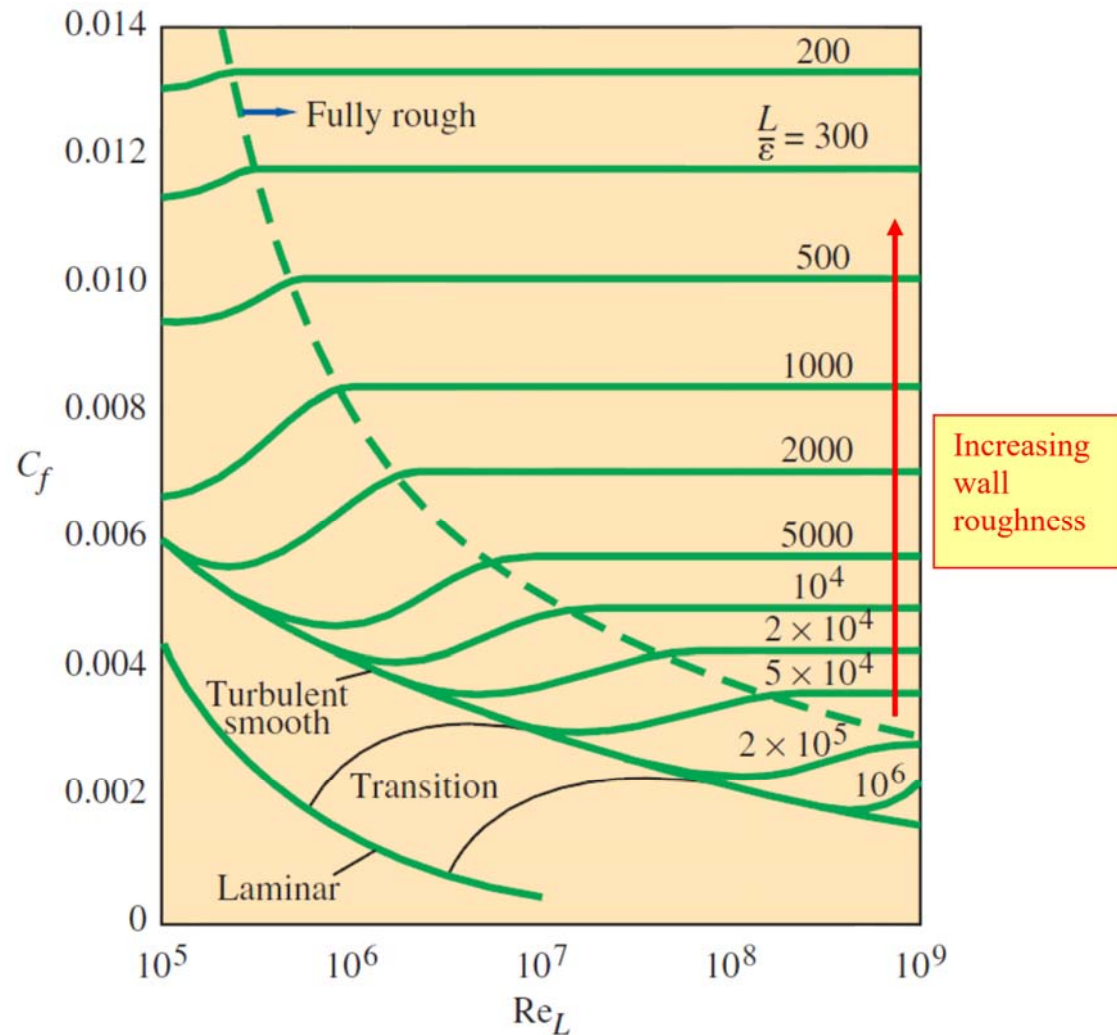
Property	(a)		(b)
	Laminar	Turbulent ^(†)	Turbulent ^(‡)
Boundary layer thickness	$\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.16}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.38}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$
Displacement thickness	$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.020}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\delta^*}{x} \cong \frac{0.048}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$
Momentum thickness	$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.016}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$\frac{\theta}{x} \cong \frac{0.037}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$
Local skin friction coefficient	$C_{f,x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0.027}{(\text{Re}_x)^{1/7}}$	$C_{f,x} \cong \frac{0.059}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$

Влияние шероховатости стенки

- Наличие шероховатости увеличивает напряжение трения на стенке
 - С ростом шероховатости трение возрастает
- Начиная с некоторого (достаточно высокого) числа Рейнольдса коэффициент трения перестает меняться
 - Полностью шероховатый режим

$$C_f = \left(1.89 - 1.62 \log \left(\frac{\varepsilon}{L} \right) \right)^{-2.5}$$

- ✓ Важно, что отношение ε/L не меняется



Уравнения пограничного слоя

- Во многих случаях пограничный слой хорошо описывается **уравнениями пограничного слоя**

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

- Из них следует интегральное уравнение импульсов Кармана

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{dU_e}{dx} \cdot \frac{(2+H)}{U_e} \theta - \frac{C_f}{2} = 0$$

- Если уравнение импульсов не выполняется, то уравнения плоского пограничного слоя также не верны для этого течения

➤ Причины

- ✓ Трехмерность
- ✓ Нестационарность
- ✓ Влияние вверх по потоку
- ✓ Изменение давления поперек пограничного слоя
- ✓ Влияние нормальных Рейнольдсовых напряжений
- ✓ ...

