

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Моделирование турбулентности»
(http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/turb_models)

Лекция 11

Некоторые особенности применения моделей турбулентности

Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2023

Расчет пристенных течений

Требования к расчетным сеткам для низкорейнольдсовых моделей

- Сетка должна быть достаточной для разрешения всех особенностей течения
 - При использовании схем различного порядка точности требования к сетке могут меняться
- Турбулентный пограничный слой
 - Около стенки находится вязкий подслой ($y^+ \leq 5$)
 - ✓ Для правильного описания трения 2 точки должны находиться в вязком подслое
 - ✓ Нелинейность турбулентных характеристик ставит дополнительные ограничения
 - Принятый критерий для низкорейнольдсовых моделей $\Delta y_1^+ \leq 1$
 - В некоторых моделях (Лаундер-Шарма) критерий $\Delta y_1^+ \leq 0.2$
 - Профиль скорости во внутренней области существенно нелинейный
 - ✓ Нельзя слишком резко увеличивать шаг сетки
 - Отношение соседних шагов не должно превышать 1.3



Даже при умеренных числах Рейнольдса
необходимо 40-80 точек поперек пограничного слоя

Граничные условия на стенке

- На стенке $v_T = K_t = 0$
- Уравнение для k преобразуется к виду $\varepsilon = \nu \cdot \nabla \cdot (\nabla k) \approx \nu \cdot \frac{\partial^2 k}{\partial n^2}$
 - Это выражение - граничное условие для ε
- Использование такого граничного условия приводит к существенной дополнительной нелинейности
 - Модели, использующие такое граничное условие, практически неработоспособны
- Диссипацию представляют в виде $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + f_k$
 - Функция f_k удовлетворяет на стенке условию $f_k = \nu \cdot \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$
 - При удалении от стенки $f_k \rightarrow 0$
- Второе уравнение записывают относительно $\tilde{\varepsilon}$
 - Величины ε и $\tilde{\varepsilon}$ отличаются только около стенки
 - ✓ В уравнении появляется дополнительное слагаемое f_ε
 - ✓ При удалении от стенки $f_\varepsilon \rightarrow 0$

Граничные условия к $k-\omega$ моделям

- Можно показать, что в окрестности стенки удельная диссипация ω асимптотически стремится к ∞

$$\omega \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{6\nu}{\beta_1 y^2}$$

- Такое условие крайне трудно реализовать
 - ✓ Это одна из причин непопулярности моделей Wilcox до 1993 года

- Менгер исследовал различные граничные условия

- В настоящее время используют сформулированное им граничное условие

$$\omega_W = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 \Delta y_1^2}$$

- При сильном изменении пристенного шага вдоль поверхности может приводить к неустойчивости
 - ✓ Необходимо использовать ограничители

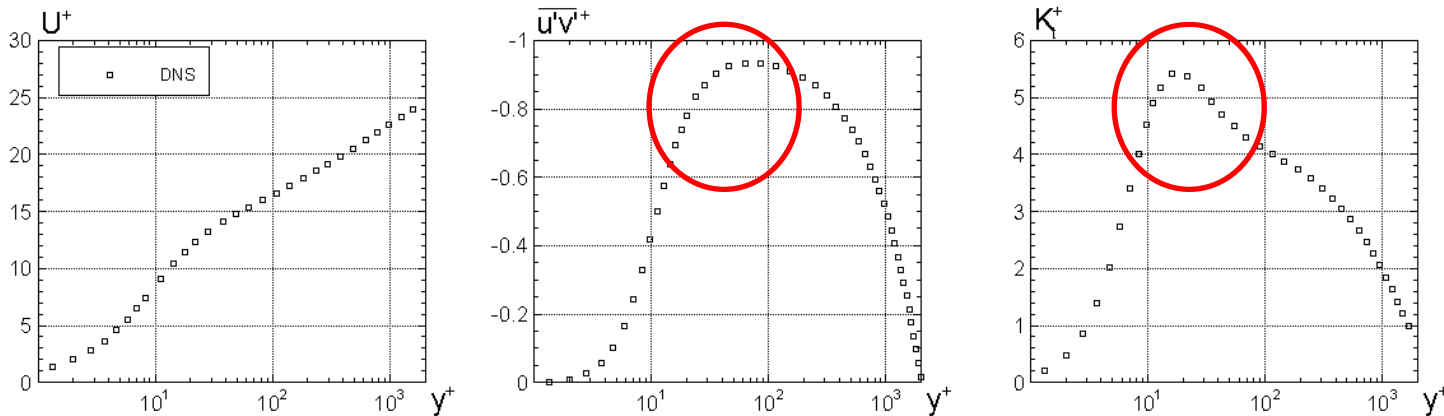
Особенности пристенной турбулентности

- Характерной особенностью пристенной турбулентности является наличие пика k в переходной области
 - В профиле касательного напряжения пика нет
- Это невозможно воспроизвести с использованием формулы Колмогорова

$$\overline{u'v'} = \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$



Для описания пристенной турбулентности
необходимы более сложные модели



Профили скорости, касательного напряжения Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности во внутренней области пограничного слоя

Пристенные функции

- Можно поместить первый пристенный узел в логарифмическую область пограничного слоя
 - Граничные условия должны базироваться на законе стенки
- Такой подход позволяет
 - Избежать сложностей, связанных с описанием переходной области
 - ✓ Можно использовать высокорейнольдсовые модели для расчета пристенных течений
 - Существенно ослабить требования к сетке поперек пограничного слоя
 - ✓ Первый пристенный узел должен находиться в логарифмической области

$$30 \leq \Delta y_1^+ \leq 100 \div 1000$$



С начала 70х годов этот подход активно развивается

Основа пристенных функций

- В основе пристенных функций лежат теоретические и экспериментальные закономерности, характерные для логарифмической области пограничного слоя

➤ Логарифмический профиль скорости
$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{y v_*}{\nu} \right) \quad (1)$$

➤ Формула Колмогорова
$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2)$$

- Постоянство касательного напряжения

$$\rho v_*^2 = \tau_w = \tau = \rho(\nu + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \approx \rho v_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3)$$

➤ Гипотеза локального равновесия
$$P_k = v_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \approx \varepsilon \quad (4)$$

