

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Моделирование турбулентности»
(http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/turb_models)

Лекция 9

Полуэмпирические модели турбулентности

Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2023

История развития моделей турбулентности

- До 1940 г. - введение основных понятий
 - Гипотеза Буссинеска (1877)
 - Осреднение по Рейнольдсу (1895)
 - Теория пути смешения Прандтля (1925)
 - Формула Кармана (1930)
 - Однородная изотропная турбулентность (Тейлор, 1935)
- 40е-50е гг. - создание математической базы и теоретических основ большинства моделей турбулентности.
 - Формула Колмогорова, первая модель $k-\omega$ (Колмогоров, 1942)
 - Первая модель Рейнольдсовых напряжений (Ротта, 1951)
 - Формула Клаузера (1956)
 - Демпфирующий множитель Ван-Дрифта (1956)

История развития моделей турбулентности

- 60-е годы – наше время. Использование моделей турбулентности для замыкания уравнений Рейнольдса
 - 60-е. Бурное развитие моделирования турбулентности, появление моделей различных типов
 - 70-е. Появление k - ε моделей, связанные с ними большие надежды, появление огромного количества модификаций
 - 80-е. Кризис в развитии полуэмпирических моделей турбулентности
 - 90-е. Практичный подход к созданию моделей. Появление лучших современных моделей турбулентности
 - 2000-е. Смещение интереса в сторону вихреразрешающих (в первую очередь гибридных) методов

Кризис в развитии моделей турбулентности

- Предложены сотни полуэмпирических моделей турбулентности
 - Универсальная RANS модель так и не создана
 - ✓ Это означает наличие кризиса в полуэмпирической теории турбулентности
- Параметры многих турбулентных течений определяется относительно крупными (с размерами порядка макро-масштаба течения) устойчивыми когерентными вихревыми структурами, зависящими от конкретной геометрии течения и граничных условий
 - Эти структуры имеют мало общего с универсальными хаотичными вихрями, населяющими тонкие сдвиговые слои, для которых строятся и на которых калибруются полуэмпирические модели



Невозможно создать универсальную полуэмпирическую модель турбулентности

Классификация моделей турбулентности

- Модели, использующие гипотезу Буссинеска (линейные модели, EVM). Обычно классифицируются по количеству дифференциальных уравнений переноса
 - Алгебраические модели
 - Модели с одним уравнением
 - ✓ модель Спаларта-Аллмареса SA
 - ✓ модель Секундова v_t -92
 - Модели с двумя уравнениями
 - ✓ Модели типа k - ϵ
 - ✓ Модели типа k - ω
 - Модель Ментера SST
 -
 - ✓ Модель Дурбина
- Модели рейнольдсовых напряжений (нелинейные модели)
 - Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений (DRSM)
 - Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (ARSM)
 - Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM)
 - ✓ Нелинейные модели (NLM)

Гипотеза пути смешения Прандтля

Основана на аналогии молекулярного и турбулентного переноса

- В сдвиговом потоке молекулярное касательное напряжение $\tau_{xy} = \mu \frac{\partial U}{\partial y}$
 - Молекулярную вязкость можно выразить через термическую скорость v_m (примерно 4/3 скорости звука) и длину свободного пробега l_m
$$\mu = \frac{1}{2} \rho v_m \cdot l_m$$
- Будем считать, что турбулентный перенос импульса осуществляется некими среднестатистическими турбулентными молями (или вихрями)
 - Характерная скорость v_{mix}
 - Характерный линейный размер l_{mix}
 - ✓ Турбулентный моль сохраняет свою индивидуальность
- По аналогии с молекулярной диффузией $\tau_{xy}^t = \mu_t \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2} \rho v_{mix} \cdot l_{mix} \frac{\partial U}{\partial y}$
 - Прандтль предположил, что $v_{mix} = Cl_{mix} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$
 - Длина пути перемешивания не является детерминированной величиной
 - ✓ С него можно внести константы 0.5 и C
- Турбулентная вязкость определяется как $\mu_t = \rho \cdot l_{mix}^2 \frac{\partial U}{\partial y}$
 - Формула Прандтля

Алгебраические модели турбулентности

- Не содержат дифференциальных уравнений переноса
- Базируются на модели Прандтля $\mu_t = \rho \cdot l_{mix}^2 \frac{\partial U}{\partial y}$
 - Необходимо определить масштаб турбулентности l_{mix}
- Попытка определить масштаб из соображений размерности оказалась неудачной
 - Формула Кармана $l_{mix} = -\kappa \frac{du/dy}{d^2u/dy^2} \Rightarrow \nu_T = -\kappa^2 \frac{(du/dy)^3}{(d^2u/dy^2)^2}$
- Необходимо использовать масштабы турбулентности, характерный для конкретной задачи
 - Свободные сдвиговые течения
 - ✓ Характерная локальная толщина поперек потока $\delta(x)$
 - ✓ $l_{mix} = \alpha \delta(x)$
 - Значение константы зависит от рассматриваемого течения