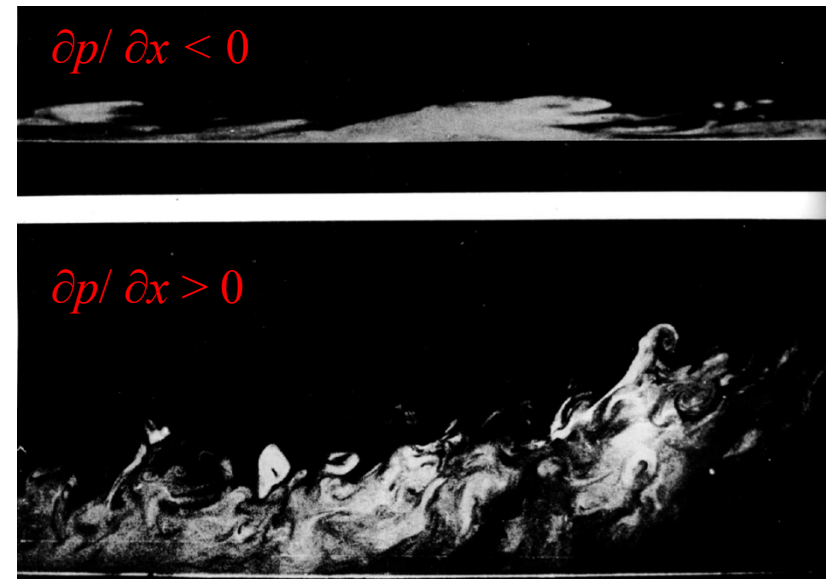
Управление пограничным слоем

- Факторы, влияющие на турбулентность в пограничном слое
 - Градиент давления
 - Кривизна поверхности (продольная или поперечная)
 - ✓ Отношение толщины поверхности к радиусу кривизны δ^*/R
 - Вдув (отсос) жидкости через поверхность
 - ✓ Скорость вдува (V_w/v^* или V_w/U_e)
 - Шероховатость
 - ✓ Высота бугорков эквивалентной песочной шероховатости $k_s^+ = \frac{k_s v^*}{\nu}$

- Под влиянием этих факторов характеристики пограничного слоя могут сильно измениться
 - Реламинаризация потока
 - Отрыв пограничного слоя



Можно управлять пограничным слоем



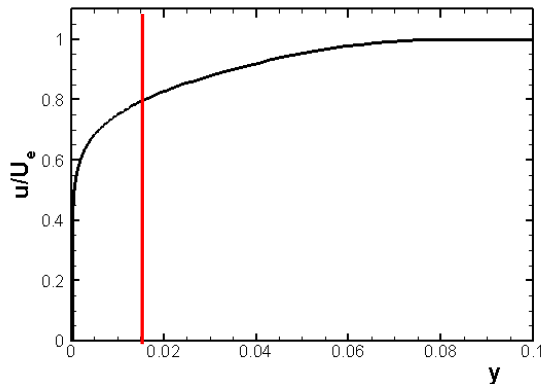
Влияние градиента давления на турбулентность в пограничном слое

Структура пограничного слоя

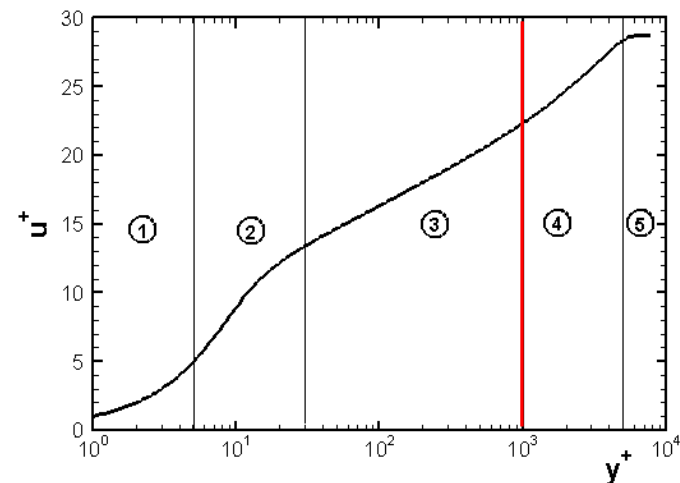
- Профиль скорости в турбулентном пограничном слое подчиняется определенным закономерностям, которые принято называть структурой пограничного слоя
 - Модели турбулентности специально настраиваются, чтобы ее воспроизводить
- Эти закономерности характерны для естественным образом развивающихся (статистически установившихся) пристенных течений
 - Они неверны для бесдвигового пограничного слоя или натекающей на стенку турбулентной струи
- Эти закономерности не абсолютны
 - Даже в простейших пристенных течениях (пограничный слой на плоской пластине и установившееся течение в канале) они выполняются приближенно
 - Дополнительные факторы (градиент давления, шероховатость, массообмен на стенке) в той или иной степени меняют эти закономерности

Структура пограничного слоя

- Разные области пограничного слоя являются автомодельными в разных координатах
- С начала 20 века рассматривали двухслойные (трехслойные и т.д.) профили скорости в пограничном слое.
 - Прандтль, Карман, Тейлор
- К концу 1950-х годов окончательно сформировались представления о структуре профиля скорости
 - Пограничный слой принято делить на две области
 - ✓ Внутреннюю
 - ✓ Внешнюю



Профиль скорости
турбулентного пограничного
слоя в физических координатах



Профиль скорости турбулентного
пограничного слоя
в логарифмических координатах

Внутренняя область пограничного слоя

- Составляет около 20% толщины пограничного слоя
 - Без градиента давления
- Содержит около 80% энергии турбулентных пульсаций
- Существенную роль играют диссипативные (вязкие) силы

➤ Масштаб скорости - динамическая скорость $v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$

➤ Линейным масштабом является динамическая длина $l^* = \frac{\nu}{v^*}$

➤ Переменные закона стенки $y^+ = \frac{yv^*}{\nu}, u^+ = \frac{u}{v^*}$

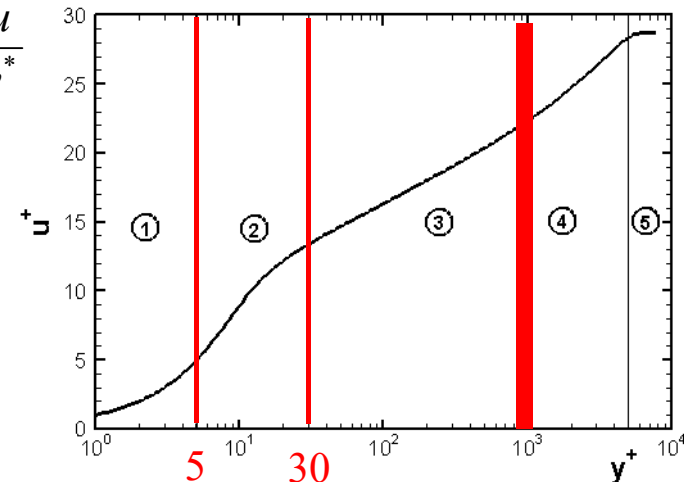
• Подобласти

1. Вязкий подслой $\nu \frac{\partial u}{\partial y} \gg -\overline{u'v'}$

2. Переходная область $\nu \frac{\partial u}{\partial y} \approx -\overline{u'v'}$