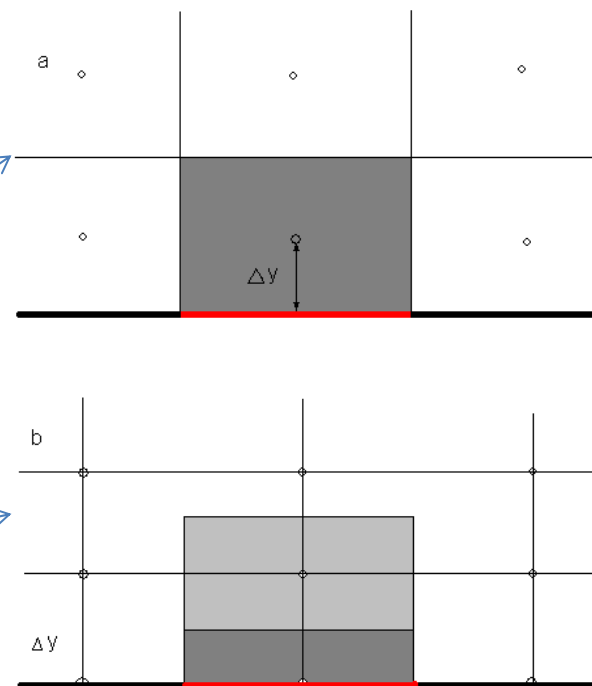
✓ Генерация и диссипация кинетической энергии турбулентности равны

- Формулы (1) - (4) связывают 5 переменных ($U, v_*, v_t, k, \varepsilon$) и недостаточны для постановки граничных условий.
- При помощи несложных преобразований из (1) – (4) можно получить

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{v_*}{\kappa y} \quad \varepsilon = \frac{v_*^3}{\kappa y} \quad k = \frac{v_*^2}{C_\mu^{0.5}}$$

Реализация пристенных функций

- Существует два способа постановки граничных условий с помощью пристенных функций
 - Задание значений в первом пристенном узле
 - Решение уравнений в первом пристенном узле методом конечных объемов
 - ✓ Задание потока на стенке
- Выбор подхода в значительной степени определяется используемым вычислительным кодом
 - Способ решения уравнений
 - ✓ Конечно-разностный
 - ✓ Конечно-объемный
 - Способом хранения данных
 - ✓ Cell centred
 - ✓ Vertex based



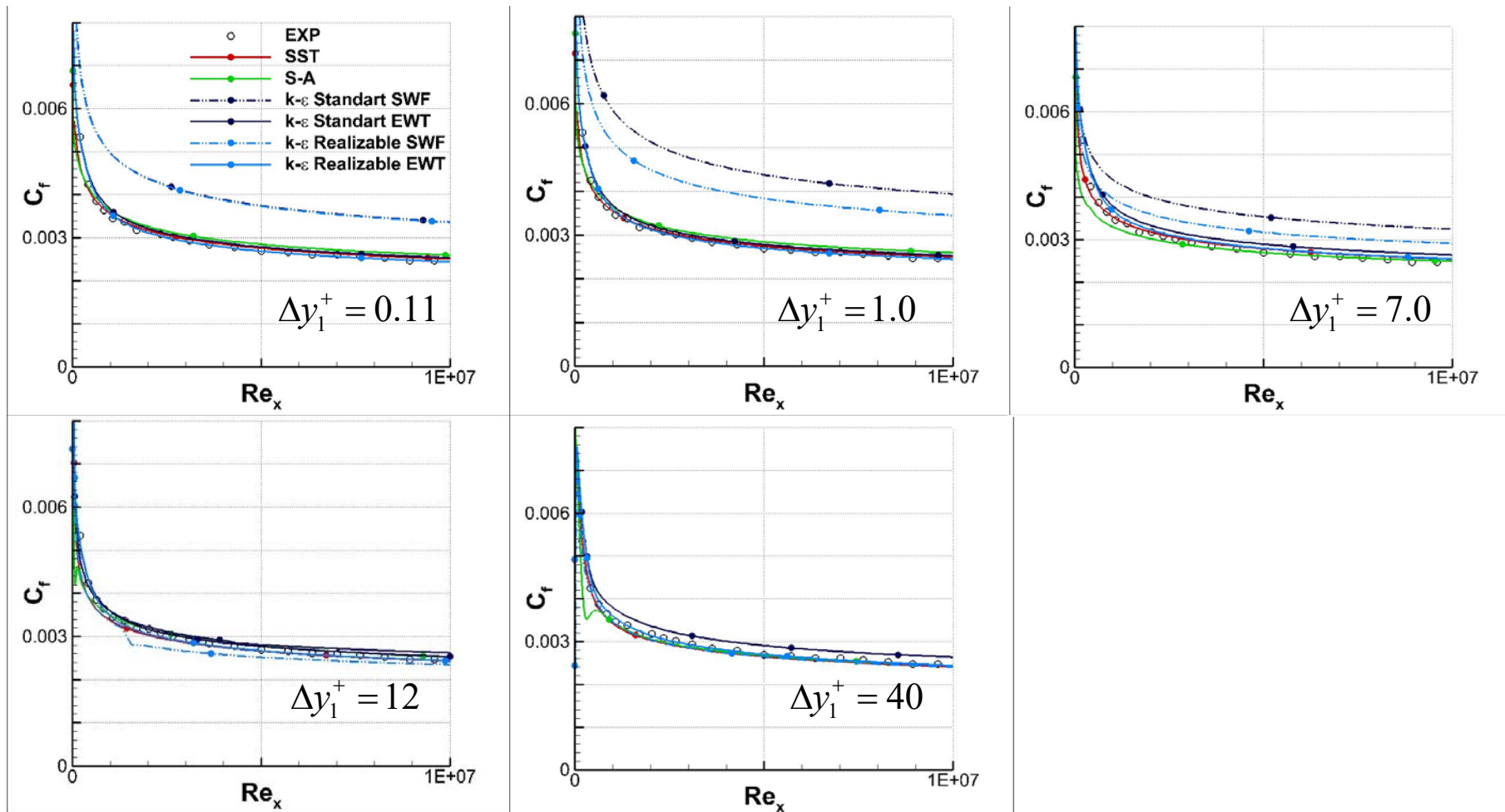
Постановка граничных условий на потоки более универсальна