Течение	α
Дальний след	0.180
Слой смешения	0.071
Плоская струя	0.098
Круглая струя	0.080

Алгебраические модели для пристенных течений

(На примере модели Себеси-Смита)

- Опираются на двухслойную структуру пограничного слоя

- Для внутренней и внешней областей используются разные формулы

$$v_T = \begin{cases} v_{Ti}, y \leq y_m \\ v_{To}, y > y_m \end{cases}$$

- Граница областей y_m определяется равенством вязкостей $v_{Ti}(y_m) = v_{To}(y_m)$

- Во внутренней области используется формула Прандтля

$$v_{Ti} = (\kappa y)^2 D |\partial u / \partial y|, \kappa = 0.41$$

- Линейный масштаб $l_{mix} = \kappa y$

- ✓ Обеспечивает выполнение логарифмического закона $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$

- Для учета вязкого подслоя используется демпфирующий множитель Ван-Дрифта $D = \left(1 - \exp(-y^+/A)\right)^2, A = 26$

- Во внешней области используется формула Клаузера (постоянная вязкость) $v_{To} = k \delta^* U_e \gamma, k = 0.0168$

- Коэффициент перемежаемости Клебанова $\gamma = \left(1 + 5.5(y/\delta_{0.95})^6\right)^{-1}$

- Для учета влияния сжимаемости, градиента давления, массообмена через стенку, шероховатости и кривизны поверхности, малых чисел Рейнольдса и т.п. необходимо введение дополнительных поправок

Модель Болдуина-Ломакса

- Модель Себеси-Смита использует величины, трудно определяемые даже в двумерном случае

➤ $U_e, \delta^*, \delta_{0.95}, v^*$

- Этот недостаток был исправлен в модели Болдуина-Ломакса

$$v_T = \begin{cases} v_{Ti}, y \leq y_m \\ v_{To}, y > y_m \end{cases}, v_{Ti}(y_m) = v_{To}(y_m)$$

$$v_{Ti} = (\kappa d_w)^2 D |\omega|, D = (1 - \exp(-d_w^+/A))^2$$

$$v_{To} = k C_{CP} F_{WAKE} \gamma, \gamma = (1 + 5.5(C_{KLEB} d_w / Y_{MAX})^6)^{-1}$$

- Характерными линейным и скоростным масштабами внешней области являются величины F_{MAX}, Y_{MAX}

- ✓ Определяются максимальным поперек слоя значением функции

$$F(y) = d_w |\omega| (1 - \exp(-d_w^+/A))$$

- Параметр $F_{WAKE} = \text{Min}(Y_{MAX} F_{MAX}, C_{WK} Y_{MAX} U_{DIF}^2 / F_{MAX})$ переключает версии модели

- Пограничный слой

- ✓ Модификация формулы Клаузера

$$F_{WAKE} = Y_{MAX} F_{MAX}$$

- Свободное течение

- ✓ Аналог формулы Прандтля

$$F_{WAKE} = C_{WK} Y_{MAX} U_{DIF}^2 / F_{MAX}$$

$$\mu_t = \chi \rho [U_{\max}(x) - U_{\min}(x)] \delta(x) = \chi \rho U_{DIF} \delta(x)$$

- Константы модели $\kappa = 0.4, k = 0.0168, A = 26, C_{CP} = 26, C_{KLEB} = 0.3, C_{WK} = 0.25$

- В этой модели подразумевается направление течения

- Применение в случае сложных течений затруднено

Дифференциальные модели турбулентности

- Алгебраические модели турбулентности
 - Основаны на закономерностях, характерных для тех или иных «канонических» течений (пограничный слой, струя, слой смешения)
 - Используют нелокальные характеристики, такие как толщина ПС, трение на стенке и т.п.
 - ✓ Очень неуниверсальны
 - Трудно имплементируемы в современные коды



Практически не используются в настоящее время

- Дифференциальные модели
 - Легко применимы к течениям в областях сложной геометрии
 - Нет необходимости использовать нелокальные переменные, характерные для пограничных слоев или других течений
 - Имеют «эффекты памяти» за счет решения уравнений переноса.