3. Логарифмическая область $\nu \frac{\partial u}{\partial y} \ll -\overline{u'v'}$

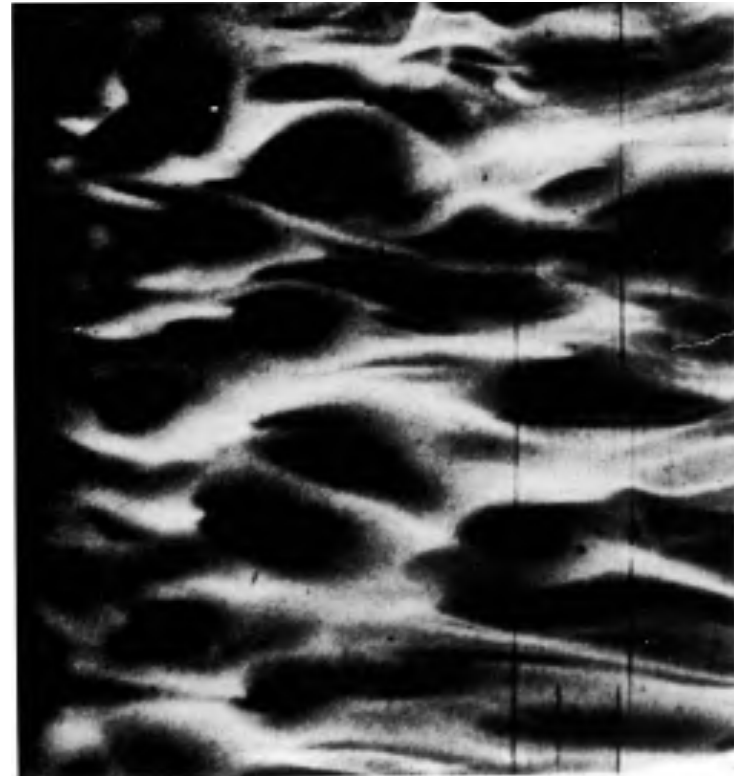
$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+), \quad \kappa = 0.41, \quad B = 5.2, \quad E = 9.0$$



Профиль скорости в переменных закона стенки

Вихревые структуры внутренней области

- Для внутренней области характерны мелкомасштабные структуры
 - Характерный размер энергонесущих вихрей α порядка расстояния до стенки
 - Короткое время жизни («длины жизни»)
- Для внутренней области характерна «короткая память»
 - Информация о внесенных возмущениях «забывается» за несколько толщин пограничного слоя
- Вязкий подслой не является стационарным
 - Области ускоренного и замедленного движения

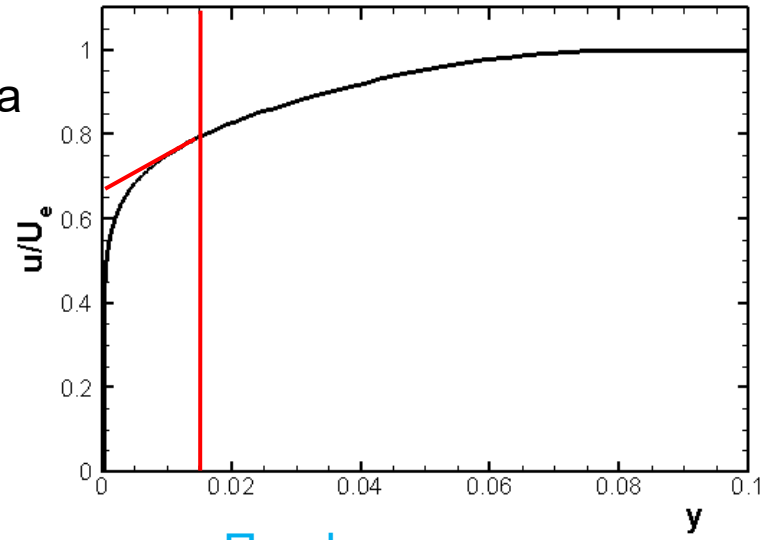
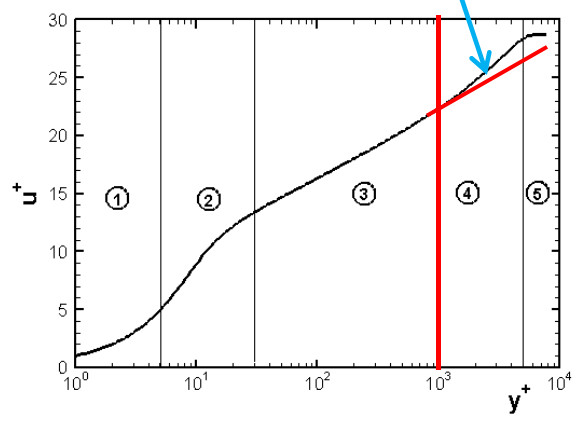


Области ускоренного и замедленного движения в вязком подслое

Внешняя область пограничного слоя

- Впервые была описана Клаузером
- Переменные закона следа $\frac{y}{\delta} \quad \frac{U_e - u}{v^*}$
 - Профили скорости во внешней области являются подобными
 - ✓ Закон падения дефекта скорости (закон следа)
- Профиль во внешней области подобен профилю Блазиуса
 - При скорости на стенке $\approx 0.65 U_e$
- Формула Коулза
 - Объединяет закон стенки и закон следа

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B + \frac{2\Pi}{\kappa} \left[\sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \right]^2, \quad \Pi = 0.4 \div 0.5$$

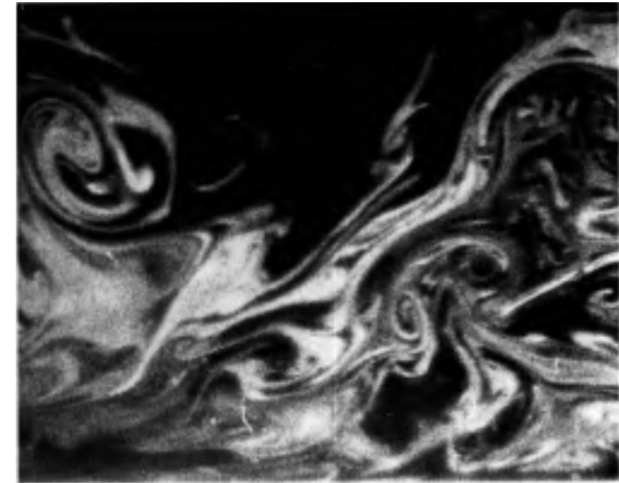


Профиль скорости турбулентного пограничного слоя в физических координатах

Вихревые структуры внешней области

Область дефекта скорости

- Турбулентные структуры порядка толщины пограничного слоя
- Внесенное возмущение сохраняется на протяжении десятков толщин
 - Эффект «долгой» памяти