Современные пристенные функции

- Недостатки традиционных пристенных функций
 - Первый пристенный узел должен лежать на логарифмическом участке профиля скорости $30 \leq \Delta y_1^+ \leq 100 \div 1000$
 - ✓ При измельчении сетки точность расчета падает
 - ✓ В окрестности отрыва этому условию невозможно удовлетворить
 - Низкое u_τ ведет к низкому Δy_1^+
- Современные пристенные функции работают при $\Delta y_1^+ > 1$
 - Масштабируемые пристенные функции (SWF)
- Менгер объединил граничные условия для низкорейнольдсовых моделей и пристенные функции в одном подходе
 - Этот подход работает во всем диапазоне Δy_1^+
 - ✓ Automatic wall treatment (AWT)
 - ✓ Enhanced wall treatment (EWT)
- Пристенные функции могут применяться и с низкорейнольдсовыми моделями
 - При использовании сеток с $\Delta y_1^+ \leq 30$ нельзя использовать высокорейнольдсовые модели

Применение пристенных функций

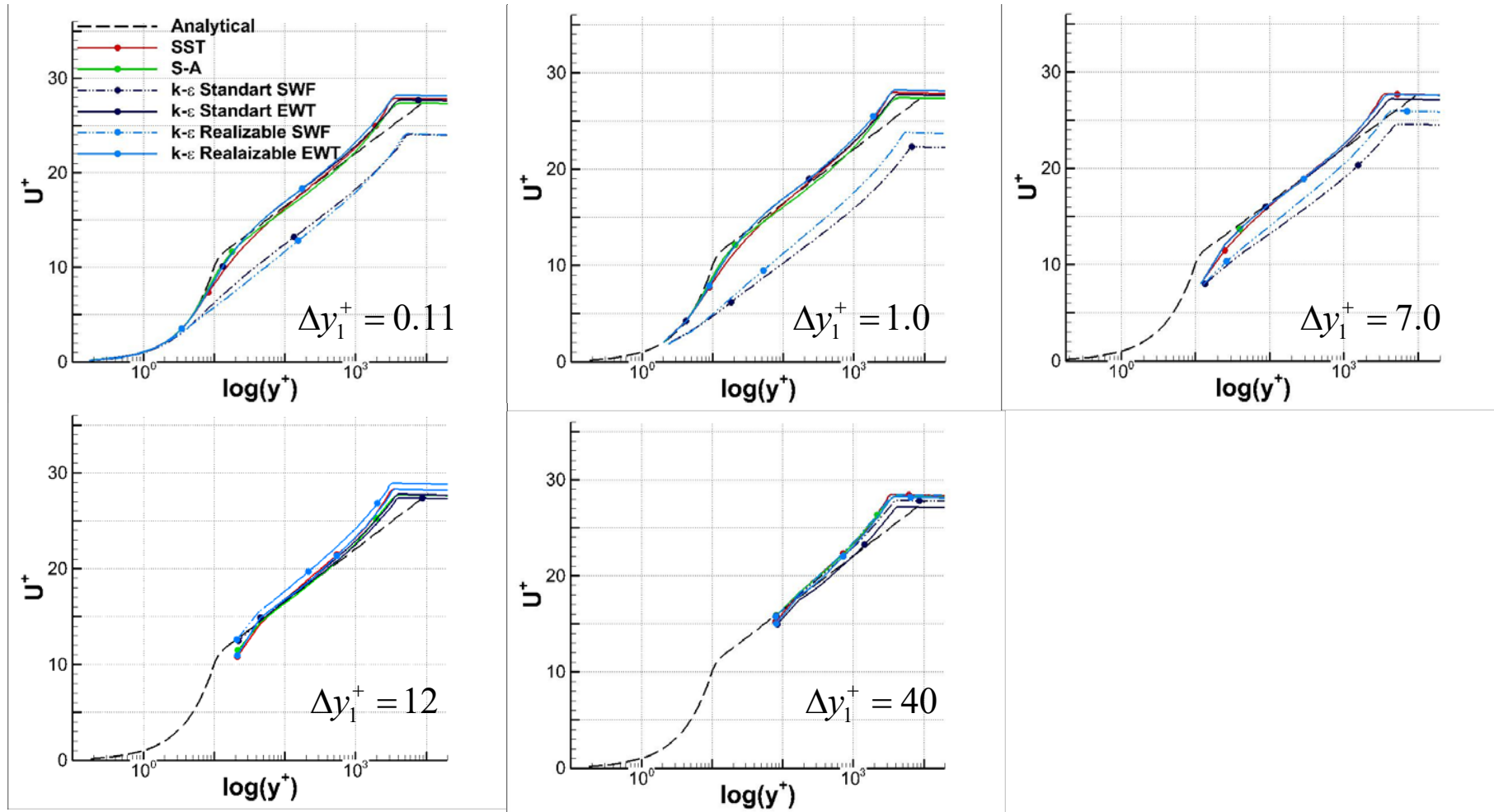
- Турбулентный пограничный слой
 - Стандартные пристенные функции непригодны для низкорейнольдсовых сеток



Коэффициент трения в пограничном слое на плоской пластине

Применение пристенных функций

- Турбулентный пограничный слой
 - Стандартные пристенные функции непригодны для низкорейнольдсовых сеток



Профили скорости в переменных закона стенки в пограничном слое на плоской пластине

**Граничные условия для
турбулентных характеристик
в набегающем внешнем потоке**

$k-\omega$ модель

- При использовании этой модели возникают проблемы при расчете свободных сдвиговых течений
 - Решение очень чувствительно к граничным условиям во внешнем потоке

Течение	$k-\omega$	$k-\varepsilon$	Эксперимент
Дальний след	0.301 – 500	0.256	0.365
Слой смешения	0.103 – 0.141	0.098	0.115
Плоская струя	0.090 – 0.136	0.109	0.100 – 0.110
Круглая струя	0.073 – 0.371	0.120	0.086 – 0.095

- Можно вывести уравнение для ω из высокорейнольдсовой $k-\varepsilon$ модели (Menter, 1993)