Дифференциальные модели турбулентности существенно более универсальны и технологичны, чем алгебраические

Модели с одним дифференциальным уравнением

Дифференциальное уравнение может быть записано относительно различных переменных

- Первые модели были основаны на уравнении для кинетической энергии турбулентности
 - Требуется дополнительных алгебраических соотношений для замыкания
 - ✓ Диссипация (формула Колмогорова) $\varepsilon = C_d \frac{K_t^{3/2}}{L_t}$
 - ✓ Турбулентная вязкость $\nu_t = C_\mu \frac{K_t^2}{\varepsilon}$
 - ✓ Линейный масштаб турбулентности
 - Эти модели не более универсальны чем алгебраические модели
- Аналогичные проблемы характерны для моделей, основанных на других переменных
 - Турбулентное число Рейнольдса (модель Болдуина-Барса)
- Наиболее успешными являются модели, решающие уравнение относительно турбулентной вязкости
 - Модель Спаларта-Аллмареса
 - Модель Секундова ν_t -92

Модель Спаларта-Аллмареса

- Содержит одно дифференциальное уравнение относительно «высокорейнольдсовой» турбулентной вязкости, связанной с турбулентной вязкостью алгебраическим соотношением
 - В качестве линейного масштаба турбулентности использует расстояние до стенки
- Разрабатывалась для задач внешней аэродинамики, но оказалось, что ее область применимости гораздо шире
- Содержит ряд поправок, расширяющих ее область применимости
 - Поправка на кривизну и вращение
 - Поправка на шероховатость
 - Нелинейная версия модели



Модель Спаларта-Аллмареса является одной из наиболее широко используемых моделей турбулентности

Модель Секундова v_t -92

- Содержит одно дифференциальное уравнение относительно турбулентной вязкости, но по принципу построения сильно отличается от модели Спаларта-Аллмареса
 - В качестве линейного масштаба турбулентности использует расстояние до стенки
- Превосходит другие модели при расчете струйных течений
- Содержит ряд поправок, расширяющих ее область применимости
 - Поправка осесимметричности
 - Поправка на сжимаемость
 - Поправка на шероховатость
- Проигрывает модели Спаларта-Аллмареса с вычислительной точки зрения
 - Большой разностный шаблон
 - Более нелинейное уравнение



Модель Секундова используется гораздо реже модели Спаларта-Аллмареса

Модели с двумя дифференциальными уравнениями

- Для описания турбулентности необходимы два масштаба
 - Энергия турбулентности
 - Диссипация турбулентности



- Модели с одним дифференциальным уравнением требуют привлечения дополнительного масштаба
 - Например, расстояние до стенки
- Два уравнения дают два независимых масштаба турбулентности
 - Нет необходимости привлекать дополнительные соображения
 - ✓ Модель менее ориентирована на определенные типы течений
- Наиболее часто используются два типа моделей
 - $k-\varepsilon$
 - $k-\omega$
- Модели более чем с двумя уравнениями используются очень редко
 - Нет необходимости в привлечении третьего масштаба

Модели типа $k-\varepsilon$

Различаются по способу описания влияния пристенных эффектов

- **Высокорейнольдсовые модели**
 - «Стандартная» модель
 - RNG модель
 - Для учета влияния стенок используются пристенные функции
 - ✓ Основаны на законе стенки
 - **Достоинство: возможно использование более грубых сеток**
 - **Недостаток: предписанный закон стенки**
- **Низкорейнольдсовые модели**
 - Launder-Sharma
 - Chien
 - Для учета влияния стенок в модель вводятся специальные демпфирующие функции
 - ✓ Аналог демпфирующей функции Ван-Дрифта
 - **Недостаток: получается жесткая система уравнений**
- **Модели типа $k-\varepsilon$**
 - **Достоинство: расчет свободных течений**
 - **Недостаток: неправильное предсказание точки отрыва**



Модели типа $k-\varepsilon$ постепенно вытесняются более совершенными моделями

Модели типа $k-\omega$

- Вместо ε используется для удельная диссипация ω ($\varepsilon = C_\mu k \omega$)
- Комбинацию уравнений для k и ω предложил Колмогоров (1942)
- Модели типа $k-\omega$ активно продвигались с 70х годов усилиями Wilcox'a
 - Оказалось, что эти модели способны к расчету пристенной турбулентности без введения специальных функций
 - ✓ Это выгодно отличает их от $k-\varepsilon$ моделей
 - Однако их характеризует чрезвычайно высокая чувствительность к граничным условиям во внешнем потоке. В зависимости от значения ω во внешнем потоке результат существенно меняется
 - ✓ Толщина плоских свободных сдвиговых течений в ~ 1.5 раза
 - ✓ Толщина осесимметричных свободных сдвиговых течений в ~ 5 раз
- Для преодоления чувствительности к граничным условиям в уравнении для ω должен присутствовать cross-diffusion term

$$\rho \frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\omega \mu_T) \nabla \omega) + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \rho \beta \omega^2 + \sigma_d \frac{\rho}{\omega} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)$$

В настоящее время существуют десятки $k-\omega$ моделей, но наиболее успешной среди них является модель Ментера SST

Модель Ментера SST.