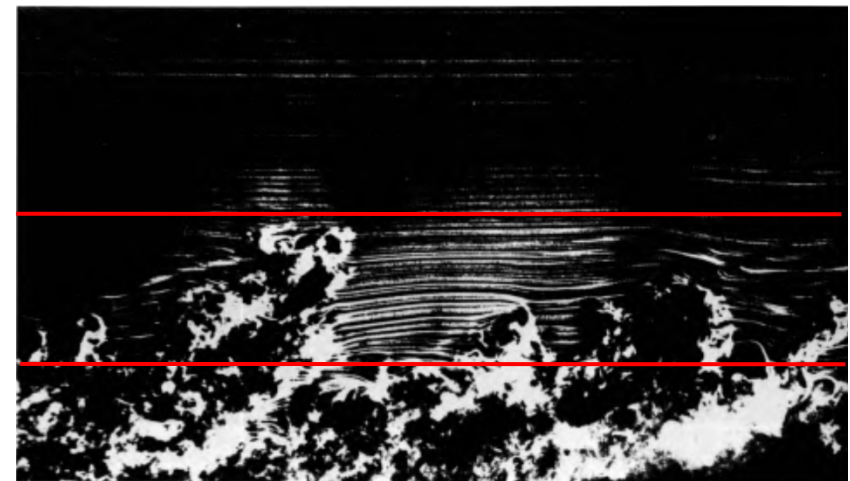


Типичные вихри в пограничном слое

Область перемежаемости

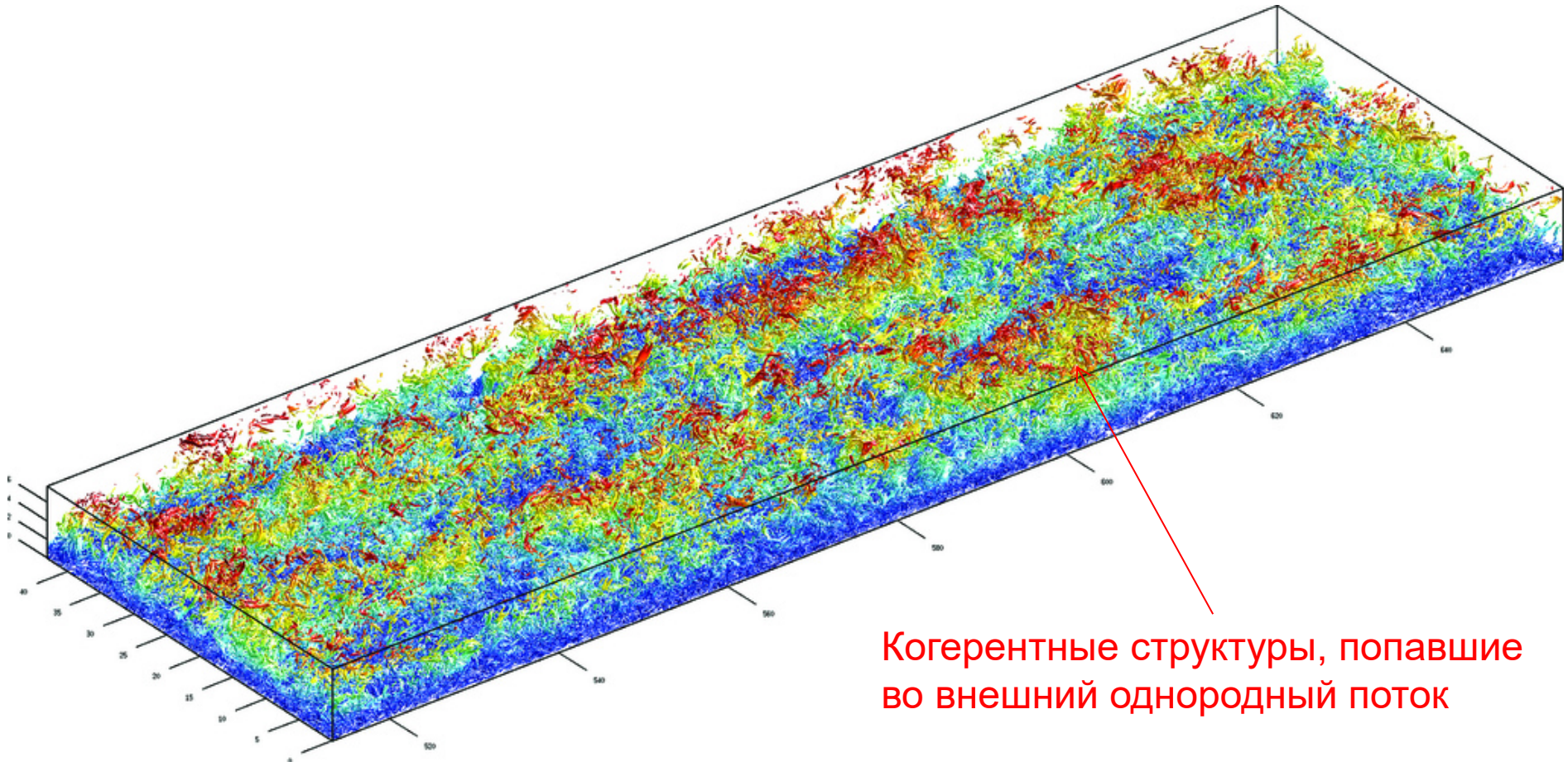
- На фоне почти однородного бессдвигового течения двигаются крупные когерентные структуры
 - Между ними участки ламинарного течения
 - ✓ Перемежаемость
- Клебанов (1956) предложил эмпирическую корреляционную зависимость для коэффициента перемежаемости

$$\gamma = \left(1 + 5.5(y/\delta_{0.95})^6\right)^{-1}$$



Когерентные структуры

Визуализация когерентных структур (DNS)