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot ((\nu + \sigma_\omega \nu_T) \nabla \omega) + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\sigma_d}{\omega} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)$$

- В этом уравнении появляется cross-diffusion term $\frac{\sigma_d}{\omega} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)$
 - ✓ При наличии этого слагаемого чувствительность к граничным условиям пропадает

Cross-diffusion term

- Чувствительность решения к граничным условиям можно проверить на простом течении

➤ Например, развитие слоя смешения во времени (Трошин, 2015)

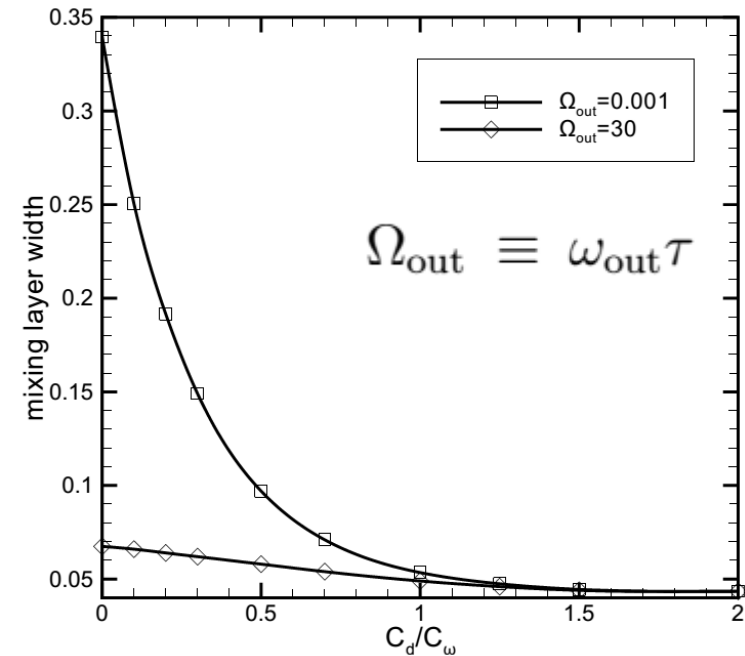
$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[C_k \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \right] + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[C_\omega \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] + \frac{C_d}{C_\mu \omega} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\omega}{k} \left(C_{\omega 1} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - C_{\omega 2} \varepsilon \right)$$

- Для полного подавления чувствительности к ГУ необходимо , чтобы $C_d/C_\omega \geq 2$
 - При $C_d < C_\omega$ чувствительность очень сильная



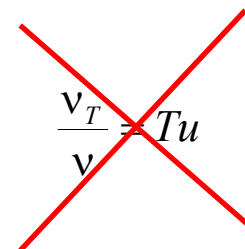
- В некоторых моделях используется недостаточное значение C_d
 - Wilcox, 1993 $C_d/C_\omega = 0.6$
 - Menter, 1993 $C_d/C_\omega = 2.0$



Граничные условия

- Внешний поток

- Уровень турбулентности $Tu = \frac{\sqrt{k}}{U_e}$
 - ✓ Позволяет определить кинетическую энергию k
- Обычно внешний поток бесдвиговый
 - ✓ Турбулентную вязкость определить невозможно
- Удельная диссипация $\omega = 1 \div 10 \frac{U_\infty}{L}$


$$\frac{\nu_T}{\nu} = Tu$$

- Принято выделять две типичные ситуации

- Ламинарный внешний поток (задачи внешней аэродинамики) $\nu_T = 10^{-3} \nu$
 - ✓ Задают заведомо низкий уровень турбулентной вязкости
 - ✓ $k = \nu_t \omega$
- Турбулентный внешний поток (внутренние задачи) $\nu_T = [0.1 \div 10] \cdot \nu$
 - ✓ Задают высокий уровень турбулентной вязкости
 - Он должен быть достаточен для турбулизации пограничных слоев
 - ✓ Уровень зависит от используемого кода, сетки, числа Рейнольдса и т.п.
 - ✓ $k = (Tu \cdot U_e)^2$, $\nu_t = \frac{k}{\omega}$ или $\nu_t = [0.1 \div 10] \cdot \nu$, $k = \nu_t \omega$

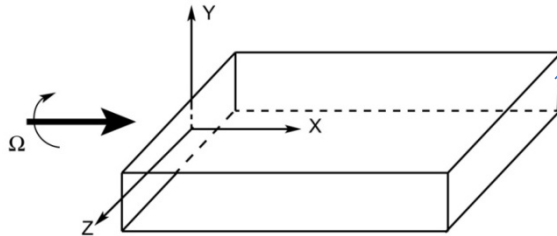
Эффекты кривизны и вращения

Эффекты кривизны и вращения

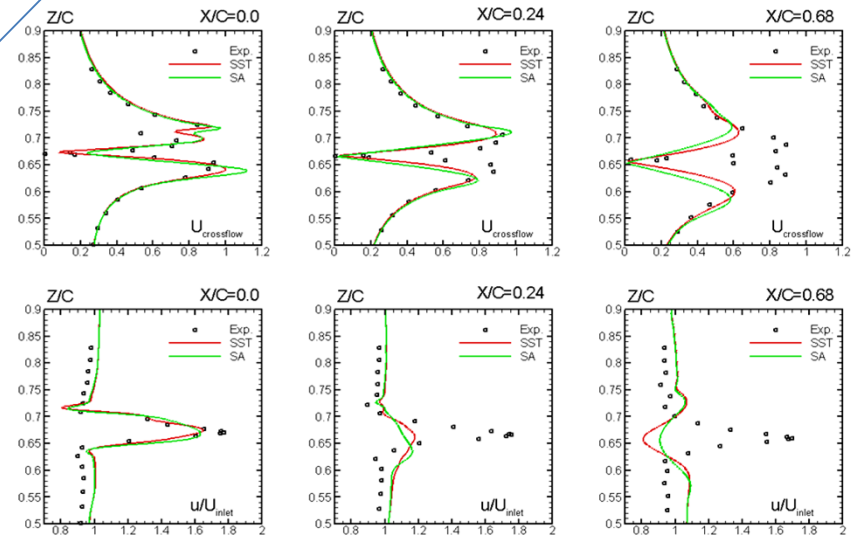
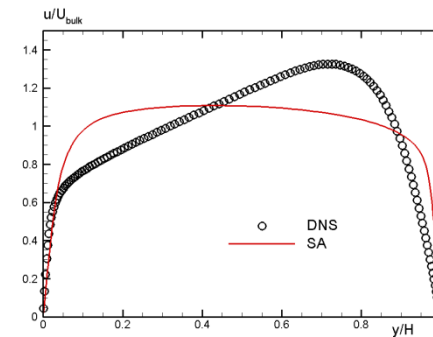
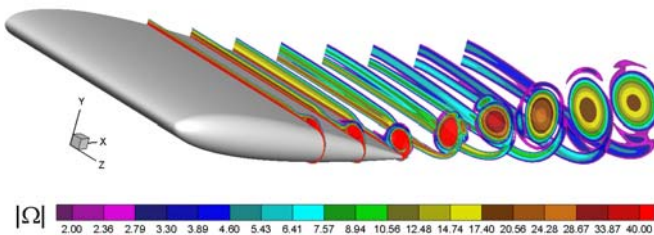
Кривизна линий тока или вращение потока могут привести к усилению или подавлению турбулентных пульсаций.