- Модели типа $k-\varepsilon$
 - Хорошо предсказывают свойства свободных сдвиговых течений
 - При расчете пристенных течений
 - ✓ Требуют специальных усилий
 - Пристенные функции
 - Низкорейнольдсовы поправки
 - ✓ Проблемы с положительным градиентом давления
- Модели типа $k-\omega$
 - Обеспечивают правильное описание пристенной турбулентности
 - Чувствительны к граничным условиям во внешнем потоке
- Модель SST - гибридная модель
 - В пристенной области используется $k-\omega$ модель
 - Во внешнем потоке используется $k-\varepsilon$ модель
 - Используется формула Брэдшоу в середине пограничного слоя

$$\overline{u'v'} = 0.31 \cdot k$$

В целом по качеству превосходит все другие модели турбулентности, но по вычислительной простоте и затратам уступает моделям с одним уравнением

Модели рейнольдсовых напряжений

- Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений (DRSM)
 - Для каждой из 6 независимых компонент тензора рейнольдсовых напряжений решается дифференциальное уравнение
 - Для замыкания этой системы необходимо добавить еще одно уравнение
 - ✓ для ε или ω
- Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (ARSM)
 - Алгебраические связи между рейнольдсовыми напряжениями и осредненными параметрами потока
 - Необходимо получить масштабы турбулентности
 - ✓ База модели: два дифференциальных уравнения (k - ε или k - ω)
- Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM)
 - Алгебраические связи разрешаются относительно рейнольдсовых напряжений.
 - ✓ Для связи между тензором рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций используются нелинейные соотношения
 - ✓ Эти модели часто называют нелинейными моделями (NLM)

Модели рейнольдсовых напряжений

- Потенциально превосходят модели турбулентной вязкости по способности расчета различных течений
- Полученное решение может быть неприемлемым с физической точки зрения. Это происходит, когда оно не удовлетворяет принципу реализуемости $\overline{u_i'^2} \geq 0, \overline{u_i'^2} \cdot \overline{u_j'^2} \geq (\overline{u_i' u_j'})^2, \det \{\overline{u_i' u_j'}\} \geq 0$

- Проблемы вычислительного характера
 - Существенные вычислительные затраты и проблемы со сходимостью
 - Дифференциальные модели
 - ✓ Решение системы из 7 уравнений переноса
 - Алгебраические модели
 - ✓ Решение системы трансцендентных алгебраических уравнений
 - ✓ Невозможность гарантировать существование и единственность решения



Несмотря на потенциальные преимущества, модели Рейнольдсовых напряжений используются гораздо реже, чем модели турбулентной вязкости

Поправки к моделям турбулентности

- Все модели турбулентности являются полуэмпирическими
 - Они пригодны для расчета тех течений, на которые их настроили
- Если необходимо учитывать другие эффекты, в модели необходимо вводить соответствующие поправки
 - Эффекты кривизны линий тока и вращения потока
 - Эффекты сжимаемости
 - Нелинейные эффекты
 - Поправка на осесимметричность
 - Учет шероховатости стенок
- Каждая поправка состоит из критерия и поправочной функции
- Использование поправок имеет свои минусы
 - Поправки могут увеличивать вычислительные затраты и ухудшать сходимость
 - Вне пределов области своего применения поправки могут приводить к негативным эффектам
 - ✓ Например: поправка на сжимаемость к моделям с двумя уравнениями



Применение поправок оправдано только в случае необходимости

Моделирование перехода

При моделировании перехода необходимо решить две задачи

- Определить место перехода
 - Переход принципиально не может быть описан в рамках полуэмпирической модели турбулентности
 - ✓ Переход определяется неустойчивостью ламинарного течения
 - Точка перехода должна быть получена из дополнительных соображений
 - ✓ Экспериментальные корреляции
 - ✓ Интегральные модели на основе теории устойчивости (метод e^n)
 - ✓ Модели перехода
- Описать переход в рамках выбранной модели турбулентности
 - Необходимо подавить генерацию характеристик турбулентности (v_t, K_t) в области выше по потоку от точки перехода
 - ✓ В сложных трехмерных течениях определение этой области является нетривиальной задачей
 - В окрестности точки перехода нужно обеспечить генерацию турбулентных характеристик
 - ✓ При этом трудно претендовать на описание характеристик течения в зоне перехода

Резюме

- Недостатки подхода, основанного на решении уравнений Рейнольдса, привели к созданию огромного количества моделей турбулентности
- Все существующие модели неуниверсальны
- Поскольку решение уравнений Рейнольдса – основной инструмент решения инженерных задач, идет постоянная работа по развитию моделей турбулентности
- Тестирование моделей – важная задача. Она помогает ответить на вопрос «какая модель оптимальна для решения конкретной задачи»
- Наиболее успешными современными моделями являются модели Спаларта-Аллмареса SA и Ментера SST