Когерентные структуры, попавшие во внешний однородный поток

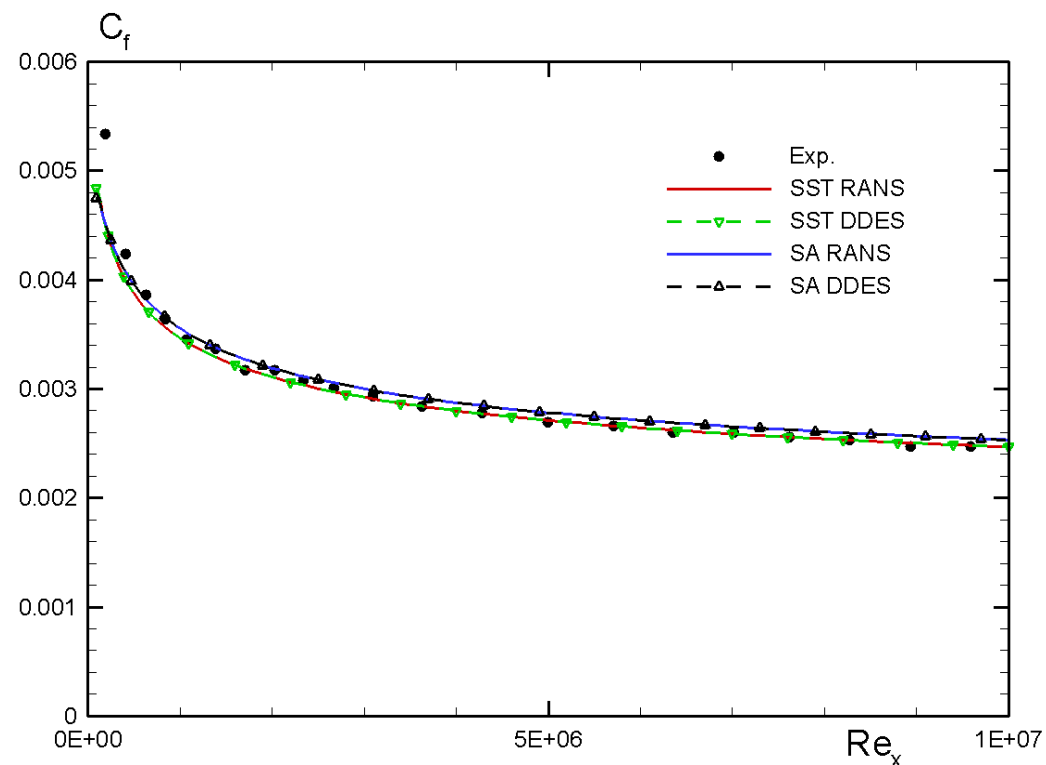
Изоповерхности завихренности, окрашенные значением скорости

Калибровка моделей турбулентности

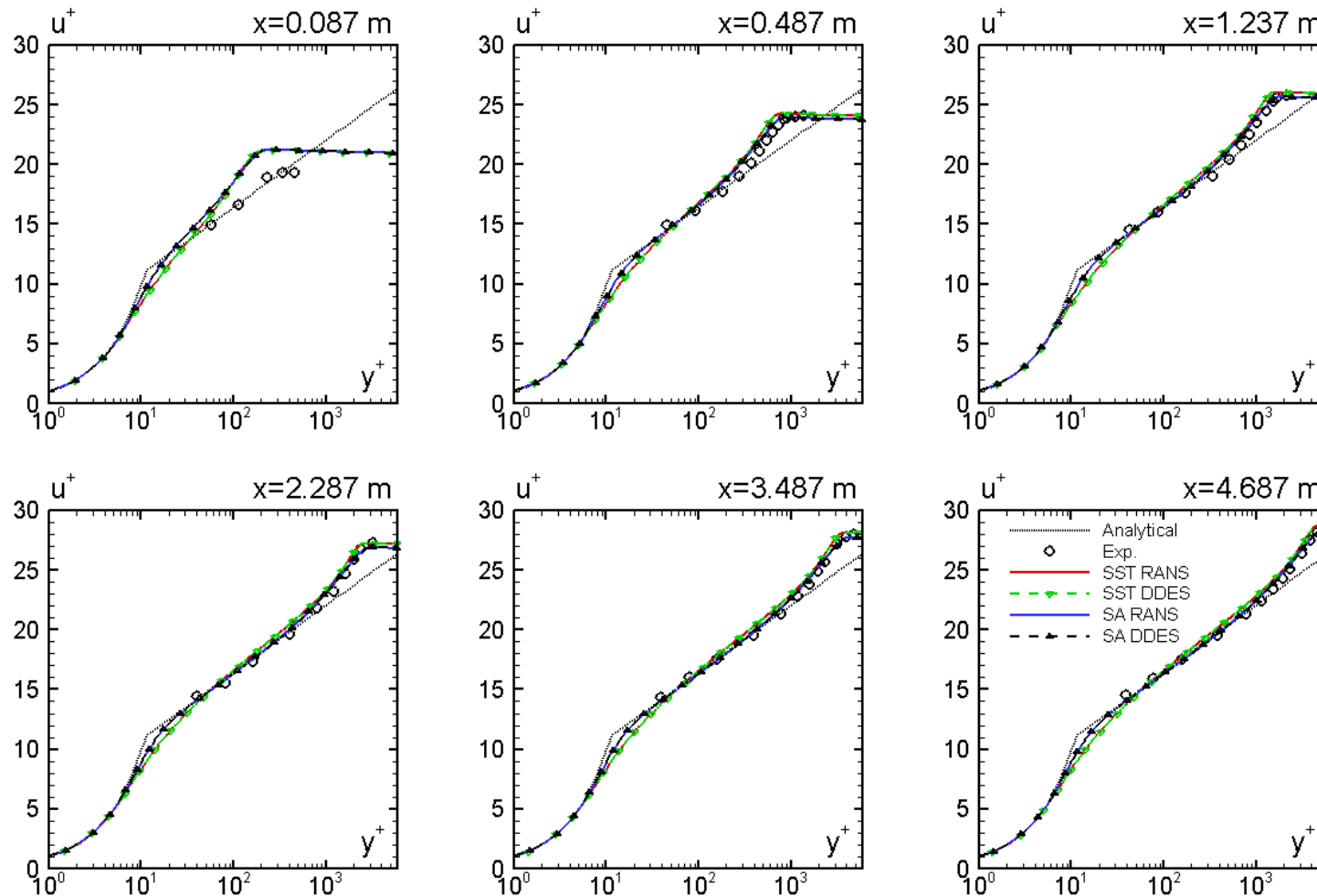
- Турбулентный пограничный слой традиционно используется для калибровки моделей турбулентности
 - Wiegardt, Tillmann (1951)
 - ✓ Данные доступны в Стэнфордской базе данных
 - DNS
 - ✓ Много данных до $Re_{\theta}=4300$
- Условия эксперимента
 - Рабочий газ – воздух
 - ✓ Кинематическая вязкость $\nu = 1.51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$
 - Длина пластины $L = 5 \text{ м}$
 - Скорость набегающего потока $U_0 = 33 \text{ м/с}$
 - ✓ Число Рейнольдса $Re_L = L \cdot U_0 / \nu = 10^7$
 - Степень турбулентности набегающего потока $Tu < 0.25\%$
- Наиболее интересные характеристики
 - Коэффициент трения
 - Профили скорости в переменных закона стенки
 - Профили напряжений Рейнольдса