- В некоторых случаях происходит дестабилизация, а в некоторых – стабилизация течения
 - Оба эффекта существенно влияют на характеристики турбулентности
- Даже лучшие модели турбулентности не в состоянии предсказать эти эффекты без введения специальных поправок

➤ Течение во вращающемся канале



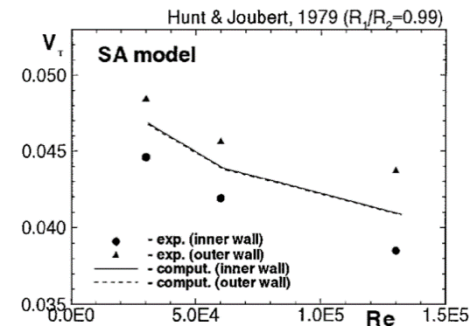
➤ Концевой вихрь



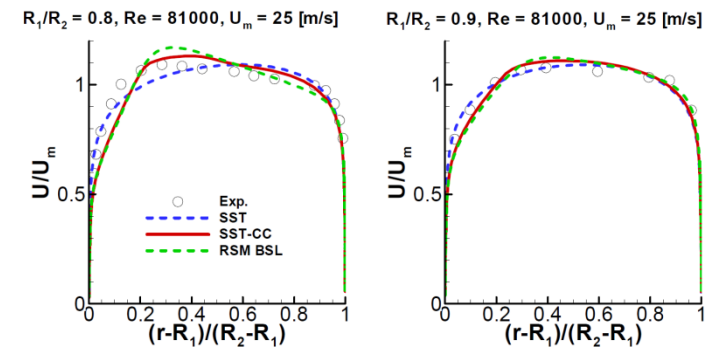
В обоих случаях профили скорости предсказываются неверно

Эффекты кривизны линий тока

- Течение в криволинейном канале
 - Относительная кривизна канала 1% приводит к 10% различию в трении
 - ✓ Это невозможно объяснить только “искривленностью” среднего течения
 - ✓ Модели турбулентной вязкости не описывают эти эффекты

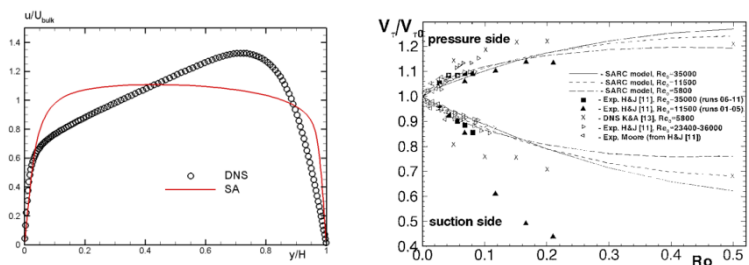


- Причина – влияние кривизны линий тока на турбулентность
 - На выпуклой стенке кривизна оказывает стабилизирующее воздействие, а на вогнутой – дестабилизирующее



Криволинейный канал

- Течения в криволинейном и вращающемся каналах имеют много общих черт
 - Асимметрия профиля скорости
 - Различие в трении на двух стенках



Вращающийся канал

- Влияние вращения системы координат и кривизны линий тока имеют одинаковую природу и приводят к аналогичным результатам

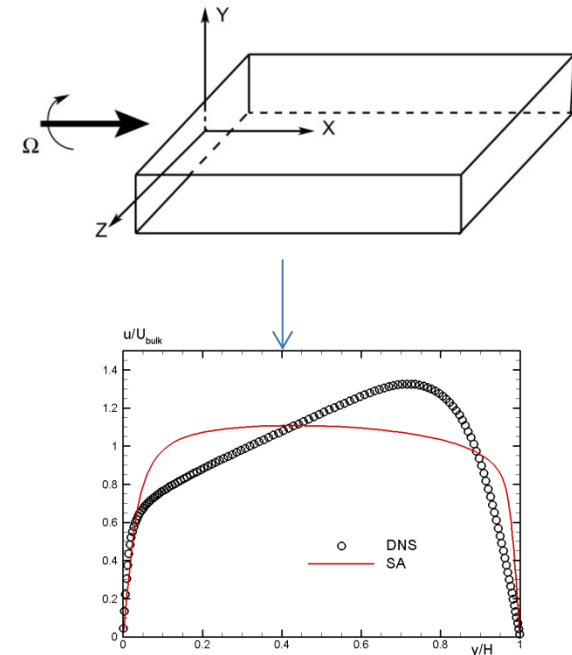
Аналогия между вращением и кривизной

Вращение потока приводит к искривлению линий тока, а искривленные линии тока создают локальную закрутку потока

Например:

Рассмотрим установившееся течение во вращающемся канале

- В системе координат, вращающейся вместе с каналом, линии тока прямолинейны
 - Асимметрия профиля скорости вызвана влиянием вращения
- В неподвижной системе координат линии тока искривлены
 - Это вызывает асимметрию профиля скорости



Форма профиля скорости не зависит от используемой системы координат
(Галилеева инвариантность)



Эффекты кривизны линий тока и вращения потока имеют единую природу и могут быть связаны между собой