Полуэмпирические модели турбулентности

- При малых числах Re модели занижают трение
 - Не полностью развитое турбулентное течение
- При $Re_\theta=10^4$ коэффициент трения $C_f=2.62 \cdot 10^{-3}$
 - Модель SA: $C_f=2.61 \cdot 10^{-3}$
 - Модель SST: $C_f=2.54 \cdot 10^{-3}$

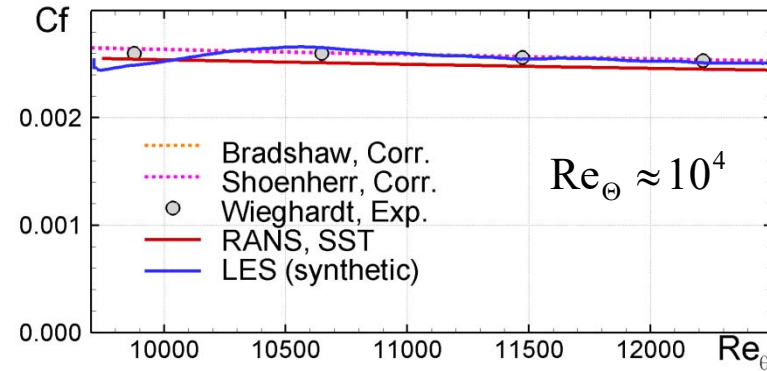
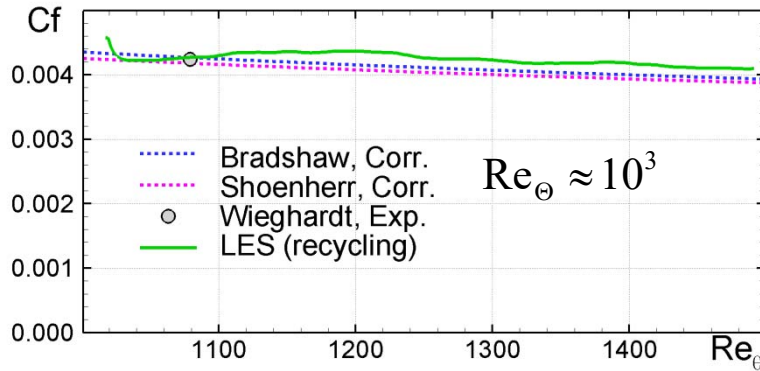


Полуэмпирические модели турбулентности

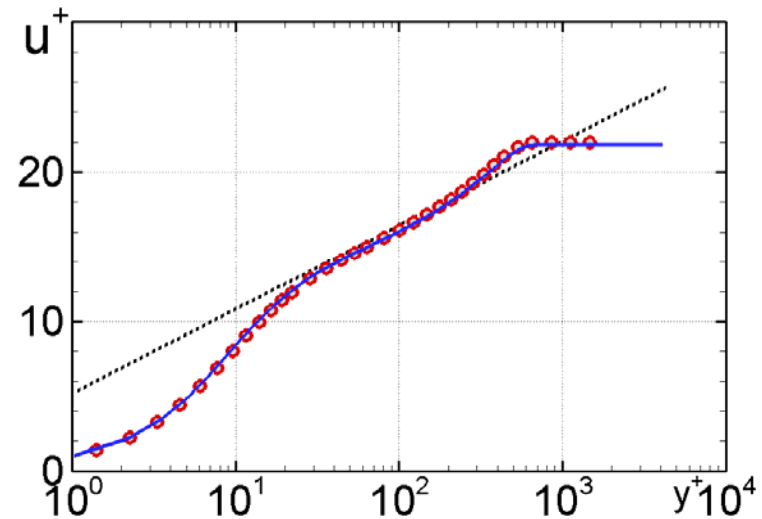
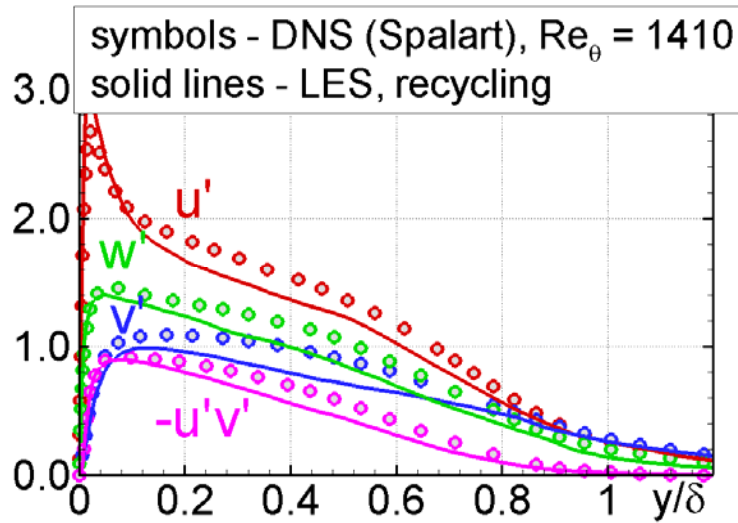


Профили скорости в различных сечениях пограничного слоя

Подсеточные модели (LES)



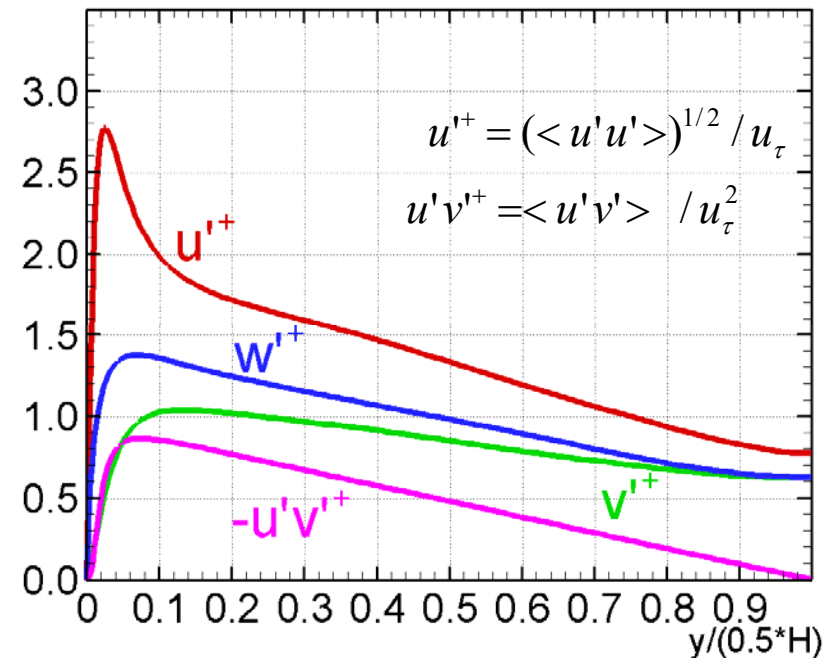
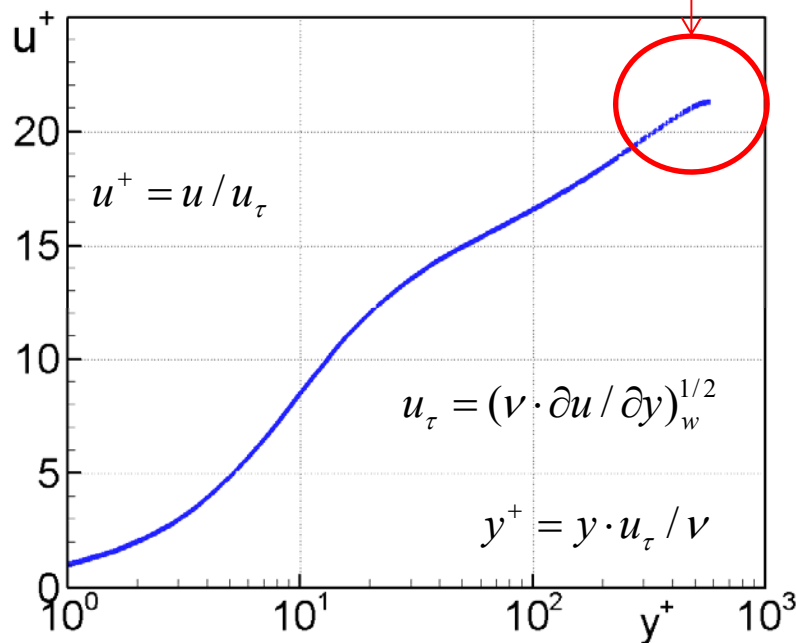
Коэффициент трения при разных числах Рейнольдса



Профили скорости и напряжений Рейнольдса

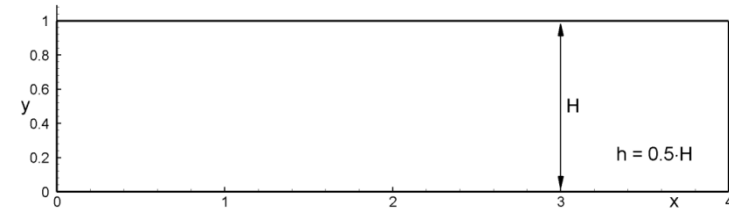
Установившееся течение в плоском канале и круглой трубе

- Структура течения аналогична пограничному слою
 - Толщина слоя ограничена поперечным размером канала (трубы)
- Профиль скорости удовлетворяет закону стенки
 - Отсутствует внешняя область пограничного слоя



Типичные профили скорости и турбулентных напряжений
в переменных закона стенки

Основные закономерности



- Характерные масштабы
 - Линейный масштаб
 - ✓ Плоский канал – высота H или полувысота $h=H/2$
 - ✓ Круглая труба – радиус R или диаметр D
- Уравнения осредненного движения
 - В случае установившегося течения остается только зависимость продольной компоненты скорости от поперечной координаты
 - ✓ Профиль полных касательных напряжений – линейный
 - ✓ В ламинарном случае аналитическое решение
 - Парабола Пуазейля
 - Плоский канал

$$\frac{d\tau_{\Sigma}}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\nu \frac{du}{dy} - \overline{u'v'} \right) = \frac{d}{dy} \left((\nu + \nu_T) \frac{du}{dy} \right) = \frac{dp}{dx} = const \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_{\Sigma}}{\tau_w} = 1 - \frac{y}{h}$$

- Круглая труба

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{\Sigma})}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[\nu \frac{\partial u}{\partial r} - \overline{u'_z u'_r} \right] \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(\nu + \nu_t) \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{dp}{dz} = const \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_{\Sigma}}{\tau_w} = \frac{r}{R}$$