Критерии кривизны линий тока и вращения

- Величина $S_{pl} \left(\frac{DS}{Dt} \right)_{lq} \varepsilon_{pqj}$ является критерием кривизны линий тока
 - Впервые был предложен в модели SARC (Spalart, Shur, 1997)

$$\tilde{r} = \frac{2\Omega_{ik} S_{jk} (DS/Dt)_{ij}}{D^4}, \quad D^2 = \frac{(S^2 + \Omega^2)}{2}$$

- ✓ Скорость поворота главных осей тензора скоростей деформаций относительно инерциальной системы отсчета

- Может быть ассоциирован с влиянием силы Кориолиса на турбулентность

- Безразмерный критерий $r^* = \left| \frac{S}{\Omega} \right|$ является количественным критерием закрутки потока

- Скорость вращения входит в только в тензор завихренности

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \varepsilon_{kji} \Omega_k \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

- Связан с влиянием центробежной силы на устойчивость течения

Поправка Спаларта-Шура

- Генерационное слагаемое модели Спаларта-Аллмареса умножается на функция вида

$$f_{r1} = \frac{2r^*(1+C_{r1})}{1+r^*} (1 - C_{r3} \arctg(C_{r2} \tilde{r})) - C_{r1}$$

- Константы подбирались на основе расчетов течения во вращающемся канале и пограничном слое с продольной кривизной поверхности

$$C_{r1} = 1, C_{r2} = 12, C_{r3} = 1.$$

- Поправка хорошо работает при слабых или сильных эффектах кривизны и вращения (по построению)

- При умеренном влиянии кривизны и вращения поправка менее точна

- Модификация для модели SST (Menter, Smirnov, 2008)

- Ограничения

$$f_{r1} = \max\{\min(f_{r1}, 1.25), 0\}$$

- Изменение критерия

$$\tilde{r} = \frac{2\Omega_{ik} S_{jk} (DS/Dt)_{ij}}{\Omega D^3} \quad D^2 = \max(S^2, 0.09\omega^2)$$

- Другой набор констант

$$C_{r1} = 1, C_{r2} = 2, C_{r3} = 1.$$

Установившееся течение во вращающемся канале

- Плоский канал вращается вокруг оси z
 - Кориолисова сила влияет на интенсивность турбулентности: на одной стенке увеличивает, а на другой уменьшает

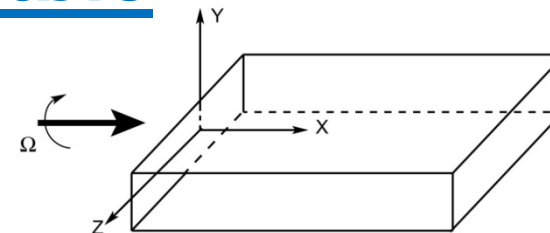
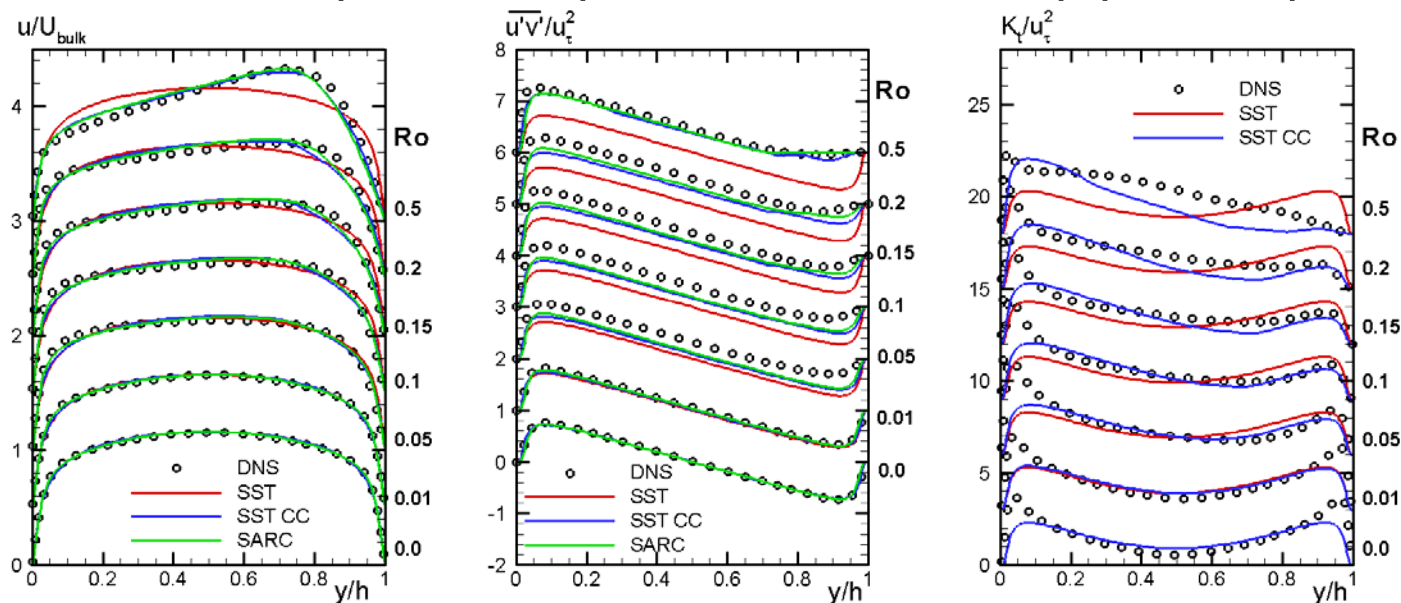


Схема течения

- Модели без поправок не “чувствуют” влияния вращения
 - Приводит к большим ошибкам в профиле скорости
- Модели с поправкой хорошо описывают эффекты вращения

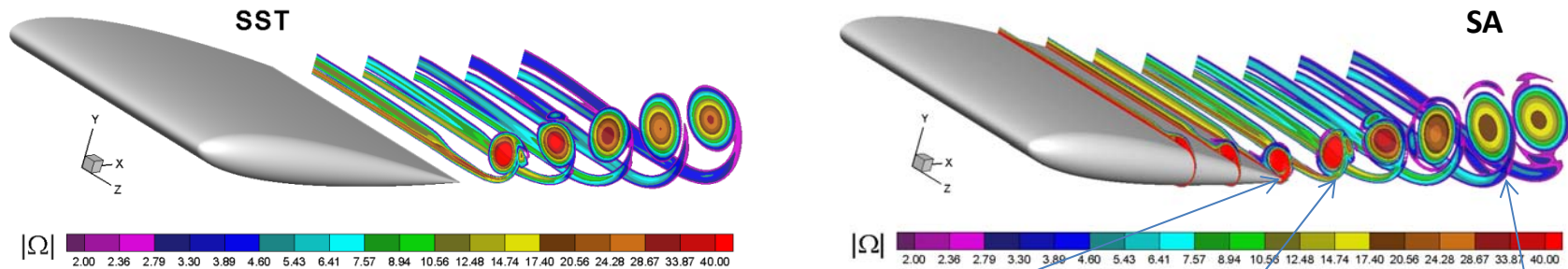


$$Re = \frac{U_b H}{\nu} = 5800$$

$$Ro = \frac{H\Omega}{U_b} \in [0, 0.5]$$

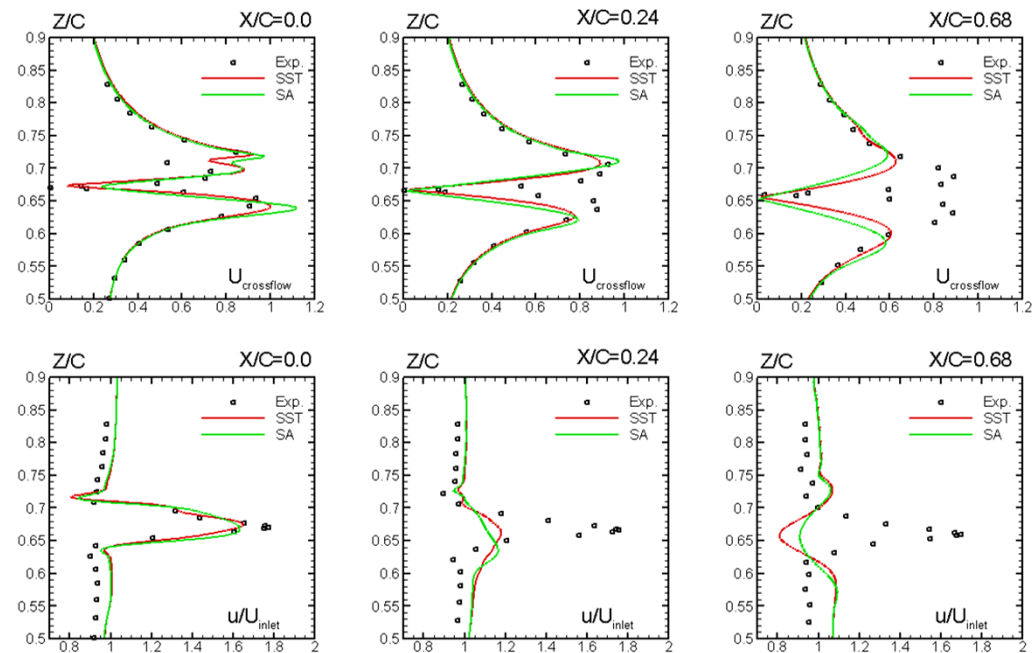
DNS of Kristoffersen and Andersson, 1993 (JFM, v. 256, p. 163)

Обтекание крыла конечного размаха NACA0012 со скругленной боковой кромкой



- Модели без поправок не в состоянии правильно предсказать течение в следе

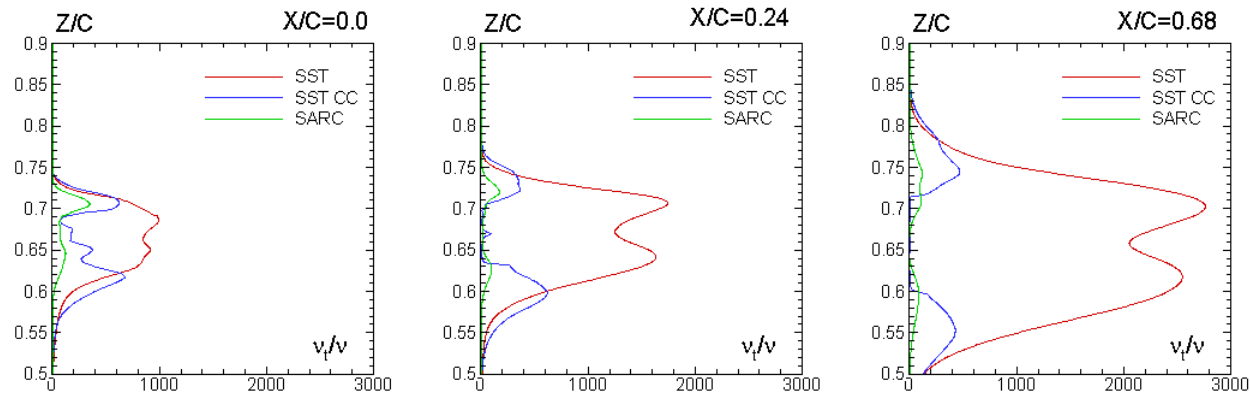
- Профили скорости в окрестности задней кромки описываются правильно
- Слишком быстрое вырождение концевых вихря