Основные закономерности

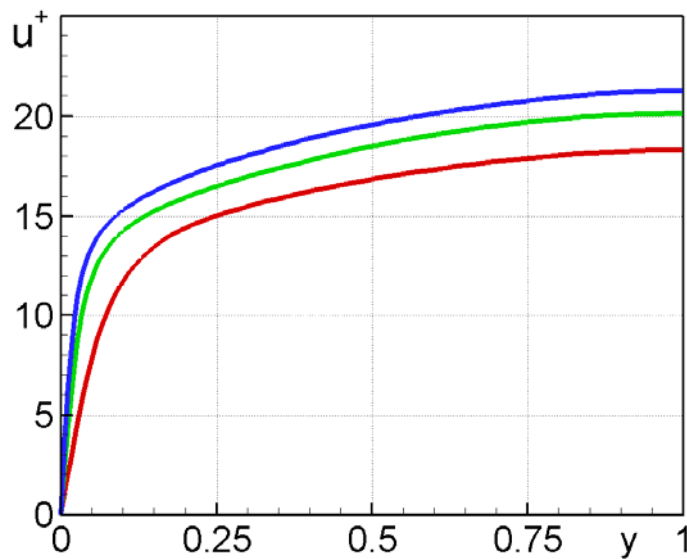
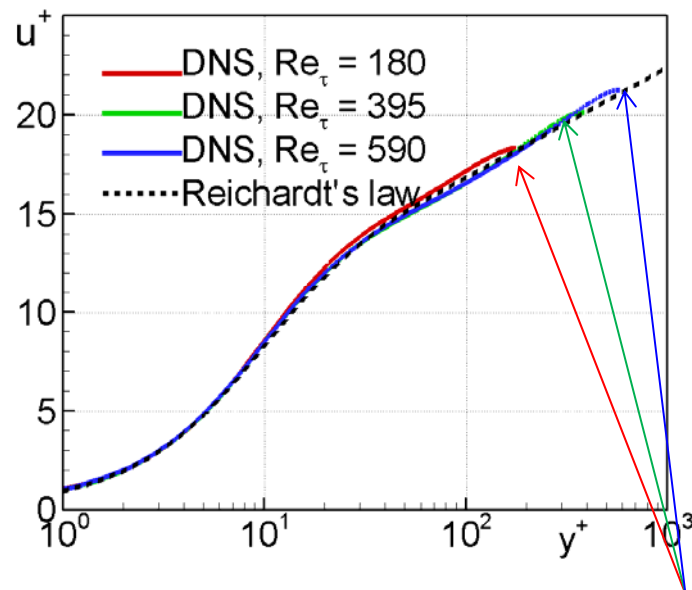
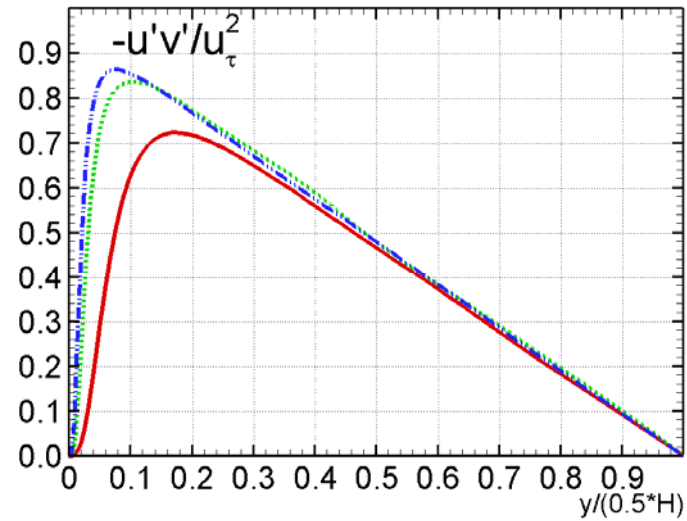
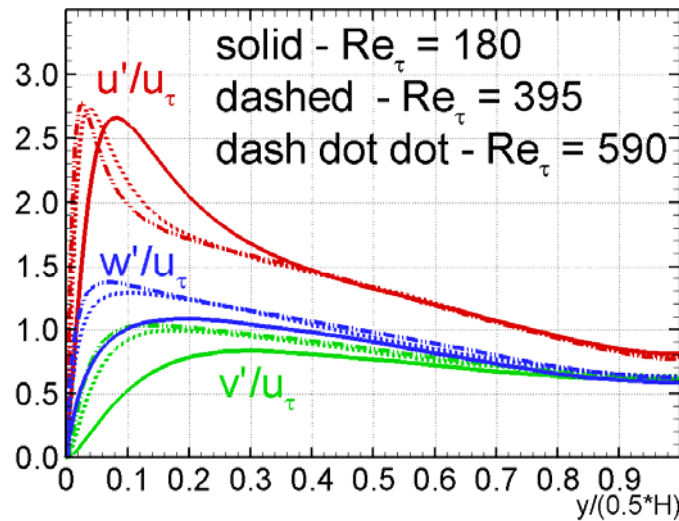
- Можно использовать различные скоростные масштабы
 - Максимальная по сечению скорость U_{max}
 - Среднерасходная скорость U_{bulk}
 - Динамическая скорость u_τ
- На практике используют разные числа Рейнольдса
 - $Re_\tau = u_\tau \cdot R / \nu$ или $Re_\tau = u_\tau \cdot h / \nu$
 - $Re_D = U_{bulk} \cdot D / \nu$ или $Re_H = U_{bulk} \cdot H / \nu$
 - Между ними существуют эмпирические корреляции
 - ✓ Плоский канал $Re_H \approx 14.64 \cdot (Re_\tau)^{8/7}$
 - ✓ Круглая труба $Re_D \approx Re_\tau \cdot (4.74 \cdot \log(Re_\tau) + 5.18)$
- В установившемся течении влияние градиента давления

компенсируется трением о стенки $\int_V |\nabla p| = \int_S \tau_w$

- Плоский канал $2\tau_w = H \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{u_\tau^2}{h} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$
- Круглая труба $2\pi R \tau_w = \pi R^2 \frac{dp}{dz} \Rightarrow \frac{2u_\tau^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}$

Градиент давления определяет число Рейнольдса Re_τ

Пример DNS (умеренные числа Re)



Значение y^+ в центре канала равно числу Рейнольдса Re_τ

Резюме

- Пристенная турбулентность – важная составляющая большинства течений
- Турбулентный пограничный слой имеет сложную структуру. Внутренняя область (вязкий подслой, переходная область, логарифмическая область) автомодельна в переменных закона стенки, а внешняя (область дефекта скорости, область перемежаемости) – в переменных закона следа
- Неправильное описание пограничного слоя может привести к искажению всей структуры течения
- Почти все модели турбулентности «настроены» на решение пограничного слоя
- Установившееся течение в канале или круглой трубе – наиболее простой тест для моделей турбулентности, поскольку не зависит от начальных или граничных условий