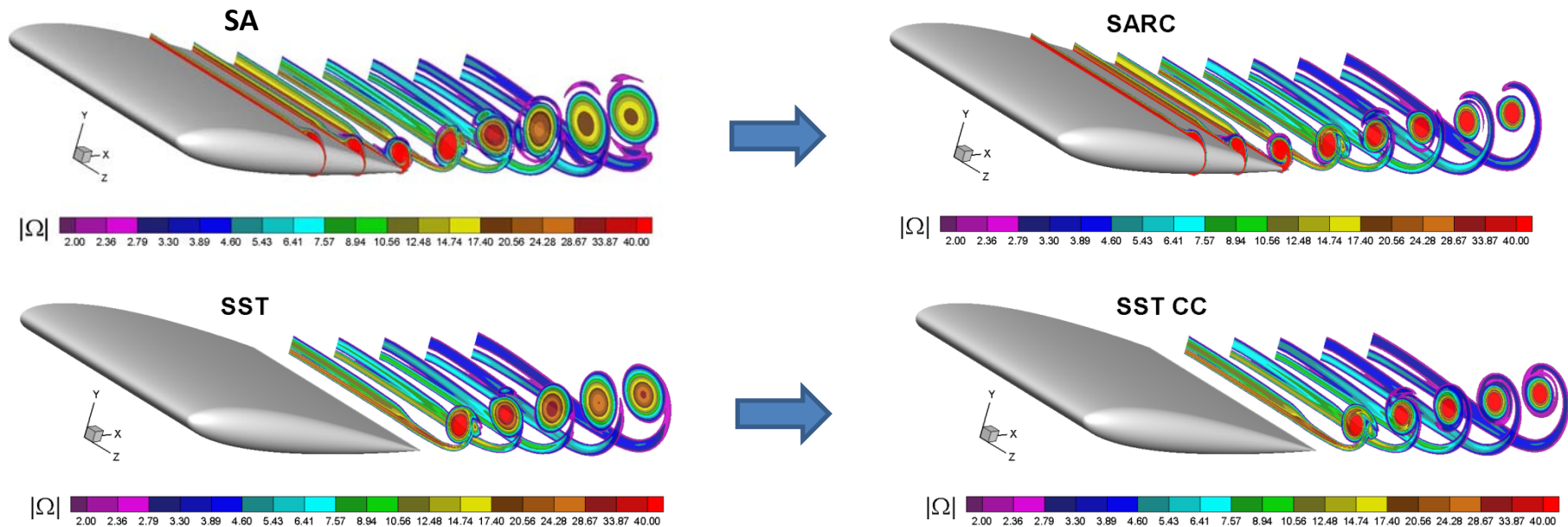
Развитие продольной и поперечной компонент скорости в концевом вихре 24

Влияние поправки

- Поправка подавляет турбулентную вязкость в вихре

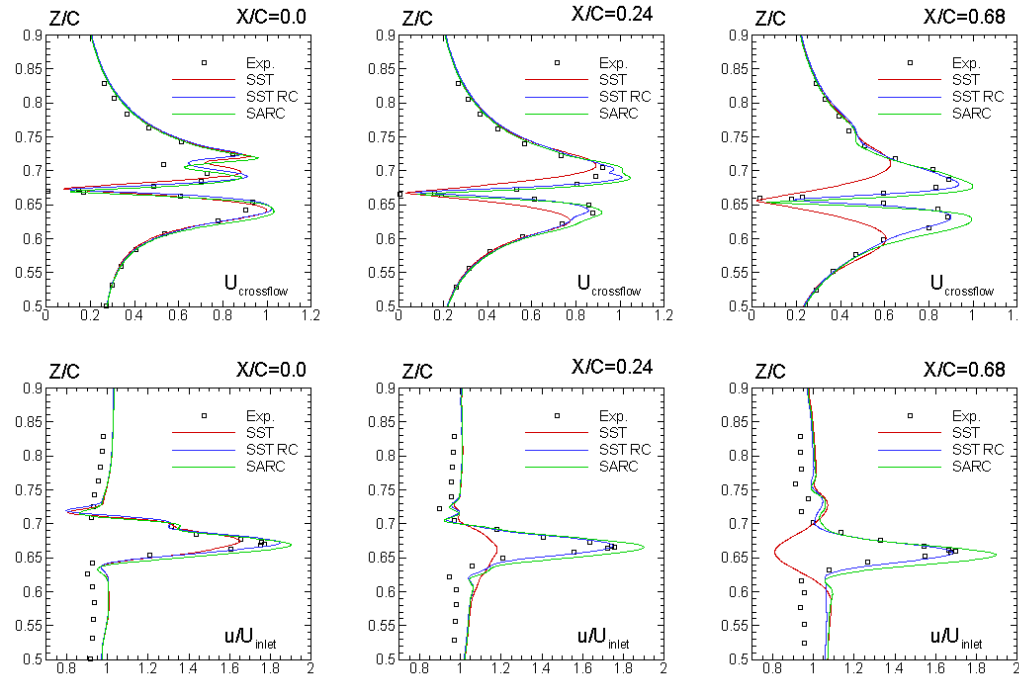


- Вихрь медленнее диссипирует

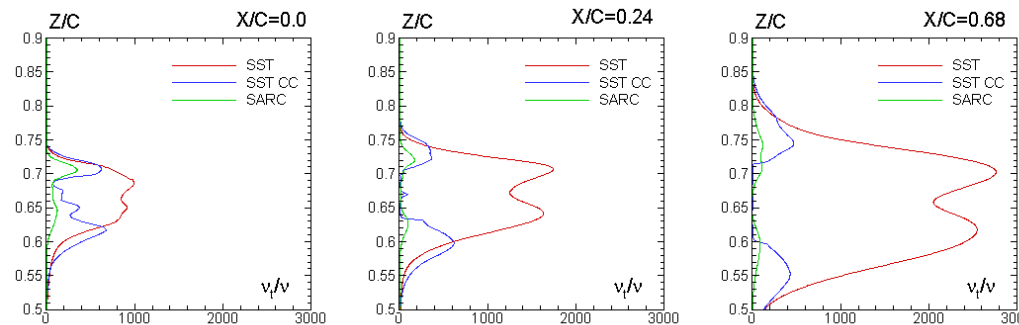


Влияние поправки

- Поправка приводит к кардинальному улучшению решения



- Для правильного предсказания развития концевых вихрей турбулентная вязкость в его ядре должна полностью подавляться



Резюме:

- Точность расчета конкретного течения может зависеть от постановки граничных условий и положения свободных границ
- Пристенная область крайне сложна для моделирования; попытки уточнить модели в этой области ведут к их существенному усложнению
- Пристенные функции крайне привлекательны для решения прикладных задач, однако не стоит забывать, что они основаны на «каноничеком» логарифмическом профиле и могут быть неверны
- Для описания некоторых более сложных эффектов необходимы специальные поправки
 - Для наиболее часто используемых моделей турбулентности (SA и SST) такие поправки разработаны и внедрены в большинство кодов